Epsilon – *Revista de Educación Matemática* *2023, nº 115, 45-58*
Sección: Experiencias de aula

Demostraciones visuales en el segundo ciclo de la ESO: una propuesta didáctica

David García Fernández
Universidad de Granada, *davidgfret@correo.ugr.es*

Resumen: *Este trabajo presenta una propuesta didáctica diseñada con el objetivo de desarrollar en el alumnado habilidades y destrezas relacionadas con la competencia específica de formular y comprobar conjeturas. El foco principal de esta propuesta son las demostraciones matemáticas visuales, las cuales se trabajarán mediante recursos manipulativos, gráficos y aplicaciones de software de matemáticas dinámicas, principalmente GeoGebra. Durante su desarrollo se tratarán cuatro bloques temáticos a través de tareas significativas que requieren de creatividad, reflexión y razonamiento crítico, los cuales son: teorema de Pitágoras y triángulos, identidades algebraicas, sucesiones y series y números enteros. Con el objetivo de atender a la diversidad en el aula, muchas de las actividades propuestas se han diseñado de manera secuenciada con lo que se pretende que el alumno trabaje los distintos aspectos de la demostración matemática de forma progresiva.*

Palabras clave: *educación secundaria, demostración, conjetura, método de inducción*

Visual proofs for the highest courses of the secondary education: a teaching proposal

Abstract: *The aim of this work is presenting a educational proposal disigned in order to develop skills with regard to specific competence relating to formulate conjectures. This proposal is focused on mathematics visual proofs that will be showed by manipulative and graphic resources just as dinamic software in mathematics, mainly GeoGebra. The contents block is divided in four topics, which are Pitagoras' theorem and triangles, algebraic identities, sequences and integers, that will be studied through activities where creativity, reflection and critical thinking are needed to resolve them. In order to promote diversity awareness, the activities in this article have been disigned sequenced, facilitating the work in distinct aspects on a mathematical proof for students, in a progressive way.*

Key words: *induction method, mathematical conjecture, proof, secondary education*

1. INTRODUCCIÓN

La demostración puede entenderse en matemáticas de muy diversas maneras. De acuerdo con el diccionario de la Real Academia Española, demostrar consiste en hacer ver la veracidad de un argumento mediante razonamientos y pruebas. Según Martí (2003), demostrar consiste en llevar a cabo un razonamiento aplicando reglas lógicas con la finalidad de llegar a la veracidad de una proposición. Esta propuesta didáctica se centra en la definición y propiedades que destaca Stylianides (2007) acerca de la demostración matemática escolar. De acuerdo a este autor, una demostración es un argumento matemático a favor o en contra de una afirmación matemática que es accesible, conceptualmente, a los miembros de una comunidad. En este trabajo haremos especial hincapié en las demostraciones visuales y geométricas.

Cómo citar: García Fernández, D. (2023). Demostraciones visuales en el segundo ciclo de la ESO: una propuesta didáctica. *Epsilon, 115, 45-58.*

El ser humano ha usado desde siempre imágenes con la finalidad de representar y esquematizar la realidad. En las matemáticas, el proceso de representación ha servido de ayuda para plasmar y ejemplificar ideas complejas sobre el papel a lo largo de la historia, así como para guiar el razonamiento durante una demostración. Las demostraciones visuales en las que nos centraremos son un tipo concreto de demostración no formal en el que, mediante argumentos geométricos, se pretende probar una afirmación haciendo uso de dibujos o imágenes. Para el diseño de esta propuesta didáctica se han tomado como modelo algunas de las ideas recopiladas por Nelsen (2001), las cuales destacan por su sencillez y elegancia a la hora de presentarse al lector.

Con relación a su enseñanza en el aula, la demostración matemática es un concepto tanto difícil de aprender, como de enseñar. Esta dificultad se debe en parte a la gran cantidad de ideas equivocadas que tienen los alumnos en el proceso de razonar con argumentos lógico-matemáticos. Por ejemplo, según el *Education Committee of the European Mathematical Society* (2011) uno de los errores más comunes en los alumnos es el de considerar como general una propiedad o característica que se cumple en varios casos particulares. Sin embargo, a pesar de las dificultades de llevar la demostración al aula, no podemos relegarla, como contenido, a un segundo plano. Según Hanna y De Villiers (2011), la demostración debería jugar un papel relevante en el currículum de matemáticas de secundaria. Es más, en países como Alemania y Francia, la demostración se enseña como un contenido específico (Alfaro-Carvajal et al., 2019), tal y como se trata en esta propuesta. No obstante, Stylianides y Stylianides (2017a) consideran que se hace poco énfasis en este problema, pues a pesar de contar con gran diversidad de estudios sobre cómo los estudiantes entienden la demostración y el papel que esta debería ocupar en los estudios de secundaria, son pocas las propuestas didácticas que plantean presentar la demostración al alumnado y que cuenten con un alto porcentaje de éxito. Un ejemplo de propuesta exitosa relacionada con la demostración matemática llevada al aula la encontramos en el estudio realizado por Senk (1985) donde un 30% del alumnado adquirió capacidades bastante satisfactorias con relación a la destreza de la demostración.

La presente propuesta didáctica está orientada a que el alumnado de 4º de la E.S.O. adquiera habilidades y destrezas asociadas a las competencias específicas establecidas por el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, centrándose en la tercera de ellas, que incide en el razonamiento y la demostración en matemáticas. Para ello, se propone una metodología que reconozca al estudiante como agente de su propio proceso de aprendizaje gracias a actividades significativas que requieren de creatividad, reflexión y autonomía. Autores como Stylianides y Stylianides (2017b) alientan el diseño de este estilo de propuestas didácticas que no solo intentan acercar al alumnado a la demostración matemática, sino que pueden proporcionar conocimiento teórico sobre la naturaleza de las dificultades de los estudiantes con la demostración.

1.1. Descripción metodológica y justificación curricular

El flujo de trabajo seguido para el diseño de esta propuesta ha consistido, primeramente, en partir del diseño de objetivos didácticos vinculados a la tercera competencia específica de matemáticas, que incide en el razonamiento y la demostración matemáticas. A partir de los objetivos específicos se pudieron diseñar tareas modelo, que han servido a su vez para identificar bloques temáticos pertinentes para trabajar la competencia. De esta manera, se han podido diseñar otras tareas adicionales relacionadas con los bloques temáticos y que permiten continuar desarrollando la competencia seleccionada en un principio, y trabajar de forma adicional otras competencias específicas del currículo.

Es por ello que la propuesta didáctica está subordinada a los objetivos didácticos que en ella se van a trabajar y, por lo tanto, su finalidad es permitir a los estudiantes ahondar en la competencia asociada. Los que se definieron para este trabajo se describen a continuación:

- O1. *Formular conjeturas* generales en base a observaciones particulares: esto es, a partir de varias observaciones de un mismo suceso, enunciar una conjetura que intente explicar, por ejemplo, alguna de las características de los observado y relacionarlo con ciertas condiciones en las que se ha producido la observación.
- O2. *Aportar contraejemplos* con el fin de rechazar la validez de conjeturas: se pretende que los estudiantes sean capaces de encontrar contraejemplos sencillos a conjeturas falsas planteadas por el docente o que incluso adquieran la capacidad de comprobar la veracidad de las que planteen ellos mismos mediante la búsqueda de contraejemplos.
- O3. *Realizar cambios en las hipótesis de partida*, comprobando cómo varía el resultado: observar cómo realizar cambios en las hipótesis de una conjetura inicialmente falsa, la pueden convertir en verdadera.
- O4. *Usar software matemático y tecnología para validar conjeturas*: para comprobar de manera visual si sus propias conjeturas planteadas son ciertas. En esta propuesta didáctica se trabajará sobre todo con GeoGebra.
- O5. *Construir demostraciones por método de inducción*: se pretende que el alumnado maneje casos sencillos y visuales de demostraciones que se puedan construir de forma iterativa usando inducción.
- O6. *Comunicar* de forma eficiente, haciendo uso del lenguaje matemático, *resultados obtenidos*: pretendemos que adquieran habilidad a la hora de comunicar, haciendo uso del lenguaje matemático oportuno, de manera eficiente los resultados que han obtenido.

Tabla 1

Conexión entre las competencias específicas del currículo y los objetivos didácticos de la presente propuesta.

Competencias específicas	Objetivos didácticos					
	O1	O2	O3	O4	O5	O6
CE1. Resolver problemas	X				X	
CE2.Validar soluciones		X		X		
CE3. Plantear conjeturas	X	X	X	X	X	
CE4. Diseñar algoritmos					X	
CE5. Conexiones matemáticas	X	X			X	
CE8. Comunicar	X		X			X
CE9. Gestionar emociones						X
CE10. Trabajo en equipo						X

Los bloques temáticos que han surgido a partir de estos objetivos y siguiendo la metodología descrita son la geometría, el Teorema de Pitágoras, las identidades algebraicas, las sucesiones y series y, finalmente, números enteros y sus propiedades. Algunas de las tareas modelo que les han dado origen aparecen más adelante en este trabajo. En cuanto a las competencias específicas (CE) de la normativa curricular que se desarrollan a lo largo de la propuesta descrita para 4º de la E.S.O. estas se reflejan en la Tabla 1 en conexión con los objetivos didácticos definidos.

Con respecto a las competencias específicas establecidas por el Decreto 217/2022, la Tabla 1 muestra la conexión entre los objetivos didácticos definidos y dichas competencias. Como se ha señalado, la tercera de ellas es la fundamental en este trabajo. En relación a la capacidad del alumnado de investigar conjeturas, esta se relaciona con los siguientes objetivos didácticos: O1, pues se persigue que los estudiantes sean capaces de formular sus propias conjeturas, en ocasiones guiados por el docente, y verifiquen la validez de las mismas; O2, ya que aportar contraejemplos es una forma de probar que una conjetura es falsa; y. finalmente, O5 puesto que se pretende que los estudiantes sean capaces de comprobar, haciendo uso del método inductivo, y de forma visual, conjeturas. Además, el objetivo O3 desarrolla la capacidad de modificar hipótesis de partida en un razonamiento y comprobar de qué forma varía entonces la veracidad de una conjetura. Esta habilidad es esencial para que los estudiantes puedan enfrentarse a problemas matemáticos en la vida cotidiana y en contextos profesionales. Les permite comprender que la información presentada en un problema puede ser flexible y ajustable, y que pueden adaptarla para resolver situaciones diversas. Finalmente, la capacidad de usar tecnología en favor del razonamiento matemático se trabaja a través del objetivo O4.

La Tabla 1 también ilustra la conexión entre los objetivos formulados y otras competencias específicas del currículo. La competencia CE1, relacionada con la resolución de problemas, queda recogida en el O1 ya que para poder formular conjeturas en base a lo observado en distintos casos es necesario conocer los datos, en específico las distintas hipótesis iniciales, que llevarán a enunciar una conjetura u otra. También está conectada con O5, puesto que para poder aplicar inducción es necesario comprender correctamente los datos disponibles y el enunciado que se pretende demostrar. La competencia específica CE2, relacionada con la validación de soluciones de un problema, se puede desarrollar mediante O2, dado que en el proceso de encontrar un contraejemplo se debe probar con distintos candidatos y comprobar si estos cumplen, verificando unas hipótesis iniciales, la tesis requerida; y mediante O4, pues mediante el uso de software de matemáticas dinámicas, se pretende que los alumnos validen la veracidad de sus conjeturas, lo que conlleva comprobar la corrección matemática de sus planteamientos. En cuanto a la competencia específica CE4, relacionada con el pensamiento computacional, se pretende que el alumnado la desarrolle a través del objetivo didáctico O5, puesto que para realizar el método de inducción al nivel en el que queremos presentarlo es necesario reconocer patrones, sobre todo visualmente, realizar de forma correcta la hipótesis de inducción y computar las distintas iteraciones. Respecto a la competencia CE5, relacionada con las conexiones matemáticas, esta se puede desarrollar mediante el logro de los objetivos O1, ya que para formular conjeturas es necesario entender correctamente las relaciones que existen entre distintas áreas de las matemáticas, y O5, dado que para aplicar el método de inducción ocurre exactamente lo mismo. La competencia CE8, relacionada con la comunicación matemática, se trabaja a través del objetivo O6, mediante la comunicación de los resultados obtenidos a la hora de validar sus conjeturas.

Debe señalarse, para concluir, que las competencias específicas vinculadas a la dimensión afectiva también se contemplan en la propuesta. CE9, relacionada con la gestión de las emociones, está presente en los objetivos O1, O2, O3 y O5, ya que a través de los mismos se pretende desarrollar en el alumno la capacidad para gestionar la frustración que muchas ocasiones genera el construir de manera correcta una demostración de una conjetura o encontrar un contraejemplo, así como implantar en el alumnado la capacidad de mantener una actitud positiva aun cuando los resultados a los que se esperaba llegar no se han alcanzado. De igual modo, la décima competencia específica, relacionada con el trabajo en equipo, conectan con O6, dado que contamos con actividades que se trabajan de forma colaborativa.

2. PROPUESTA DIDÁCTICA

2.1. Contexto

La propuesta didáctica está diseñada para un colegio de la ciudad de Granada. Se trata de un Concertado con la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía de tres líneas en Educación Infantil, Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria. El colegio presenta una gran diversidad en el nivel socioeconómico del alumnado y sus familias. Por un lado, hay familias que escolarizan a sus hijos e hijas por trabajar en un campus universitario cercano. Por otra parte, también hay familias pertenecientes a zonas en riesgo de exclusión social que solicitan este centro, así como familias de pueblos de la zona metropolitana de Granada. Esta diversidad en las familias da lugar a una gran diversidad en el nivel socioeconómico del alumnado, con una clase media, en ocasiones media alta y en el caso de otras familias media baja. Cabe mencionar también que hay familias con hijos e hijas de dificultades o NEAE. Esta enorme diversidad, se vive en el centro como un enorme potencial y riqueza con la que crecer juntos tanto en conocimiento como en valores.

2.2. Sesiones y tareas

La Tabla 2 recoge un resumen de las diez sesiones en las que se llevarían a cabo en esta propuesta didáctica junto con un breve comentario descriptivo de los contenidos a impartir en las mismas. El temario tratado en ellas es más familiar para el alumnado en las primeras sesiones con la finalidad de que trabajen la demostración en un ambiente de contenidos que manejen con facilidad y con el que se sientan cómodos.

Tabla 2

Resumen de las distintas sesiones de la propuesta didáctica.

Sesión	Título	Objetivos	Competencias	Contenidos
S1	Introducción a la demostración	O1, O2, O3	CE1, CE3, CE5, CE8	Introducción a la demostración matemática. Primeros ejemplos
S2	Demostrando el teorema de Pitágoras I.	O1, O3, O4	CE1, CE2, CE3, CE5, CE8, CE9, CE10	Demostración visual y geométrica del teorema de Pitágoras
S3	Demostrando el teorema de Pitágoras II.	O1, O2, O3, O4	CE3, CE5, CE8, CE9	Doble implicación y extensión a triángulos no rectángulos
S4	Demostrando identidades algebraicas I: Identidades	O1, O3, O4	CE1, CE2, CE3, CE5, CE8, CE9	Identidades notables, demostración visual y geométrica de las mismas

Sesión	Título	Objetivos	Competencias	Contenidos
	notables			
S5	Demostrando identidades algebraicas II: Suma de n enteros	O1, O3, O6	CE1, CE3, CE5, CE8, CE9	Demostraciones visuales y analíticas de la suma de n enteros
S6	Demostrando identidades algebraicas III: Suma de los n primeros impares	O1, O4, O6	CE1, CE3, CE5, CE8, CE9	Demostración visual y geométrica de la suma de los n primeros números impares
S7	Demostrando identidades algebraicas IV: Cuadrados y sumas	O1, O3, O6	CE3, CE5, CE8, CE10	Demostración de una igualdad algebraica y repaso de contenidos de sucesiones y series mediante un juego
S8	Sumas y series geométricas	O1, O2, O4, O4, O6	CE1, CE3, CE5, CE8, CE9	Demostraciones visuales y geométricas de la convergencia de un determinado tipo de series
S9	El método de inducción I	O1, O5, O6	CE1, CE3, CE4, CE5, CE8, CE9	Primer acercamiento al método de inducción. Ejemplos visuales y geométricos
S10	El método de inducción II	O1, O5, O6	CE1, CE3, CE5, CE8, CE9	Método de inducción desde una perspectiva más rigurosa matemáticamente

A continuación, se presentan varias de las tareas que se les propondrán a los alumnos. Con el objetivo de atender la diversidad del aula, en esta propuesta didáctica se han incluido tareas secuenciadas que atiendan a dicha pluralidad y que permitan a todos los estudiantes avanzar en el aprendizaje a su propio ritmo. Para ello, las tareas secuenciadas que hemos incluido fomentan el trabajo de los diferentes aspectos de la demostración matemática de forma progresiva. Por limitaciones de espacio en esta sección no se recogerán todas las tareas presentes en esta propuesta didáctica.

La imagen que se les presenta les sirve ya como el contraejemplo que se les pide en el enunciado. Los alumnos que no dibujen sus propios triángulos pueden usar los que se les presentan en la Figura 1 (izquierda). Contando los cuadrados pequeños obtendrán el área de los cuadrados construidos sobre los distintos lados.

2.2.1. Tarea 1 (Sesión 3): El teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos

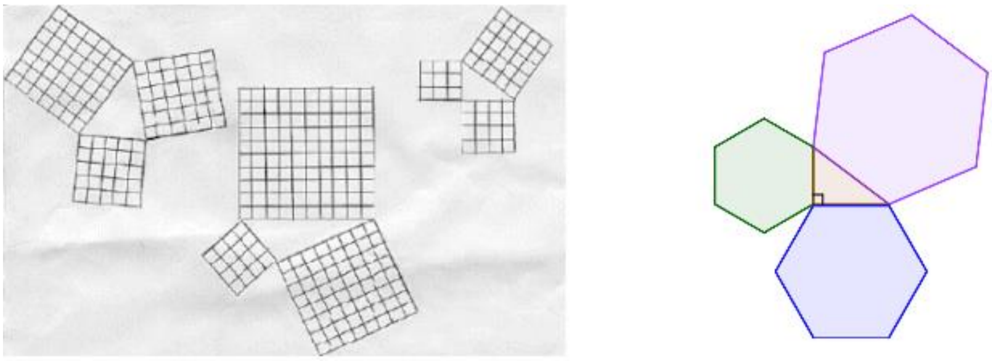
¿Se cumple el teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos? Si la respuesta es negativa proporciona un contraejemplo y extiende la doble implicación que aparece en el teorema de

Pitágoras para triángulos rectángulos adaptándola al caso de triángulos obtusángulos y acutángulos. Básate en la siguiente imagen como una ayuda (ver Figura 1, izquierda).

La importancia de esta tarea radica en la formulación de conjeturas que el alumnado deberá de proponer y de validar mediante la aportación de contraejemplos. La pregunta que se realiza aparece acompañada de una aclaración que sirve de guía para la resolución del ejercicio. Para contestarla basta con que dibujen con una regla dos triángulos que no sean rectángulos, uno acutángulo y otro obtusángulo, y en base a las medidas que obtengan en los lados que comprueben si se cumple el teorema de Pitágoras. En ambos casos obtendrán dos desigualdades que les servirán para presentar como contraejemplo, así como de guía para conjeturar la extensión del teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos.

Figura 1

Izquierda: Imagen de ayuda para resolver la Tarea 1 (Fuente: Ramírez, 2016). Derecha: Ejemplo en GeoGebra de la construcción de hexágonos regulares sobre los lados que se propone en la Tarea 2.



2.2.2. Tarea 2 (Sesión 3): Otros polígonos en el teorema de Pitágoras

Utilizando GeoGebra investiga qué relación existe entre las áreas de los polígonos regulares de n lados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Comienza construyendo un pentágono sobre un triángulo de lados 3, 4 y 5. ¿Qué relación encuentras entre las áreas de los distintos pentágonos? Haz lo mismo para hexágonos regulares. ¿Qué ocurre si el triángulo es obtusángulo? ¿Y acutángulo? ¿Qué ocurre en el caso especial de que el triángulo sea equilátero? ¿Por qué? Para ayudarte haz uso del comando Área (nombre del polígono) en GeoGebra.

A través de esta tarea se pretende que el alumnado estudie qué ocurre con la igualdad que se da en el teorema de Pitágoras en el caso en el que no consideramos el cuadrado construido sobre los distintos lados del triángulo; sino otro tipo de polígonos regulares. La tarea se presenta secuenciada, comenzado por el caso particular en el que los polígonos que se consideran son pentágonos. Haciendo uso del comando *Area*, previamente explicado en clase, el estudiante podrá comprobar de forma inmediata la relación que guardan las áreas en los distintos casos propuestos. Una vez respondida la primera pregunta se abre un amplio abanico de cuestiones más abstractas que el alumno deberá responder utilizando GeoGebra. En esta tarea la propia imagen en GeoGebra que generen los estudiantes junto con el comando que les permite calcular áreas de polígonos ayudarán a construir la demostración que se les pide. En el caso de la última pregunta sí es cierto que, además de presentar una prueba visual en GeoGebra, deberán aportar un desarrollo más algebraico de la respuesta.

2.2.3. Tarea 3 (Sesión 4): Identidades notables

Demuestra, mediante argumentos visuales y geométricos las siguientes identidades notables

i) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab$

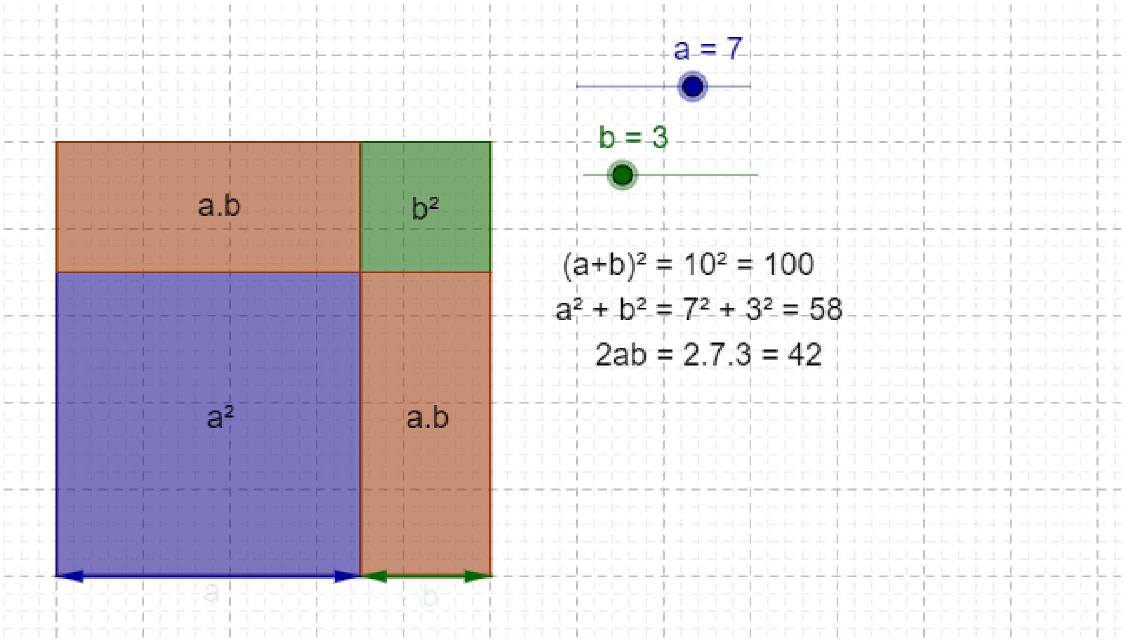
ii) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab$

iii) $(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$

Puedes utilizar el siguiente enlace de ayuda para completar el ejercicio. *http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/n1suma_cuadrado.htm*

Figura 2

Recurso online propuesto para la resolución de la tarea 3.



El objetivo de la Tarea 3 es que el alumno haga uso de software de matemáticas dinámicas que se muestra en la Figura 2 para trabajar objetivo O4. Se presenta un enunciado más escueto que en el resto de tareas y directamente algebraico puesto que las identidades notables ya son un contenido ampliamente trabajado durante toda la secundaria y con el que el alumnado debe sentirse familiarizado. El primer apartado está pensado para resolverse de forma guiada por el docente durante la sesión, explicando la relación entre la expresión algebraica y las áreas de las figuras. El resto de apartados deberá resolverlos el alumnado de forma autónoma e independiente. Para ello deberá relacionar la expresión algebraica que se les presenta en el enunciado con la demostración visual que se usa como recurso en esta tarea, dotando de sentido geométrico a la expresión abstracta. Desarrollamos así un conocimiento intramatemático en el alumno, consiguiendo que este relacione conceptos pertenecientes a distintas áreas de las matemáticas. El papel de la demostración visual en esta tarea es el de resultar un recurso para el estudiante, de forma que la entienda y justifique aportando argumentos geométricos que relacione con las identidades del enunciado.

2.2.4. Tarea 4 (Sesión 4): Identidad de Legendre

Contesta de forma razonada las siguientes preguntas:

i) Calcula $(5+3)^2 + (5-3)^2$ y a continuación $2\,(5^2+3^2)$: ¿Qué observas?

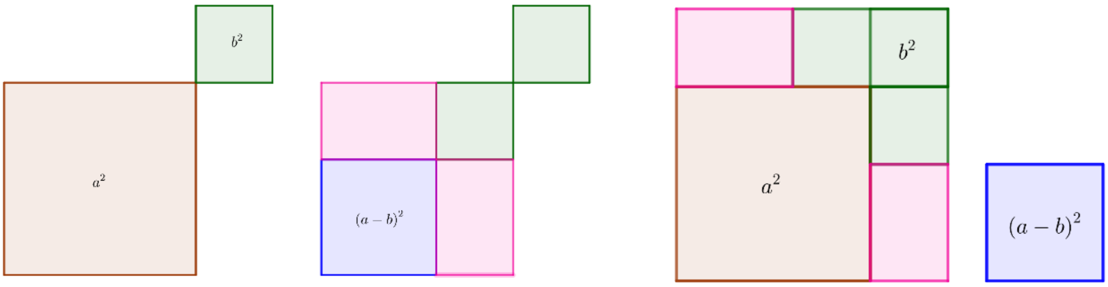
ii) Calcula de igual forma $(7+2)^2 + (7-2)^2$ y a continuación $2\,(7^2+2^2)$ ¿Ocurre lo mismo que en el caso anterior? Prueba con otros dos números, los que tu elijas.

iii) Haciendo uso de las fórmulas de las identidades notables que ya conoces, calcula $(a+2)^2 + (a-2)^2$ y a continuación $2\,(a^2+2^2)$, donde a es cualquier número real. ¿Has obtenido la misma expresión en ambos casos?

iv) Haciendo uso del siguiente enlace y del material del enlace justifica con tus palabras que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\,(a^2 + b^2)$. Para ello ten en cuenta el significado, en términos de áreas, que tienen estas expresiones (véase la Figura 3).

Figura 3

Recortables manipulativos de la Tarea 4: Identidad de Legendre.



Esta tarea se les presenta de forma muy secuenciada a los estudiantes con el objetivo de atender a la diversidad y que de esta forma todos los alumnos puedan adquirir paulatinamente destrezas en relación a la abstracción, a la manipulación algebraica de expresiones y a la construcción de demostraciones mediante argumentos algebraicos y geométricos. Para ello se comienza la tarea trabajando con números concretos en el primer apartado, los cuales ayudarán al estudiante a comprender de forma más palpable la identidad que se pretende demostrar. En el segundo apartado se introduce una variable con la finalidad de aumentar el nivel de abstracción, aunque aún se mantiene un número para que el alumno se sienta cómodo. Finalmente aparecen dos variables con las que la identidad quedaría demostrada. La imagen de la Figura 3 se incorpora en el tercer apartado para que una vez que el alumno haya practicado la manipulación algebraica y aritmética en los dos apartados anteriores pueda entender el sentido geométrico de la identidad, estableciendo una relación entre la demostración visual que se le presenta y la expresión algebraica que se espera que obtenga.

2.2.5. Tarea 5 (Sesión 6): Sumas de los n primeros números naturales impares

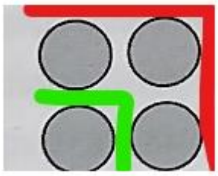
A partir de la siguiente imagen responde de forma justificada a los siguientes apartados (véase la Figura 4).

i) Observa que si sumamos los dos primeros números impares, 1+3, podemos formar un cuadrado de lado 2 y de área $2^2 = 4$. ¿Qué lado tendrá el cuadrado formado por la suma de los tres primeros números impares? ¿Y qué área? ¿Y el formado por los cuatro primeros números impares? La siguiente figura puede servirte de ayuda.

ii) En base a los resultados obtenidos en el apartado anterior, ¿cuánto crees que vale la suma de los n primeros números impares? ¿Por qué? (Aporta argumentaciones geométricas).

Figura 4

Izquierda: Figura que se les presentará a los alumnos en la Tarea 5. Derecha: ayuda propuesta para resolverla (Fuente: Nelsen, 2001).



En esta tarea el alumno trabajará la demostración visual que aparece en Nelsen (2001) de que la suma de los n primeros impares coincide con n^2. Para ello, se comienza presentando el caso particular para $n=2$ y se intenta que el estudiante identifique cada bola de la imagen con una unidad de longitud. De esta forma, el área estará en una relación de igualdad con el número de pelotas, el cual representa la suma de los n primeros impares. En el segundo apartado se pide la generalización para un n cualquiera. A partir de los casos de la primera cuestión se pretende que el alumno haya podido encontrar la relación existente entre la representación geométrica en el dibujo y la expresión algebraica de la afirmación que tendrá que conjeturar. La demostración visual que se le muestra tiene como finalidad ayudar primero a conjeturar cuánto vale la suma requerida y segundo, presentar una demostración propiamente considerada que deberán entender y justificar mediante argumentos geométricos.

2.2.6. Tarea 6 (Sesión 8): Hexágonos y cuadrados

En base a la siguiente imagen responde a las preguntas planteadas a continuación (véase la Figura 5).

i) ¿Cuántos cuadrados tendremos para 5 hexágonos? ¿Y para 10?

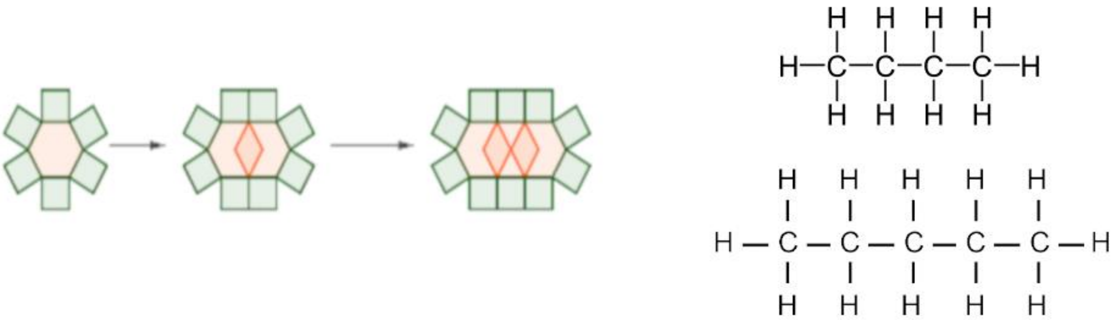
ii) Halla una fórmula que nos permite calcular el número de cuadrados en el caso de tener n hexágonos.

iii) En química orgánica se denominan alcanos a aquellos hidrocarburos que constan de átomos de carbono e hidrógeno unidos por enlaces simples. Los siguientes alcanos (a la derecha en la figura) se denominan metano y pentano, cuentan con 4 átomos de carbono y 10 de hidrógeno y 5 átomos de carbono y 12 de hidrógeno, respectivamente. Halla una fórmula para determinar el número de átomos de hidrógeno en base a los átomos de carbono en cadenas de alcanos de este tipo para cualquier número n de átomos de carbono.

Esta actividad se ha diseñado con la finalidad de representar un primer acercamiento al método de inducción. A través de ella se pretende que el estudiante entienda el trasfondo que encontramos en este método de demostración, pues el conocimiento de lo que ocurre en una de las iteraciones nos permite deducir lo que ocurrirá en las siguientes a través de razonamientos lógico-matemáticos y, por lo tanto, llegar a demostrar, como en este caso, que una determinada fórmula o expresión es cierta. Como representa un primer contacto con este método de demostración, la idea, más que realizar una inducción al uso, es que el estudiante comprenda la importancia que tienen las iteraciones en este método y que a partir de ellas podemos comprobar la validez de una expresión. Además, con el fin de mostrar al estudiantado una aplicación de las matemáticas en un ámbito científico concreto, se enriquece la tarea con el tercer apartado, en el que el alumno puede encontrar una fórmula parecida con la que obtener el número de átomos de hidrógeno en un alcano, lo que hace más realista esta tarea. La imagen en esta tarea sirve para reconocer el patrón más que para demostrar la fórmula a la que se quiere llegar.

Figura 5

Izquierda: Imagen asociada a los apartados i) e ii). Derecha: Imagen asociada al apartado iii): moléculas de metano y pentano, respectivamente.



3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN ASOCIADO A LAS TAREAS

Las tareas que se han diseñado a lo largo de esta propuesta didáctica se fundamentan en la necesidad de brindar a los estudiantes experiencias de aprendizaje significativas y efectivas. Al adaptarse a los diferentes estilos de aprendizaje y niveles de habilidad de los alumnos, estas tareas buscan garantizar un aprendizaje inclusivo y equitativo para todos los participantes mediante la secuenciación de tareas que aumentan la dificultad progresivamente, el uso de materiales manipulativos y de herramientas digitales. En definitiva, las tareas planteadas en esta propuesta didáctica tienen un propósito claro: enriquecer la experiencia educativa de los estudiantes, fomentar el desarrollo de competencias relacionadas con la formulación de conjeturas y estimular su interés por el aprendizaje. A continuación, se lleva a cabo un análisis no intensivo de algunas de las tareas propuestas en este trabajo, donde se recogen aspectos relevantes de las mismas como las competencias que se trabajan, la formulación en la que se le presenta a los alumnos y su significatividad entre otras (Tablas 3, 4 y 5).

Tabla 3

Análisis de la Tarea 1.

Tarea 1: El teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos	
Meta	Realizar una conjetura del teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos.
Contenido	Teorema de Pitágoras, desigualdades y geometría elemental.
Objetivos/competencias	O1, O2, O3 / CE3, CE5, CE8

Tarea 1: El teorema de Pitágoras en triángulos no rectángulos	
Formulación	Tanto de forma oral como escrita en un folio que se repartirá con el enunciado y la imagen.
Materiales y recursos	Lápiz, papel y regla.
Agrupamiento/interacción	Individual, discusión de resultados al final en grupo.
Contexto	Científico
Temporalización	30 min
Complejidad	Reflexión
Secuenciación	Desarrollo
Realista	No
Significativa	Sí, ya que se inicia desde la intuición matemática y el conocimiento previo del teorema de Pitágoras y supone un reto para el alumnado estudiar cómo varía nuestro resultado en triángulos que no cumplen las hipótesis de partida (ser un triángulo rectángulo).

Tabla 4

Análisis de la Tarea 2.

Tarea 2: Otros polígonos en el teorema de Pitágoras	
Meta	Estudiar cómo varía la famosa fórmula del teorema de Pitágoras si en lugar de considerar los cuadrados de los lados, consideramos otro polígono mediante el uso de software de matemáticas dinámicas.
Contenido	Teorema de Pitágoras, desigualdades y geometría elemental.
Objetivos/competencias	O1, O2, O3, O4 / CE3, CE5, CE8
Formulación	Se presenta en clase en pizarra digital y se envía por plataforma educativa junto con un enlace a GeoGebra.
Materiales y recursos	GeoGebra, ordenador
Agrupamiento/interacción	Individual
Contexto	Científico
Temporalización	Realizar en casa
Complejidad	Reflexión
Secuenciación	Cierre
Realista	No
Significativa	Sí, ya que se inicia desde la intuición matemática y el conocimiento previo del teorema de Pitágoras y de su

Tarea 2: Otros polígonos en el teorema de Pitágoras	
	demostración y constituye un reto para el alumnado al variar la condiciones, ya que no consideramos el cuadrado de sus lados, sino otra figura geométrica.

Tabla 5
Análisis de la Tarea 3.

Tarea 6: Hexágonos y cuadrados	
Meta	Aplicar el método de inducción a un caso particular de figuras geométricas.
Contenido	Método de inducción
Objetivos/competencias	O1, O5, O6 / CE1, CE3, CE4, CE5, CE6, CE8
Formulación	Escrita en folio
Materiales y recursos	Lápiz y papel
Agrupamiento/interacción	Individual
Contexto	Científico
Temporalización	10 min para presentarla en clase. Se finaliza en casa
Complejidad	Reflexión
Secuenciación	Cierre
Realista	No es realista, pero nos acerca a un contexto de la química en el que los alumnos pueden ver la aplicación del método de inducción en otras áreas de la ciencia.
Significativa	Sí, ya que se inicia desde la intuición matemática y el conocimiento previo del método de inducción que le hemos presentado al alumnado en clase. Además, pueden encontrar una relación significativa y comprobar así la importancia y la relación que tienen las demostraciones matemáticas con otras ramas de la ciencia.

Como conclusión, consideramos que esta forma de presentar las demostraciones visuales puede ser una estrategia efectiva para fomentar la comprensión profunda de conceptos matemáticos, promover el razonamiento lógico y fortalecer el pensamiento crítico de los alumnos; así como desarrollar en los estudiantes la capacidad de construir sus propias demostraciones con el fin de validar conjeturas. Mediante la observación y manipulación de representaciones gráficas, diagramas y modelos visuales, tanto en papel como haciendo uso de software de geometría dinámica, los estudiantes podrán visualizar de manera concreta los principios y relaciones matemáticas subyacentes.

Entre las ventajas que supondría llevar a cabo esta propuesta didáctica en el aula podemos señalar el brindar a los alumnos las herramientas necesarias para abordar con confianza y autonomía los desafíos matemáticos que se presentan en su entorno académico y contribuir a la mejora de su capacidad de comunicación matemática, al permitirles expresar y defender sus ideas de manera clara y coherente, desarrollando así también, de forma intensiva, las competencias específicas relacionadas con comunicar y gestionar emociones. Como inconveniente, de acuerdo con el *National Council of Teachers of Mathemtics* (2003), las demostraciones no deberían tratarse en el aula como un contenido adicional relacionado con un bloque de contenidos específico. Estas deberían integrarse en la unidad didáctica o situación de aprendizaje de forma continuada y estar presentes en las discusiones en la clase. Por lo tanto, lo óptimo sería que todas estas tareas estuviesen integradas en las distintas unidades en las que se trabajan los respectivos bloques temáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P., Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia, 38*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Education Committee of the European Mathematical Society (2011). Do theorems admit exceptions? Solid findings in mathematics education on empirical proof schemes. *EMS Newsletter, 82*, 50-53.

Hanna, G. y De Villiers, M. (2011). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6

Martí, I. (2003). *Diccionario enciclopédico de educación.* Grupo Editorial Ceac.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza Thales de Educación matemática Thales.

Nelsen, R. (2001). *Demostraciones sin palabras.* Proyecto Sur.

Ramírez, R. (2016). Atención a la diversidad y matemáticas escolares. En Rico, L. y Moreno, A., *Elementos de la didáctica de las matemáticas para el profesor de secundaria* (pp 295-310). Pirámide.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 76 (2022).

Senk, S. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher*, *78*(6), 448-456.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. (2017a). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics,* 96, 119-127. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3

Stylianides, G. J,, Stylianides, A. J. (2017b). Research on the teaching of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.