Un problema de lugar geométrico que invita a descubrir y explicar propiedades mediadas por un software de geometría dinámica

María Susana Dal Maso

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral (Argentina), mariasusanadalmaso@gmail.com

Resumen: *Es todo un desafío proponer problemas geométricos donde el lápiz y el papel no resulten suficientes para modelizar la situación planteada. El uso de un software de geometría dinámica favorece la visualización y el diseño de conjeturas contribuyendo a la construcción del sentido de conceptos matemáticos. No se trata sólo de encontrar la solución del problema y asegurarse de que el lugar geométrico hallado sea una construcción que soporta el arrastre manteniendo las propiedades invariantes. El objetivo es mostrar que un software de geometría dinámica es esencial para el descubrimiento de la solución de dicho problema y que la actividad demostrativa no puede ser dejada de lado revelando los pasos que llevan a plantear algunas conjeturas, descartar aquellas propiedades que no llegan a buen puerto y posicionarse en aquellas que permiten transformar la conjetura en una certeza.*

Palabras clave: *Lugar geométrico, explicación, descubrimiento, propiedades geométricas, GeoGebra.*

A geometric place problem that invites you to discover and explain properties mediated by dynamic geometry software

Abstract: *It is a challenge to propose geometric problems where pencil and paper are not enough to model the situation. The use of dynamic geometry software favors the visualization and design of conjectures, contributing to the construction of the meaning of mathematical concepts. It is not just a matter of finding the solution to the problem and making sure that the locus found is a construction that maintains invariant properties under dragging. The objective is to show that a dynamic geometry software is essential for the discovery of the solution of that problem and that demonstration activity must not be left aside, by revealing the steps that lead to some conjectures, discarding properties that do not succeed, and position itself in those that allow transforming the conjecture into a certainty.*

Key words: *Geometric place, explanation, discovery, geometric properties, GeoGebra.*

1. INTRODUCCIÓN

Un concepto matemático está formado por tres componentes: uno la definición, otro su representación y un tercero, las propiedades asociadas al mismo. La construcción de los conceptos matemáticos y las relaciones entre sus componentes es siempre objeto de consideración en la actividad matemática.

Las relaciones existentes entre la definición y la representación de un concepto y, entre la producción y la validación de las propiedades se ven, muchas veces, influenciadas por el uso de tecnologías digitales.

Cómo citar: Dal Maso, M.S. (2023). Un problema de lugar geométrico que invita a descubrir y explicar propiedades mediadas por un software de geometría dinámica. *Epsilon, 115, 21-33.*

Novembre y Tedesco (2016) consideran que debe reflexionarse sobre el aporte sustancial que la incorporación de recursos digitales puede hacer al aprendizaje cuando entra en diálogo con las herramientas habituales (lápiz, papel, regla, compás, etc.). No se trata de plantear la prevalencia de una herramienta sobre otra sino qué aporta cada una a la otra para favorecer el aprendizaje, "de qué manera se pueden complementar, cómo acompaña una a la otra o cuál se muestra más adaptada para la construcción de un conocimiento determinado" (p. 1). En este sentido, su incorporación debe pensarse más allá del efecto novedoso que pueden producir en los alumnos, intentando "promover el desarrollo de prácticas tales como la anticipación, la elaboración de conjeturas, la exploración, el cuestionamiento de conocimientos anteriores, la explicación, la confirmación o modificación como resultado de un proceso que invitó a resolver un problema" (pp. 1-2).

Es por eso por lo que estudiar el modo en que estas tecnologías modifican la relación de estas actividades matemáticas es una tarea atrayente.

Como plantean Dal Maso y Götte (2014) es una tarea nada sencilla para el docente, buscar problemas donde el uso de un software de geometría dinámica sea indispensable para su resolución. En la actualidad todavía cuesta que se incorporen tecnologías digitales en el trabajo en la clase de matemática y, si se incorporan, muchas veces son usadas para resolver aquello que ya se resolvía con lápiz y papel.

> Es interesante trabajar problemas geométricos donde el lápiz y el papel no resulten suficientes para realizar conjeturas y buscar soluciones. Las representaciones gráficas cumplen un papel destacado en la interpretación de conceptos y propiedades geométricas y creemos que, en este sentido, es necesario fomentar el uso de software de geometría dinámica. (Dal Maso y Götte, 2014, p. 89)

El software que se utiliza en este trabajo es GeoGebra.

> …se caracteriza por la posibilidad de manipulación directa y continua de representaciones geométricas. Ello permite el diseño de ambientes de exploración y observación de muchos casos que, de otra manera, quedan reservados a personas con elevada capacidad de visualización. Este tipo de software permite diseñar actividades y ambientes que ayuden a los alumnos a estudiar situaciones matemáticas sin tener que hacer mucho énfasis en procesos mecánicos y de graficación que se le pueden dejar a la herramienta computacional (Larios Osorio y Pino-Fan, 2017, p. 4).

En este artículo se muestra un problema presente en el temario de unas olimpíadas universitarias de matemática. Llega a manos de la autora a través de una colega con quien comparte la pasión por la Geometría. La búsqueda de la solución representó un interesante desafío que se narra en estas líneas. Cabe aclarar que los conceptos y propiedades utilizados en el presente artículo pueden encontrarse en textos del nivel secundario y universitario.

En este trabajo se intenta ir más allá de lograr la solución de un problema, o de conjeturar propiedades, para validarlas o descartarlas. Inicialmente se trata de describir un proceso intuitivo, dejando al descubierto el razonamiento que guía la resolución y la demostración que, finalmente, se presenta como parte del resultado de dicho proceso.

El objetivo es mostrar que un software de geometría dinámica es esencial para el descubrimiento de la solución de dicho problema y que la actividad demostrativa no puede ser dejada de lado revelando los pasos que llevaron al autor a formular algunas conjeturas, descartar aquellas propiedades que no llevan a buen puerto y posicionarse en aquellas que permiten transformar la conjetura en una certeza.

2. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Laborde (1996) plantea que la figura geométrica queda definida como el conjunto de pares formado por dos elementos, el primero el referente (objeto de una teoría geométrica), el segundo uno de los dibujos que lo representa, y que se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente.

Por otra parte, Fischbein (1993) plantea la noción de concepto figural, y considera tres categorías de entidades mentales cuando se refiere a figuras geométricas: la definición, la imagen (basada tanto en la experiencia perceptiva-sensorial, como en la imagen de un dibujo) y el concepto figural. Una figura geométrica puede ser descrita como poseedora de propiedades intrínsecamente conceptuales, no obstante, no es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen, incluye la representación mental de la propiedad espacial.

Teniendo en cuenta los referentes teóricos mencionados se considera que un concepto matemático está formado por tres componentes: la definición, su representación y las propiedades asociadas al mismo.

Existen numerosos artículos que hacen referencia a trabajos de investigación que relacionan la tecnología con el modo de enseñar y aprender en el aula (Rojano, 2014), pero también es conocido que todavía hoy es un desafío para los docentes incluirlas en las tareas del currículo y resulta muchas veces trabajoso encontrar y proponer problemas donde el uso de un sistema de geometría dinámica (en adelante SGD) haga la diferencia.

Rojano (2014) subraya que luego de 30 años de investigación intensiva que evidencian las potencialidades didácticas de los entornos tecnológicos de aprendizaje subsiste un mínimo impacto en el currículo oficial e implementado en el aula de matemática. Sostiene que:

> Más allá de la posibilidad que ofrecen los entornos tecnológicos de aprendizaje de un acceso temprano a ideas poderosas en matemáticas, las potencialidades didácticas probadas de dichos entornos (tanto de naturaleza cognitiva como epistemológica) hicieron suponer que su influencia podría llegar a moldear un currículo de matemáticas completamente nuevo, así como a revolucionar las prácticas de aula. Sin embargo, esta posibilidad ha sido seriamente cuestionada a partir de los resultados de evaluaciones internacionales recientes y de estudios sobre el uso real de la tecnología por parte de los maestros, lo cual ha dado lugar a intensos debates en la comunidad internacional de matemáticos y educadores matemáticos (Rojano, 2014, p.12).

De Villiers (1993) destaca que la verificación es, generalmente, la principal función que se le brinda a la demostración en términos de convicción o justificación. Señala que en muchos casos los alumnos, en particular los de la escuela secundaria obligatoria, no encuentran la necesidad de demostrar una conjetura, y refuerzan esa idea si de un problema geométrico se trata donde en ocasiones las demostraciones son visualmente obvias.

Si nos trasladamos al nivel universitario, podemos preguntarnos si los estudiantes del profesorado en matemática demuestran porque sienten la necesidad de validar o porque simplemente es lo que se espera que hagan.

Cruz y Mántica (2019), en su investigación con alumnos universitarios, plantean un problema de construcción de un rombo considerando que uno de los vértices se encuentra en un plano determinado. Esperan que los alumnos puedan identificar que los tres vértices restantes, no necesariamente se encuentran en el mismo plano.

> Los estudiantes asumen el papel de un matemático en la resolución de la situación, dado que como afirma Schoenfeld (2001), controlan la situación con cuidado, siguen pistas interesantes y abandonan los caminos que parecen no conducir a la solución correcta de la tarea; realizan una revisión de lo solicitado por la consigna en varios momentos. (Cruz y Mántica, 2019, p. 128)

> Los estudiantes no manifiestan explícitamente la necesidad de escribir la conjetura con la rigurosidad de una propiedad o teorema matemático y validarla. Recurren a la profesora para que les confirme que deben llevar a cabo estas actividades propias del quehacer matemático a pesar de que habitualmente lo realizan por ser alumnos avanzados del Profesorado en Matemática (Cruz y Mántica, 2019, p. 130).

"Finalmente escriben de modo formal la conjetura establecida. Esto puede deberse a que en el desarrollo de la asignatura se escriben formalmente las conjeturas y demostraciones y este es un trabajo de evaluación" (Cruz y Mántica, 2019, p. 131).

Dal Maso y Hurani (2017) trabajaron con problemas de lugar geométrico con alumnos universitarios. Si bien el SGD utilizado por los alumnos permitió la formulación de conjeturas en función de la construcción realizada, los problemas involucrados en la actividad propuesta presentaron la necesidad de soportes teóricos para explicar y comunicar a la clase la solución hallada.

> En todos los casos, los estudiantes describen el lugar geométrico …, pero en ninguno de los casos presentan argumentos que validen dichos enunciados. Si bien los cambios implementados… permiten a los alumnos hallar el lugar geométrico solución del problema..., no genera la necesidad de demostrar. Creemos que el uso del software y de un conjunto de tareas adecuadas, facilita la visualización, pero convence al alumno de la solución sin verse involucrada la tarea demostrativa. La demostración como condición necesaria para validar su producción no surge espontáneamente, no se evidencia como una necesidad. Sólo aparece si es reclamado explícitamente por el docente (Dal Maso y Hurani, 2017, p. 1705).

De Villiers (1993) enumera cinco funciones de la demostración sin pretender enumerarlas en un orden específico de importancia:

> Verificación (concerniente a la verdad de una afirmación).
> Explicación (profundizando en por qué es verdad).
> Sistematización (la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas).
> Descubrimiento (el descubrimiento o invención de nuevos resultados).
> Comunicación (la transmisión del conocimiento matemático) (De Villiers, 1993, p. 18).

La creación de programas de computación dinámicos, que permiten observar si una determinada conjetura puede ser cierta o no, traslada el interés de utilizar demostraciones en la enseñanza hacia otras funciones distintas de la simple verificación.

Se citan las funciones de explicación y descubrimiento por entender que son las que se destacan en la resolución del problema que se desarrolla en este trabajo. La función explicación porque,

"Aunque es posible alcanzar un alto grado de confianza en la validación de una conjetura por verificación cuasi-empírica…, esto no proporciona generalmente una explicación satisfactoria de por qué puede ser cierto" (De Villiers, 1993, pp. 20-21). En este sentido la intención quizás no sea la de asegurarse que es correcto el lugar geométrico hallado como solución del problema sino de preguntarse por qué lo es. “Para el matemático profesional la demostración no es…un medio de verificación a posteriori, sino, a menudo y también, un método de exploración, análisis, descubrimiento e inventiva” (De Villiers, 1993, p. 25).

En el Profesorado en Matemática, carrera de grado de la Universidad Nacional de Litoral, el concepto de lugar geométrico forma parte del curriculum de la enseñanza de la geometría. La definición de lugar geométrico según Puig Adam (1980) destaca la doble implicación que conlleva dicho concepto. “Cuando una figura contiene todos los puntos que cumplen una determinada propiedad, y, recíprocamente, sólo contiene puntos que la cumplen, se dice que es el lugar geométrico de dichos puntos” (Puig Adam, 1980, p.37). Los problemas que involucran el concepto de lugar geométrico ofrecen la posibilidad de: explorar; establecer relaciones entre conceptos ya trabajados; en ocasiones, descubrir relaciones y propiedades; y fomentar la actividad demostrativa. Utilizar un SGD para la resolución de este tipo de problemas favorece la visualización.

> …en general, resulta difícil imaginar el lugar geométrico que describe un punto, una línea o cualquier otro objeto geométrico cuando se mueve dentro de una configuración. El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triángulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración y como consecuencia ofrece la oportunidad al estudiante de analizar y describir tal lugar geométrico en término de propiedades. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Esto les permite realizar constantes exploraciones y probar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica (Santos Trigo, 2011, pp. 38-39).

Según Villarreal (2012), la producción de conocimiento se ve condicionada por la utilización de diversas tecnologías destacando que los medios utilizados transforman las prácticas, los contenidos y las formas de conocer. “…ese medio es constitutivo del conocimiento, de suerte que si estuviera ausente el conocimiento construido sería otro” (Villarreal, 2012, p. 79).

3. ABANICO DE CONCEPTOS QUE SE PONEN EN JUEGO EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Enunciado original del problema: *Sean A, Q y B puntos alineados en el plano, con Q estrictamente entre A y B, distinto del punto medio de A y B. Sea H la rama de la hipérbola, con focos A y B, que pasa por Q. Determinar el lugar geométrico de los incentros de los triángulos PAB al variar el punto P sobre la hipérbola - {Q}.*
Nota: el incentro de un triángulo es el centro del círculo inscripto.

Es interesante pensar la definición de la hipérbola como lugar geométrico.

> La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos, los focos, es igual a una constante (positiva), que equivale a la distancia entre los vértices (Rodríguez Marín, 2014, p. 18).

Se considera que desde el punto de vista conceptual es apropiado utilizar el término circunferencia en lugar de círculo. En un primer momento se pensó que quizás, buscando en propiedades de lugares geométricos conocidos, se encontraría la respuesta. Se recordó entonces dos lugares geométricos que se demuestran a partir de la generalización del teorema de Pitágoras. Se enuncian dichos lugares geométricos:

"El lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos del mismo *A*, *B* es constante, es una circunferencia de centro en el punto medio de *AB*" (Puig Adam, 1980, p. 132).

"El lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de cuadrados de distancia a dos puntos fijos del mismo *A*, *B* es una cantidad constante, es una recta perpendicular a *AB*" (Puig Adam, 1980, p. 132).

El segundo lugar geométrico se presentaba atractivo considerando que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a los focos es contante e igual a la distancia entre los vértices. Sea *P* un punto cualquiera de la hipérbola y *A* y *B* los focos, si *2a* es la distancia entre los vértices se tiene:

$$|PA - PB| = 2a$$

Elevando miembro al miembro al cuadrado:

$$(PA - PB)^2 = 4a^2$$

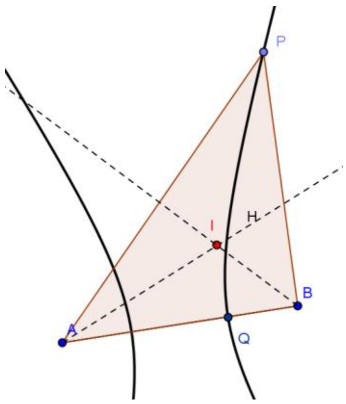
Y desarrollando la expresión se obtiene una suma de cuadrados

$$PA^2 + PB^2 = 4a^2 + 2 \times PA \times PB$$

Y al no ser constante el producto $PA \times PB$ (dado que *P* es un punto que se mueve sobre la hipérbola) tampoco se encuentra la respuesta en el primer lugar geométrico.

Es así como se considera interesante hacer uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como el software GeoGebra para la identificación del lugar geométrico en cuestión. Utilizando las herramientas del software se construye la hipérbola de focos *A* y *B* que pasa por el punto *Q*. A dicha rama se la denomina *H* y el punto *P* sobre objeto *H* es vértice de los triángulos *APB*. El punto *I*, incentro, es punto intersección de las bisectrices de los ángulos interiores de los triángulos *APB* (Figura 1).

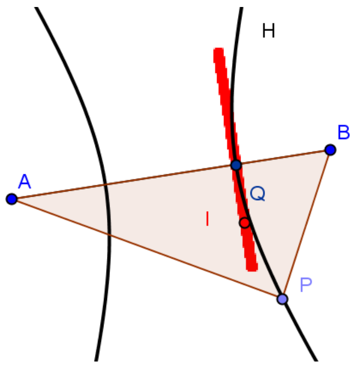
Figura 1
Hipérbola de focos A y B que pasa por Q



Con el comando activar rastro sobre el punto *I*, y moviendo el punto *P* sobre objeto *H*, el lugar geométrico descripto es una recta perpendicular al segmento *AB* por *Q* (Figura 2).

Figura 2

El lugar geométrico cuando se mueve P en H es una recta perpendicular a AB por Q



Ahora bien, se ha logrado la visualización del lugar geométrico, ¿pero se ha determinado el lugar geométrico? Según la Real Academia Española (RAE) determinar significa, entre otros, fijar los términos de algo; distinguir, discernir; tomar resolución; señalar o indicar algo con claridad y exactitud; ser causa de que algo ocurra. Visto así, quizás preguntas como ¿todos los puntos I están alineados?, ¿la recta es perpendicular al segmento *AB*?, ¿*Q* pertenece a dicha recta?, ¿qué conceptos matemáticos permiten esta afirmación?, necesitan una respuesta.

Desde el punto de vista matemático, y a partir de las funciones de la demostración de De Villiers (1993) se intentará explicar la necesidad de demostrar la propiedad que verifican los puntos del lugar geométrico hallado dando respuesta a las preguntas anteriormente formuladas.

Recordando el proceso que llevó al autor a arribar a la demostración elegida como satisfactoria para dar respuesta al problema, resulta interesante comentar algunos pasos en este proceso con la intención de poner de manifiesto que es propio de la actividad matemática formular conjeturas, considerar propiedades que permitan validarlas, descartar aquellas propiedades que no llevan a buen puerto y posicionarse en aquellas que permiten transformar la conjetura en una certeza.

La conjetura, el lugar geométrico que cumple con las condiciones del problema es una recta perpendicular a la recta *AB* por el punto *Q*, puso en marcha la búsqueda de propiedades que involucren a la perpendicularidad de dichas rectas. El uso del SGD potencia la visualización del lugar geométrico y permite indagar acerca de las acciones de conjeturar.

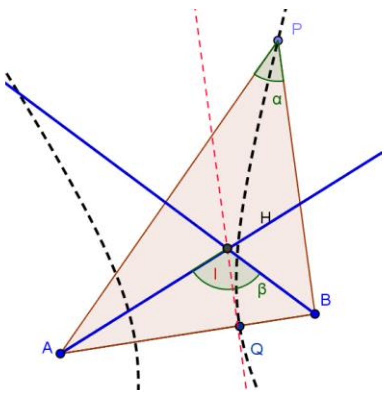
La definición de lugar geométrico involucra una doble implicación: una que los puntos que cumplen las condiciones del problema es una recta perpendicular a la recta *AB* por *Q*; y la otra, que todo punto de una recta perpendicular a un segmento *AB* donde su punto intersección *Q* es distinto del punto medio de dicho segmento, es incentro de un triángulo de lado *AB* donde el tercer vértice pertenece a una rama de una hipérbola que pasa por *Q*. En este artículo se trabajará sobre la primera implicación dado que la intención del autor es mostrar que un software de geometría dinámica es esencial para el descubrimiento de la solución de dicho problema.

Para ello se pensó primero en el ángulo que forman las bisectrices interiores de un triángulo cualquiera.

Considerando las bisectrices correspondientes a los ángulos interiores del triángulo *APB*, se demuestra de manera sencilla que el ángulo β (ángulo *AIB*) es igual a la mitad del ángulo α (ángulo *APB*) más un recto. Basta trabajar con los ángulos interiores de los triángulos *APB* y *AIB*, plantear dos ecuaciones donde la suma de los ángulos interiores de cada triángulo considerado es igual a dos rectos y resolver para arribar a que el ángulo *AIB* (ángulo β) es igual al ángulo $\frac{\propto}{2}$ más uno recto.

A pesar de contar con el ángulo recto el autor no encontró argumentos para aseverar la perpendicularidad de las rectas *AB* y *QI* (Figura 3).

Figura 3
β = ½ α + 90°

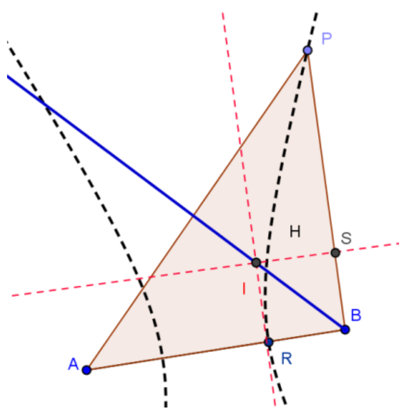


Desechando esta idea, pero siempre rondando el concepto de perpendicularidad es que se centra, el autor, en el incentro y en la propiedad de su equidistancia a los lados del triángulo. Y acá va otro intento por probar el lugar geométrico.

Se considera apropiado a esta instancia del trabajo aclarar que conceptos y propiedades utilizadas tales como incentro, propiedad de equidistancia a los lados de un triángulo, la perpendicularidad de rectas homólogas en un movimiento de rectas perpendiculares, concepto de base media de un triángulo, y demás propiedades y conceptos presentes en este artículo pueden encontrarse en textos del nivel secundario y universitario. De hecho, Puig Adam referido en la bibliografía, es autor de un texto riguroso donde el lector encontrará conceptos y propiedades aquí esgrimidos.

Sea la recta *IS* (Figura 4) perpendicular al lado *PB* por el punto *I* siendo *S* el pie de la perpendicular. La bisectriz *BI* del ángulo *PBA*, *BI* es eje de simetría. Como *S* pertenece al lado *PB*, su simétrico respecto de la bisectriz *BI* pertenece al lado *BA*. Sea *R* el homólogo de *S* en dicho movimiento. El transformado de *IS* en dicho movimiento es *IR* siendo *I* punto doble por pertenecer al eje de simetría.

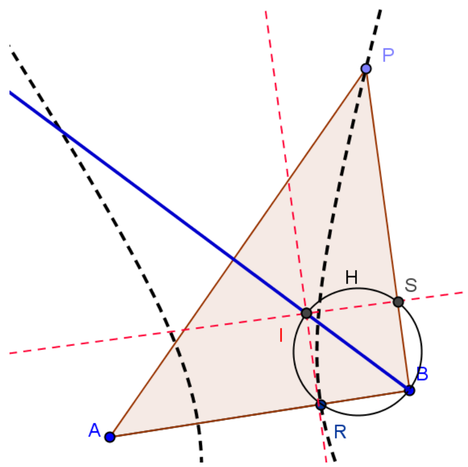
Figura 4
Pies de las perpendiculares por I



Como las homólogas de rectas perpendiculares también lo son, *IR* es perpendicular al lado *AB*. Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una perpendicular a dicha recta, así *IR* es única. Para poder concluir que se demuestra el lugar geométrico del problema, se debe probar que *R* coincide con *Q*, tarea que no se percibía sencilla.

Una vez más mediada la mirada sobre el problema a través del software, se centra la atención en los cuatro puntos *I*, *S*, *B* y *R*. Como estos cuatro puntos son vértices de un cuadrilátero donde *IR* perpendicular a *AB* e *IS* perpendicular a *BP*, los ángulos opuestos de dicho cuadrilátero suman dos rectos, luego puede inscribirse en una circunferencia (Figura 5).

Figura 5
Circunferencia por cuatro puntos: B, S, I y R.



Esta idea abre una nueva puerta para pensar en que, si se logra encontrar otra circunferencia secante a ésta en los puntos *I* y *Q* del problema original, la recta *IQ* sería el eje radical logrando arribar quizás a la respuesta buscada.

Se presenta la demostración de la proposición, resolución del problema inicial: Sean *A*, *Q* y *B* puntos alineados en el plano, con *Q* estrictamente entre *A* y *B*, distinto del punto medio de *A* y B; y H la rama de la hipérbola, con focos A y B, que pasa por Q. El lugar geométrico de los incentros de los triángulos *PAB* al variar el punto *P* sobre la hipérbola tal que *P* distinto de *Q*, es una recta perpendicular a la recta *AB* por el punto *Q*. (Figura 6).

Sea *P* un punto sobre la rama *H* de la hipérbola; los puntos *A*, *B* y *Q* fijos e *I* el incentro del triángulo *APB*.

Tres puntos no alineados determinan una circunferencia. Sea C_1la circunferencia que pasa por los puntos *B*, *I* y *Q*. Sea C_2, la circunferencia que pasa por los puntos *A*, *I*, y *Q* . C_1 y C_2 se intersecan en *I* y en *Q*, *luego* la recta *IQ* es eje radical de dichas circunferencias.

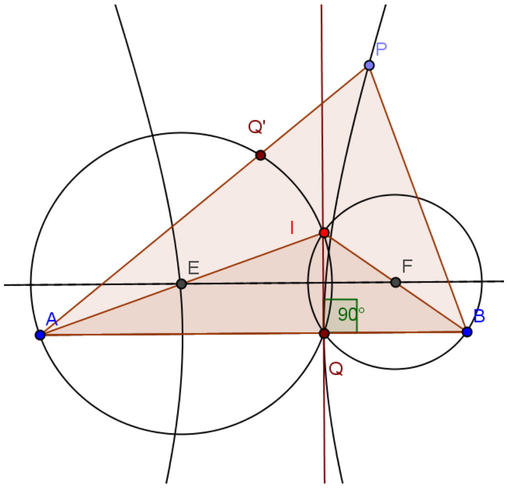
Se prueba primero que *AI* es diámetro de C_2 y que *BI* es diámetro de C_1.

Como la recta *AI* es bisectriz del ángulo *PAB* (por ser *I* incentro del triángulo *PAB)*, es eje de simetría de los lados de dicho ángulo. Como *Q* es punto intersección de C_2con el segmento *AB*, su simétrico respecto de *AI* (*Q'*) será punto intersección de C_2 con el lado *AP* pues todo movimiento isométrico del plano conserva el orden y la incidencia. Así, dado que todo diámetro es eje de simetría de la circunferencia, *AI* diámetro de la circunferencia C_2 denominando con *E* al punto medio de *AI*, centro de C_2.

De manera análoga se puede probar que *BI* es diámetro de C_1 denominando con *F* al punto medio de *BI*, centro de C_1.

Figura 6

Construcción para visualizar la demostración



Se probará que la recta *IQ* es perpendicular al segmento *AB* por *Q*.

Como la recta *IQ* es eje radical de las circunferencias C_1 y C_2, *IQ* es perpendicular a la recta que une los centros *E* y *F*, por propiedad del eje radical. Como *E* y *F* son puntos medios de *AI* y *BI* respectivamente, el segmento *EF* es base media del triángulo *AIB*, siendo *EF* paralelo a *AB*. Como una recta perpendicular a otra lo es a todas sus paralelas se tiene que la recta *IQ* es perpendicular al segmento *AB* por *Q*.

Se ha demostrado el lugar geométrico solución del problema. Esta demostración cumple con dos funciones de la demostración según De Villiers (1993): la función explicación y la función descubrimiento.

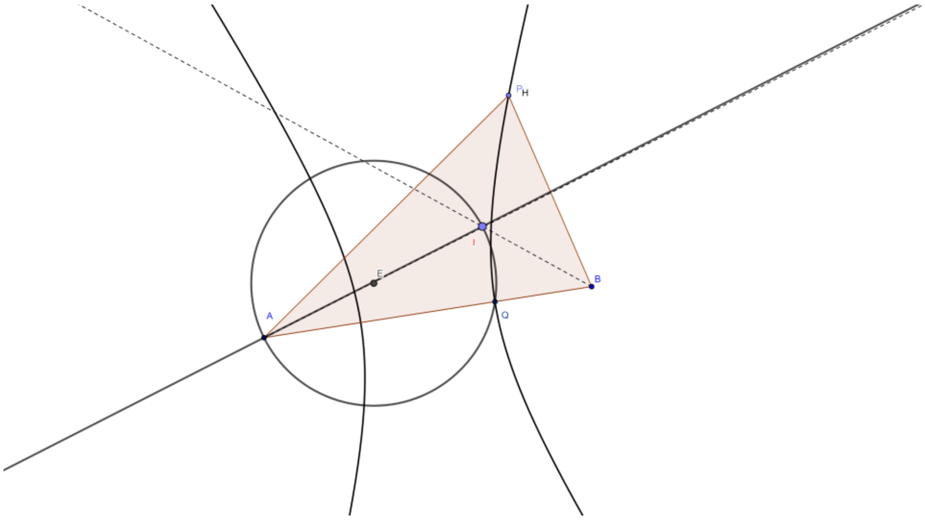
La función explicación ya que esta argumentación permite responder a las preguntas antes formuladas y profundizar en por qué es verdad. Se recuerdan las preguntas: ¿todos los puntos *I* están alineados?, ¿la recta es perpendicular al segmento *AB*?, ¿*Q* pertenece a dicha recta?, ¿qué conceptos matemáticos permiten esta afirmación? Todas ellas contestadas en la demostración al probar que todos los incentros de los distintos triángulos *APB* pertenecen a una recta perpendicular al segmento *AB* por el punto *Q*.

La función descubrimiento ya que permite revelar una propiedad recíproca: si una recta es eje de simetría de una circunferencia entonces es recta diametral de dicha circunferencia. La propiedad que se utiliza en geometría es todo diámetro de una circunferencia es eje de simetría de la misma.

Se demuestra la propiedad recíproca por reducción al absurdo y para su ilustración se toma la Figura 7. Para demostrar una proposición por reducción al absurdo se supone falsa la conclusión, se utiliza la hipótesis y se arriba a alguna contradicción de otra proposición, axioma, definición o postulado.

Se enuncia la proposición utilizada en la demostración y que se demuestra a continuación: si la recta *AI* es eje de simetría de una circunferencia entonces *AI* es recta diametral de dicha circunferencia.

Figura 7
Recta AI eje de simetría de la circunferencia



Sea *AI* eje de simetría de la circunferencia. Se niega la conclusión suponiendo *AI* distinto de un diámetro de la circunferencia, luego *AI* no pasa por el centro *E* de dicha circunferencia. Así el homólogo del punto *E* por la simetría axial de eje *AI* es el punto *E’* distinto de *E* ya que los únicos puntos dobles en dicho movimiento son los puntos del eje. Como el punto *E* equidista de todos los puntos de la circunferencia por ser su centro, por axioma de incidencia y orden, el punto *E’* equidista de todos los puntos de dicha circunferencia siendo *E’* centro de la circunferencia teniendo la circunferencia dos centros distintos.

Absurdo dado que la circunferencia tiene un único centro. El absurdo provino de suponer que *AI* no es una recta diametral, luego *AI* es una recta diametral y el segmento *AI* es diámetro de dicha circunferencia.

Cuando se realiza una demostración, se utilizan muchas veces propiedades que abren puertas para nuevas validaciones y disponer qué propiedades demostrar y cuáles tomarlas como válidas y no probarlas, es una decisión que hay que tomar. Es conocida la afirmación sobre la unicidad del centro de la circunferencia. Pero si se abre el abanico, se puede probar que el centro de una circunferencia es único.

Tres puntos no alineados determinan una circunferencia, sean dichos puntos P_1, P_2 y P_3. Se considera la cuerda P_1P_2 y la cuerda P_2P_3 Si las mediatrices de esas cuerdas se cortan en dos puntos distintos, *E* y *E’*, ambas cuerdas tienen la misma mediatriz *EE’* lo cual es absurdo pues las únicas cuerdas que tienen la misma mediatriz son las cuerdas paralelas y las cuerdas P_1P_2 y P_2P_3 no lo son.

4. A MODO DE CONCLUSIÓN

En la propuesta el autor pretende mostrar que la producción de conocimiento se ve condicionada por la utilización de un software de geometría dinámica. Villarreal (2012), destaca que los medios utilizados transforman las prácticas, los contenidos y las formas de conocer. Las nuevas tecnologías no aparecen ejerciendo un papel de suplementación sino de reorganización al incorporarlas a la clase de matemática.

Se acuerda con Santos Trigo (2011) que la posibilidad de realizar variaciones precisas e instantáneas de la propia representación favorece la exploración comprobando de forma visual conjeturas y propiedades de manera eficiente y dinámica.

La producción mediada por GeoGebra reorganiza la tarea generando conocimientos matemáticos al considerar propiedades recíprocas de las ya conocidas.

Volvamos sobre el lugar geométrico planteado al principio de este artículo que se desprende de la generalización del Teorema de Pitágoras para triángulos oblicuángulos. Si en vez de considerar los triángulos *APB* donde *A* y B son puntos fijos y *P* un punto variable de la hipérbola, se considera los triángulos *AIB* siendo *I* los incentros de los triángulos *APB*, es sencillamente comprobable de manera visual y empírica, utilizando GeoGebra, que la diferencia de los cuadrados de la cantidad de longitud entre *IA* e *IB* es constante verificándose que “el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de cuadrados de distancia a dos puntos fijos del mismo *A*, *B* es una cantidad constante, es una recta perpendicular a *AB*” (Puig Adam, 1980, p. 132).

Pero quizás estén de acuerdo con el autor que más allá de ser necesario conocer esta propiedad de lugar geométrico para poder aplicarla, y que todavía se pueden preguntar el porqué de la pertenencia de *Q* a dicha perpendicular, el camino recorrido hasta aquí permite destacar dos funciones importantes de la demostración: la de explicación y la de descubrimiento. Se los invita a leer a De Villiers (1993) citado en este artículo que a pesar del paso de los años sus comentarios están más que vigentes y llevan al autor de este artículo a repensar las prácticas en la formación de profesores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cruz, M. y Mántica, A. (2019). La puesta en juego de actividades propias del quehacer matemático mediadas por el empleo de un software de geometría dinámica. *Epsilon, 101*, 121-136.

Dal Maso, M.S. y Götte, M. (2014). Hilvanando la circunferencia intermedia entre la inscripta y la circunscripta. En G. Astudillo, P. Willging y N. Ferreyra (Eds.), *V Reunión Pampeana de Educación Matemática: Memorias* (pp. 82-89). EdUNLPam. https://docplayer.es/33756886-Issn-en-linea-vol-5-agosto-2014-la-pampa-argentina-memorias.html

Dal Maso, M.S. y Hurani, C. (2017). GeoGebra en el planteo de conjeturas en problemas de lugar geométrico. En V. Baraldi, N. Díaz y M. Perticará (Comps.), *VIII Encuentro Nacional y Latinoamericano: la universidad como objeto de investigación: publicación de trabajos* (pp. 1695-1707). EdicionesUNL. http://www.fhuc.unl.edu.ar/media/investigacion/publicaciones/VARIOS/u17_ebook_parte%202.pdf

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-30.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 139 – 162.

Laborde, C. (1996). Cabrí-Geómetre o una nueva relación con la geometría. En L. Puig y J. Calderón, (Eds.), *Investigación y didáctica de las matemáticas* (pp. 67-85). MEC-CIDE.

Larios Osorio, V. y Pino-Fan, L. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 39-57.

Novembre, A. y Tedesco G. (2016). *Aportes para pensar la enseñanza de la matemática con TIC*.https://www.academia.edu/29941746/Aportes_para_pensar_la_ense%C3%B1a%20nza_de_la_matem%C3%A1tica_con_TIC

Puig Adam, P. (1980). *Curso de geometría métrica*. Euler.

Rodríguez Marín, M. (2014). *Problemas sobre geometría. Relaciones métricas en la circunferencia. Lugares geométricos* [Trabajo Fin de Máster]. https://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2014/Geometria1.pdf

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo Educación Matemática. *Educación matemática*, *26*, 11-30.

Santos Trigo, L. (2011). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *6* (8), 35-54.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para su enseñanza. Innovación y experiencias. *Virtualidad Educación y Ciencia*, *3* (5), 73-94.