

Matemáticas y patrimonio: un estudio del número de plata

David Crespo Casteleiro

IES Aurantia, Benahadux, Almería, España, davidcasteleiro@hotmail.com

Resumen: *La presencia de las Matemáticas en nuestro entorno es una ocasión adicional para aproximar la disciplina al alumnado, desde puntos de vista próximos, y a la misma vez ensalzar el rico valor patrimonial que nos rodea. Este artículo se centra en la obtención del número de plata mediante diversas técnicas geométricas, tomando como punto de partida uno de los bastiones o torres de la catedral de Almería.*

Palabras clave: *Geometría, número de plata, proporciones, semejanza, trigonometría.*

Mathematics and patrimony: a study of the silver number

Abstract: *The presence of Maths in our environment is an additional opportunity to familiarize students with the discipline, from points of view that are familiar to them, and at the same time to highlight the importance of the rich assets surrounding us. This article focuses on obtaining the silver number by means of different geometrical techniques, taking as a starting point one of the bastions or towers of the cathedral of Almeria.*

Key words: *Geometry, silver number, proportions, similarity, trigonometry.*

1. JUSTIFICACIÓN

Las últimas leyes educativas (desde LOE 2/2006, de 3 de mayo, hasta la actual LOMLOE 3/2020, de 29 de diciembre) han puesto el foco de atención en la necesidad de formar alumnos y alumnas que alcancen unas destrezas, expresadas en términos de competencias, permitiéndoles desarrollarse de manera integral en la vida adulta. Para ello, conscientes de que los ritmos de aprendizaje son tan distintos como los individuos, se han promovido estrategias metodológicas que en la actualidad parten de las situaciones de aprendizaje, entendidas como centros de interés del alumnado, tratando de captar su atención y motivar su formación. Y el patrimonio histórico reflejado en monumentos, constituye una ocasión para visibilizar las Matemáticas y acercarlas al alumnado, tanto para generar nuevo conocimiento como para contextualizarlas.

Una de las mayores dificultades a la que nos enfrentamos los docentes, es conseguir que el proceso de enseñanza y aprendizaje se lleve a cabo de manera satisfactoria. Pero con frecuencia observamos que el alumnado, y especialmente en la resolución de problemas, no ha conseguido entender el argumento que exponemos para encontrar la solución, por lo que disponer de estrategias diversas, con una dificultad graduada de complejidad, supone un verdadero aliciente para el profesorado.

De forma recíproca, tener en nuestras manos un mismo problema que pueda ser abordado con técnicas distintas, y por lo tanto resuelto desde los primeros cursos de la Secundaria hasta con herramientas más sofisticadas en Bachillerato, permite testar cómo la capacidad madurativa

varía, poniendo de relieve la potencia de los distintos instrumentos matemáticos, toda vez que se puede ir simplificando la resolución del problema.

2. CONTEXTUALIZACIÓN

La catedral de Almería es un monumento con pocos parecidos exteriores a la mayoría de las seos que salpican la Península Ibérica, pues atesora la doble función de ser catedral y fortaleza. La unificación territorial llevada a cabo por los Reyes Católicos, suponía por añadidura la hegemonía de la religión católica como el único culto tolerado. Aunque las diversas capitulaciones firmadas al anexionarse los territorios del Reino nazarí de Granada permitían a sus habitantes proseguir con sus costumbres y respetaban su religión, en la práctica, esta idílica situación se defenestró a los pocos años.

La Almería de finales del s. XV y principios del XVI, sufrió diferentes terremotos que asolaron la ciudad y, en particular, la mezquita mayor que se había convertido en una incipiente catedral. La necesidad de erigir templos en los que se pudiera llevar a cabo el oficio religioso era acuciante. Ser además una provincia con una amplia extensión de costa, permitía que los piratas berberiscos realizaran incursiones, ávidos de botín y espoleados por los habitantes del Reino de Granada que se habían exiliado al norte de África, con funestas consecuencias para la población y sus haciendas (Rodríguez et al., 1975, p.3-5).

Así, el 4 de octubre de 1524 tenía lugar el solemne acto de colocación de la primera piedra de la catedral fortaleza, auspiciada por el obispo fray Diego Fernández de Villalán, que se erigiría en un estilo gótico tardío, y dará paso en las portadas al renacentista (Navacués y Sarthou, 1998, p. 19). Como posición avanzada respecto de la Alcazaba, la rudeza militar impregna los flancos este, oeste y sur, desde donde con mayor probabilidad podrían tener lugar los ataques a la ciudad provenientes del mar.

Al este, como suele ser común en los templos y siguiendo las recomendaciones del arquitecto e ingeniero romano Vitrubio, se ubicará el altar mayor precedido de tres capillas con girola (Vitruvio, 1997, p. 107). La central, dedicada al Cristo de la Escucha, sirve también como alojamiento eterno de los restos del impulsor de la obra, Villalán, en un marmóreo sepulcro. Desde el exterior, la torre tiene planta cuadrangular, pero al alzarse, sus lados se duplican tendiendo a ochavarse. Con un patrón idéntico, los baluartes que ocupan los vértices del lienzo sur de la muralla, tienen la misma distribución, como puede observarse en la Figura 1.

Figura 1

Torre que ocupa el vértice sureste del conjunto.



El objeto del presente artículo, será poner de manifiesto la relación existente entre el lado del cuadrado (L) y del octógono regular (l) inscrito en el mismo, que viene dado por el número de plata $\delta = 1 + \sqrt{2}$. Esto es:

$$L = \delta \cdot l$$

3. OBJETIVOS

El interés para una mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje viene marcado por la consecución de unos logros, entre los que podemos destacar:

- Contextualizar en el patrimonio histórico aspectos matemáticos.
- Visualizar los números irracionales y la aritmética de los radicales.
- Fomentar la semejanza y el cálculo de áreas como herramientas básicas de cálculo.
- Potenciar el uso del teorema de Pitágoras.
- Establecer sinergias entre la Geometría y el Álgebra.
- Dar valor a la trigonometría como herramienta versátil al resolver problemas geométricos.
- Emplear medios tecnológicos, como GeoGebra, para ilustrar las situaciones problemáticas y hacer comprobaciones.

Para ello, se presentarán ocho demostraciones diferentes de la relación $L = \delta \cdot l$, recurriendo a técnicas geométricas que involucran elementales resultados como el teorema de Pitágoras y el cálculo de áreas, la construcción del octógono por corte sagrado, pasando por la semejanza de triángulos, herramientas de trigonometría o una combinación de estas y el teorema de la bisectriz, que es a su vez consecuencia directa del teorema de los senos.

Aliados de la potencia del lenguaje algebraico y la resolución de ecuaciones de segundo grado, junto con el trabajo con radicales, podemos llevar a término las demostraciones siguientes.

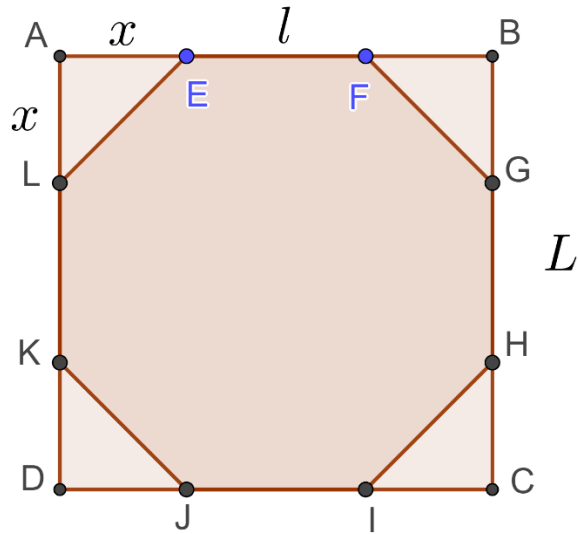
4. RESULTADOS

Para aligerar la notación, si P_1, P_2, \dots, P_n son los vértices consecutivos de un polígono de n lados, denotaremos por $S_{P_1 P_2 \dots P_n}$ al valor de su área. De manera adicional, y con el mismo leitmotiv que permita simplificar la escritura, sea $ABCD$ un cuadrado donde hemos inscrito un octógono regular $EFGHIJKL$.

Es conocido que la medida de cada uno de los ángulos interiores del polígono regular de n lados viene dada por la expresión $\alpha_n = \frac{180(n-2)}{n}$, de donde los ángulos interiores de un octógono regular medirán $\alpha_8 = 135^\circ$ y por lo tanto sus suplementarios 45° .

Al observar la Figura 2, acabamos de demostrar que el triángulo rectángulo AEL es además isósceles, donde por añadidura hemos empleado la notación $\overline{AE} = \overline{AL} = x$, $\overline{LE} = \overline{EF} = l$ y $\overline{AB} = \overline{BC} = L$.

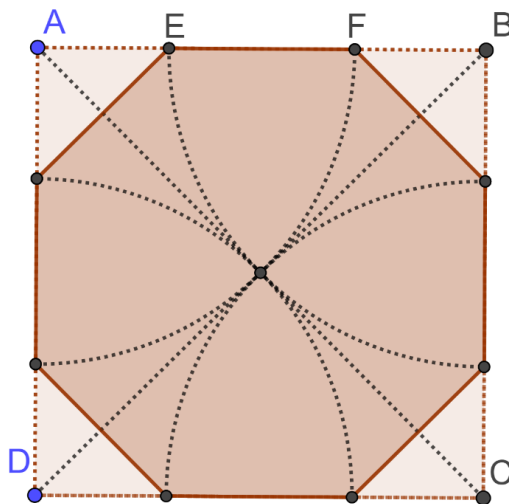
Figura 2
Notación.



4.1. Construcción del octógono por *corte sagrado*.

Considerando la mitad de la diagonal del cuadrado de lado L , del teorema de Pitágoras se desprende que su valor es $\frac{\sqrt{2}}{2}L$. Usando esta medida como radio, podemos trazar desde A y B sendos cuadrantes de circunferencia que cortan al lado \overline{AB} en los puntos F y E , respectivamente, de donde $\overline{AF} = \overline{EB} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$ como muestra la Figura 3.

Figura 3
Corte sagrado.



$$\text{Luego } \overline{AE} = \overline{FB} = L - \frac{\sqrt{2}}{2}L = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}L.$$

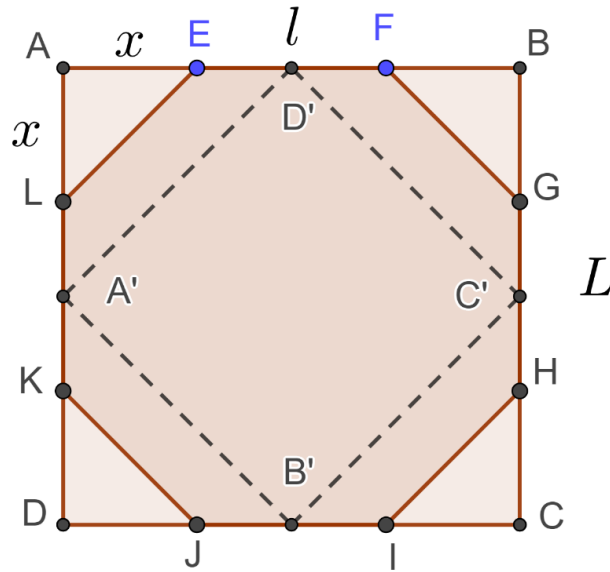
$$\begin{aligned} \text{Pero } L &= \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FB} \Rightarrow L = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}L + l + \frac{(2-\sqrt{2})}{2}L \Rightarrow L - (2-\sqrt{2})L = l \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt{2}-1)L = l \Rightarrow L = \frac{l}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow L = (1+\sqrt{2})l \Rightarrow L = \delta \cdot l \end{aligned}$$

4.2. Comparando áreas (primera descomposición).

Consideremos el cuadrado $ABCD$ que refleja la Figura 4 y obtengamos los puntos medios de sus lados, que notamos por las letras D', C', B' y A' . Evidentemente el polígono $A'B'C'D'$ es un cuadrado, ya que los triángulos $AD'A', D'BC', C'CB'$ y $A'B'D$ son rectángulos isósceles iguales, pues comparten sus catetos cuya medida es $\frac{L}{2} = x + \frac{l}{2}$.

Figura 4

Segunda demostración.



Al aplicar sucesivamente el teorema de Pitágoras en los triángulos AEL y $AD'A'$, podremos obtener el cateto del primero y la hipotenusa del segundo. En efecto:

$$2x^2 = l^2 \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

$$\left(\overline{A'D'}\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{A'D'} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Comparando las áreas de las figuras en las que hemos descompuesto el cuadrado, claramente se observa la igualdad:

$$\mathcal{S}_{ABCD} = 4\mathcal{S}_{AD'A'} + \mathcal{S}_{A'B'C'D'}$$

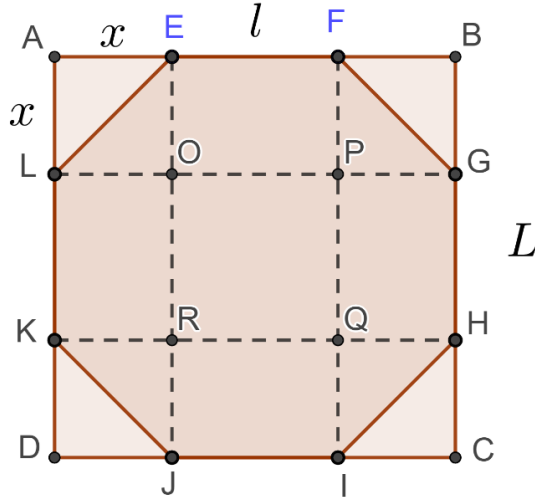
De donde:

$$\begin{aligned} L^2 &= 4 \frac{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2}{2} + \left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow L^2 = 2 \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{L^2}{2} \Rightarrow \frac{L^2}{2} = \left[\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l + \frac{l}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(l + \frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 \Rightarrow \frac{L}{\sqrt{2}} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l \Rightarrow L = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l \Rightarrow \\ &\Rightarrow L = (1 + \sqrt{2})l \Rightarrow L = \delta \cdot l \end{aligned}$$

4.3. Comparando áreas (segunda descomposición).

Figura 5

Tercera demostración.



Trazando cuatro de las diagonales del octógono, paralelas dos a dos, observamos que el cuadrado ABCD se descompone en cuatro cuadrados iguales al AEOL, el cuadrado OPQR ocupando la posición central, y otros cuatro rectángulos también iguales al EFPO (véase la Figura 5). Esto es:

$$S_{ABCD} = 4S_{AEOL} + S_{OPQR} + 4S_{EFPO}$$

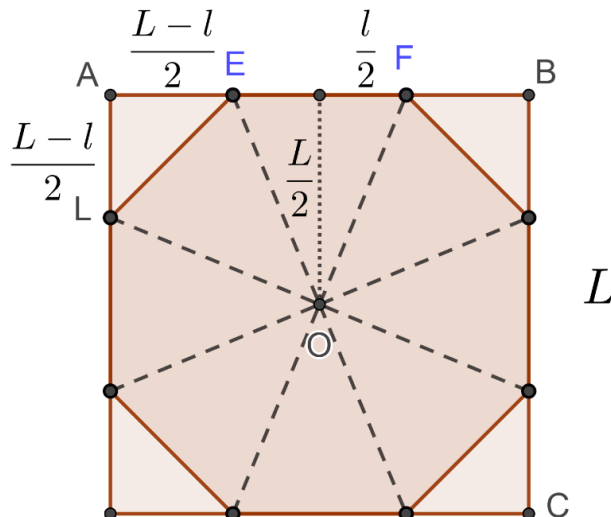
Teniendo en cuenta que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}l$, la igualdad anterior se traduce en:

$$\begin{aligned} L^2 &= 4x^2 + l^2 + 4lx \Rightarrow L^2 = 2l^2 + l^2 + 4l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}l \Rightarrow L^2 = (3 + 2\sqrt{2})l^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow L^2 = (1 + \sqrt{2})^2 l^2 \Rightarrow L = (1 + \sqrt{2})l \Rightarrow L = \delta \cdot l \end{aligned}$$

4.4. Comparando áreas (tercera descomposición).

Figura 6

Cuarta demostración.



Teniendo en cuenta la Figura 6, sea O el centro de la circunferencia circunscrita al octógono. El triángulo EFO es isósceles, ya que los segmentos $\overline{EO} = \overline{FO}$ son radios de la circunferencia, de donde la altura trazada desde O y de medida $\frac{l}{2}$, divide al lado \overline{EF} en dos partes iguales cuya longitud es $\frac{l}{2}$, la mitad del lado del octógono.

Claramente $\overline{AE} = \overline{AL} = \frac{L-l}{2}$ y como $S_{ABCD} = 4S_{AEL} + 8S_{EFO}$:

$$L^2 = 4 \frac{\left(\frac{L-l}{2}\right)^2}{2} + 8 \frac{l \cdot \frac{l}{2}}{2} \Rightarrow L^2 = \frac{(L-l)^2}{2} + 2Ll \Rightarrow 2L^2 = (L-l)^2 + 4Ll \Rightarrow \\ \Rightarrow L^2 - 2Ll - l^2 = 0$$

Dividiendo por l^2 la ecuación anterior y realizando el cambio de variable $\frac{L}{l} = t$, esta se transforma en:

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

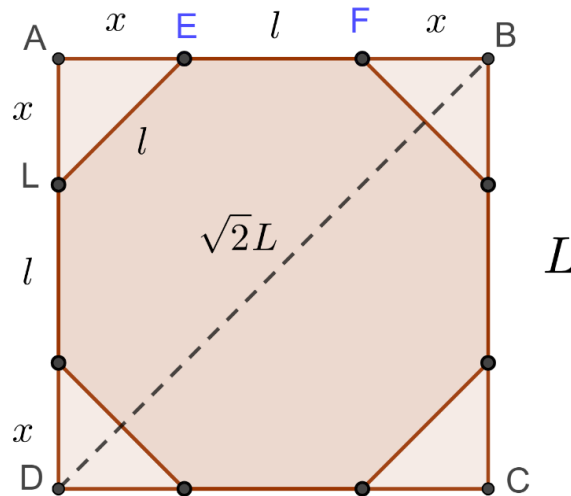
cuya solución positiva es

$$t = \frac{L}{l} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

4.5. Empleando triángulos semejantes (primera descomposición).

Figura 7

Quinta demostración.



Con la notación habitual que aparece en la Figura 7, y la condición $L = 2x + l$, al cuadrado de partida le hemos trazado una de sus diagonales. Claramente del teorema de Pitágoras se deduce que tanto $x = \frac{l}{\sqrt{2}}$ como que $\overline{BD} = \sqrt{2}L$.

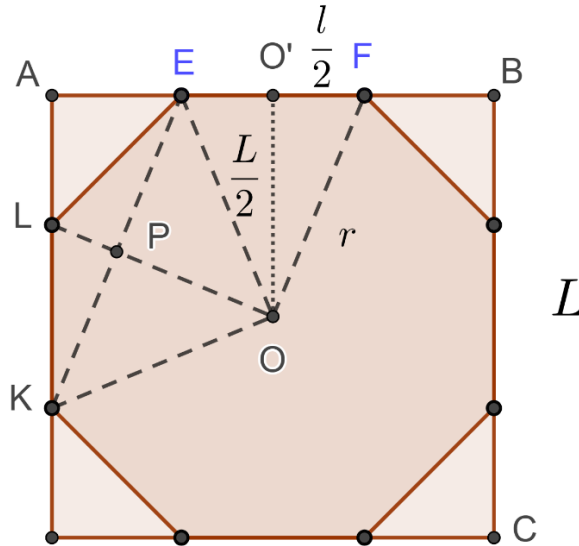
Los triángulos ABD y AEL son rectángulos e isósceles. En particular tienen los mismos ángulos, lo que permite afirmar que son semejantes, por lo que sus lados son proporcionales. Esto es:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{EL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}L}{l} = \frac{2x+l}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}L}{l} = \frac{2 \cdot \frac{l}{\sqrt{2}} + l}{\frac{l}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}L}{l} = \frac{\sqrt{2}l + l}{l} \sqrt{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow L = (1 + \sqrt{2})l \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

4.6. Usando triángulos semejantes (segunda descomposición).

Figura 8

Sexta demostración.



Al considerar nuevamente la circunferencia circunscrita al octógono, denotemos por r a su radio y al igual que antes por O a su centro. El triángulo EOF es isósceles luego la altura trazada desde O es también la bisectriz del ángulo \widehat{EOF} y por ser este un ángulo central, su medida será $\widehat{EOF} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Considerando ahora el triángulo OEK resulta ser rectángulo (pues \widehat{EOK} es un ángulo central y su medida viene dada por $\widehat{EOK} = 2\widehat{EOF} = 90^\circ$) e isósceles, por lo que se tiene la igualdad $\widehat{OKE} = \widehat{OEK} = 45^\circ$.

Por otra parte, el segmento \overline{LO} es perpendicular al lado \overline{KE} , de donde \overline{PO} es la altura trazada desde O en el triángulo EOK . Esto fuerza a que el triángulo KOP sea rectángulo isósceles, de donde se desprende que $\overline{PO} = \overline{PK}$. Del teorema de Pitágoras se infiere que la medida de estos lados iguales será $\overline{PO} = \overline{PK} = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Este hecho nos permite obtener la medida del segmento $\overline{LP} = \overline{LO} - \overline{PO} = r - \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}r$.

Al prestar atención sobre los triángulos $OO'F$ y EPL , resultan ser rectángulos y \widehat{LEP} un ángulo inscrito a la circunferencia, luego su medida es la mitad del ángulo central correspondiente, es decir:

$$\widehat{LEP} = \widehat{KEL} = \frac{1}{2}\widehat{LOK} = \frac{1}{2}\widehat{EOF} = \widehat{O'OF}.$$

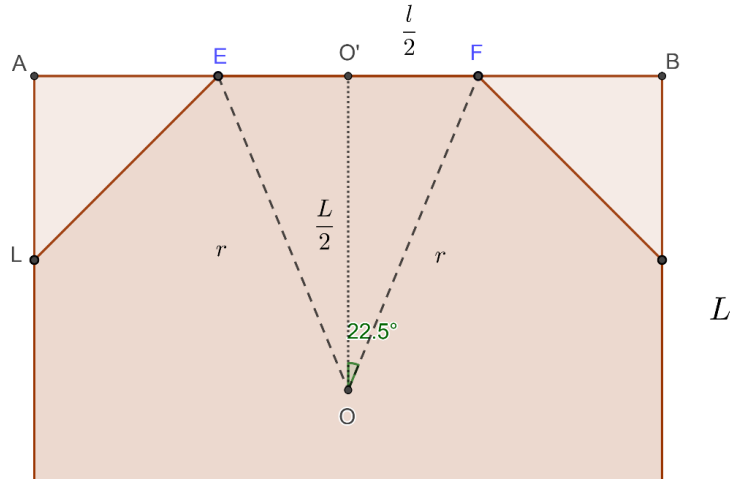
Así los triángulos $OO'F$ y EPL tienen dos ángulos iguales, por lo que tenemos asegurada la semejanza de los mismos y la proporcionalidad entre sus lados. De aquí que:

$$\frac{\overline{OO'}}{\overline{FO'}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{LP}} \Rightarrow \frac{\frac{L}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{r}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}r} \Rightarrow \frac{L}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \frac{L}{l} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

4.7. Recurriendo a herramientas de trigonometría.

Figura 9

Construcción geométrica de la séptima demostración.



Centrando la atención sobre el triángulo EOF de la Figura 9, podemos obtener la medida de $\widehat{O'OF} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$ y calcular el valor de su tangente sirviéndonos de la fórmula del ángulo mitad. Así:

$$\operatorname{tg} 22.5^\circ = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

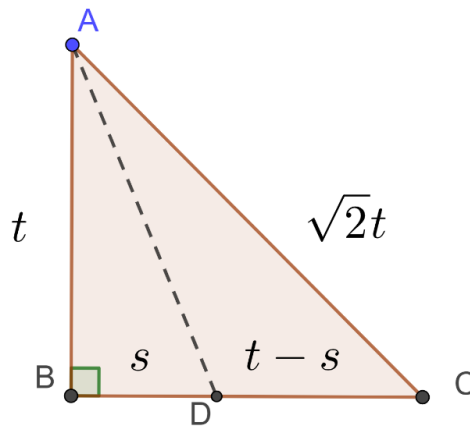
Pero el triángulo $OO'F$ es rectángulo, luego también debe ser:

$$\operatorname{tg} 22.5^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{L}{2}} \Rightarrow \frac{l}{L} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{L}{l} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow \frac{L}{l} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

4.8. Mediante el teorema de la bisectriz.

Figura 10

Construcción auxiliar de la octava demostración.



Consideremos el triángulo rectángulo isósceles ABC de la Figura 10, en el que hemos trazado la bisectriz \overline{AD} del ángulo \widehat{BAC} . Si denotamos por $\overline{AB} = \overline{BC} = t$, del teorema de Pitágoras se sigue que $\overline{AC} = \sqrt{2}t$. De la misma forma al nombrar $\overline{BD} = s$, se deduce que $\overline{DC} = t - s$.

Al aplicar el teorema de la bisectriz en el triángulo ABC , se obtiene:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{t}{s} = \frac{\sqrt{2}t}{t-s} \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{\sqrt{2}}{t-s} \Rightarrow \sqrt{2}s = t - s \Rightarrow (1 + \sqrt{2})s = t \Rightarrow \frac{t}{s} = 1 + \sqrt{2}$$

Ahora bien, el triángulo ABD tiene los mismos ángulos que el triángulo $OO'F$ de la Figura 9, por lo que sus lados son proporcionales, esto es:

$$\frac{\overline{OO'}}{\overline{O'F}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{\frac{L}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{t}{s} \Rightarrow \frac{L}{l} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow L = \delta \cdot l$$

5. CONCLUSIONES

El extenso patrimonio histórico que nos rodea suele ser objeto de estudio por ámbitos alejados de las Matemáticas, cuando estas aportan un nuevo punto de vista sobre los monumentos y nos ofrecen la posibilidad de visualizar la disciplina en nuestro entorno.

El tratamiento realizado en el artículo, permite resolver el mismo problema con herramientas sencillas en los primeros cursos de la Secundaria y abordar otras cuestiones propias de los últimos cursos, como son el trabajo con radicales o las igualdades notables, asistidas de la resolución de ecuaciones.

Una vez estudiada la trigonometría, encontramos una nueva oportunidad para resolver de manera elegante y breve el mismo problema, pero esta vez con procedimientos estandarizados que no requieren de razonamientos tan deductivos, haciendo que el alumnado pueda valorar la potencia de las herramientas que emplea.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Jefatura del Estado (2006). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. Boletín Oficial del Estado, 4 de mayo de 2006, núm. 106, pp. 17158-17207. <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>
- Jefatura del Estado (2020). *Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. Boletín Oficial del Estado, 30 de diciembre de 2020, num 340, pp. 122868-122953. <https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf>
- Navacué, P. y Sarthou, C. (1998). *Catedrales de España*. Espasa Calpe.
- Rodríguez, M. et al. (1975). *La Catedral de Almería*. Everest.
- Vitruvio, M. (1997). *Los diez libros de Arquitectura (Traducción de José Luis Oliver)*. Alianza editorial.