DE LA TECNOLOGÍA A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ¿UNA VÍA DE DOBLE SENTIDO?

From technology to mathematics education: A two-way road?

Arnau, D.

Universitat de València – Estudi General

Resumen

En el campo de la resolución de problemas, la influencia inicial de la inteligencia artificial, tanto en la práctica educativa como en la metodología de investigación dio paso a una visión de la tecnología centrada en el profesorado donde se desconfiaba de las posibilidades del uso autónomo por parte del alumnado. En esta comunicación se reflexiona sobre los efectos de este cambio de paradigma tanto desde el punto de vista de las consecuencias en el desarrollo de entornos tecnológicos como en la aparición de teorías dominantes y su influencia en la investigación. Con este fin se esbozan los diseños de dos investigaciones sobre la resolución de problemas verbales. En un caso la tecnología no se diseñó con intenciones educativas y, en el otro, se diseñó desde conocimiento específico de la didáctica de la matemática.

Palabras clave: *hojas de cálculo, problemas verbales, resolución de problemas, sistemas tutoriales inteligentes, tecnología educativa.*

Abstract

In the field of problem solving, the initial influence of artificial intelligence, both in educational practice and research methodology, gave way to a teacher-centred vision of technology where the possibilities of autonomous use by students were mistrusted. In this communication, we reflect on the effects of this paradigm shift both from the point of view of the consequences in the development of technological environments and the emergence of dominant theories and their influence on research. To this end, the designs of two investigations on solving word problems are outlined. In one case, the technology was not designed with educational intentions, and, in the other case, the technology was designed from specific knowledge of the didactics of mathematics.

Keywords: *educational technology, intelligent tutoring systems, problem solving, spreadsheets, word problems.*

LAS EXPECTATIVAS DEPOSITADAS EN EL DESARROLLO TECNOLÓGICO PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En la década de los 70 del siglo pasado la miniaturización de los componentes electrónicos permitió el desarrollo de computadoras de tamaño similar al de las computadoras actuales. Aunque inicialmente su precio no las hacía accesibles a nivel de aula, la comunidad investigadora en el campo de las ciencias de la computación inició el estudio de soluciones tecnológicas con intenciones educativas. Un ejemplo representativo de estos primeros intentos lo encontramos en el desarrollo del lenguaje de programación LOGO y en los estudios sobre las posibilidades, en entornos educativos reales, del uso de lenguajes de programación como marcos para la enseñanza de las matemáticas (Feurzeig et al., 1970).

Arnau, D. (2022). De la tecnología a la educación matemática: ¿una vía de doble sentido? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 17-29). SEIEM.

Las expectativas generadas idealizaron un futuro donde el uso de la tecnología sería algo común y, en el campo de la educación, se especuló con la posibilidad de implementar computadoras dotadas de inteligencia artificial (en adelante, IA) capaces de sustituir a los profesores humanos. Sin embargo, estas expectativas se vieron frenadas por las dificultades en la generación de nuevas soluciones teóricas en el campo de la IA. Así, durante la parte final del siglo XX se produjeron, de manera cíclica, estancamientos importantes en este campo. A cada una de estas crisis se les dio el nombre de *Invierno IA* (*AI Winter*) (McDermott et al., 1985). Es habitual considerar que el primer Invierno IA se produjo a mediados de los años 70. Sin embargo, la década de los 80 trajo nuevas esperanzas de la mano de nuevos lenguajes de programación y del desarrollo de computadoras más potentes que permitieron la implementación de *sistemas expertos*. Estos sistemas expertos pretendían participar en la toma de decisiones que debían asumir humanos en situaciones complejas o incluso llevarlas a cabo de manera autónoma. En el campo educativo, los sistemas expertos se pretendieron usar como el núcleo de lo que se llamarían *sistemas tutoriales inteligentes* (en adelante, STI). La comunidad investigadora en educación matemática fue permeable a estas novedades y, de manera modesta, algunos grupos de investigación iniciaron el desarrollo de STI capaces de realizar ciertas acciones típicas del profesorado de matemáticas. Así, durante este periodo surgieron aplicaciones como Word Problem Assistant (Thompson, 1989), Geometry Tutor (Anderson et al., 1985), Mentoniezh (Py, 1993). Al mismo tiempo, la confianza en los futuros desarrollos provenientes de la IA se reflejó en el espacio dedicado en reuniones internacionales y en compendios de investigación. Así, por ejemplo, dentro de las conclusiones del grupo de trabajo de tecnología del ICME VI, Fey (1989) apuntaba que “Hay un pequeño pero creciente cuerpo de investigación en educación matemática que pretende combinar el conocimiento de la ciencia cognitiva y de la inteligencia artificial para producir sistemas tutoriales ‘expertos’ para ciertos contenidos” (p. 266).

Pero la IA no solo fue vista como una posibilidad para la práctica educativa. La publicación del libro *Human Problem Solving* (Newell y Simon, 1972) influyó en una reorganización de la metodología de investigación en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas. En principio este libro no tenía intenciones educativas, sino que pretendía determinar cómo los humanos piensan cuando resuelven problemas. De hecho, se indicaba que “si la actuación no se comprende bien, es prematuro estudiar el aprendizaje” (Newell y Simon, 1972, p. 8). Sin embargo, el interés que planteaba en la comprensión de los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas proporcionaba una metodología de investigación que podía aplicarse en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas. Esta metodología se caracterizaba, entre otros aspectos, por ser una teoría del individuo; orientada al contenido; empírica, pero no experimental; y no estadística.

La publicación de *Human Problem Solving* coincidió con un movimiento dentro del área de didáctica de la matemática donde se ponía en duda la capacidad de las metodologías estadísticas para desarrollar conocimiento (Freudenthal, 1982; Kilpatrick, 1978; Schoenfeld, 1994). Las alternativas para la investigación en el campo del aprendizaje y enseñanza de la resolución de problemas se centraron en metodologías basadas en el individuo donde los sujetos debían ser estudiados de manera intensiva en el tiempo y donde se dio prioridad a protocolos basados en pensar en voz alta (Schoenfeld, 1985). De manera más especulativa, se plantearon también metodologías basadas en el uso de la IA.

> El trabajo en inteligencia artificial y campos relacionados (como la psicología del procesamiento de la información y la ciencia cognitiva en última instancia) ha producido un conjunto de métodos que son claramente ‘científicos’. Por ejemplo, la implementación exitosa de un programa que resuelve problemas, proporciona una prueba empírica de que determinadas ideas teóricas sobre el pensamiento realmente ‘funcionan’ (Schoenfeld, 1994, pp. 707-708).

Con todo, hacía principios de los años 90, las dificultades en el campo de las ciencias de la computación condujeron a un segundo Invierno IA que se manifestó en un pesimismo de las posibilidades de los STI en el campo de la educación (Balacheff y Kaput, 1996). En este sentido, McArthur y Lewis (1998) concluyeron que la búsqueda de entornos inteligentes flexibles que apoyaran a un estudiante en la resolución de problemas se había convertido en la búsqueda de una quimera. Y así, mientras la potencia de los ordenadores aumentaba rápidamente, la evolución de los STI en el campo de la resolución de problemas avanzaba muy lentamente. Lo anterior coincidió en el tiempo con la proliferación de sistemas operativos que proporcionaban interfaces gráficas y esto, posiblemente, dio pie a centrar la atención en los *micromundos* y en las posibilidades educativas de la expresión del contenido matemático mediante múltiples sistemas de representación. La pretensión inicial de los desarrollos apoyados en IA, donde se tenía la intención de reducir la distancia entre el entorno tecnológico y entorno habitual, fue sustituida por el aprovechamiento educativo de esa distancia.

A partir de ese momento, la atención de la didáctica de la matemática hacia la IA, y a los desarrollos tecnológicos dirigidos a un uso independiente por parte del alumnado, ha sido escasa tanto desde el punto de vista de la investigación como de la práctica educativa. En este último caso, esto se ha reflejado de manera indirecta en una falta de confianza en las posibilidades del uso autónomo de la tecnología por parte del alumnado. Esta falta de confianza se plasmó de manera patente en las recomendaciones ligadas al Principio Tecnológico de los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) donde se enfatizaba que "La tecnología no sustituye al profesorado de matemáticas. Cuando el alumnado utiliza herramientas tecnológicas, a menudo dedican tiempo a trabajar en forma que parece que lo hacen independientemente del profesorado, pero esta impresión es engañosa" (p. 26). Esta visión de la tecnología centrada en el profesorado también se ha instalado en la propia investigación en el área. Así, en una revisión bibliográfica realizada por del Olmo-Muñoz et al. (en prensa) se concluyó que las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas donde el alumnado hace un uso de la tecnología no mediado por el profesorado han sido prácticamente inexistentes. Posiblemente esta tendencia sea consecuencia de las perspectivas generadas en las agendas de investigación sobre dónde centrar el foco en el uso de la tecnología en la didáctica de la matemática. Así en *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*, la publicación donde se recogen las discusiones del ICMI Study 17 dedicado al uso de la tecnología en la educación matemática, y dentro del capítulo dedicado a las perspectivas teóricas, se hace hincapié en dedicar atención a los procesos de génesis instrumental y mediación semiótica, el papel del profesor en un entorno de aprendizaje enriquecido tecnológicamente, y la influencia de las herramientas disponibles en las tareas y en el diseño de tareas (Drijvers et al., 2010). En estas recomendaciones podemos distinguir dos focos principales. Por un lado, la tendencia a asignar al profesorado de matemáticas el rol principal del uso de la tecnología; por otro, la necesidad de atender a una evolución en el uso de la tecnología desde un punto inicial donde esta se presenta al alumnado como algo extraño.

La situación descrita, donde se parte de que la tecnología es un artefacto, podría ser el resultado de una falta de influencia del área de la didáctica de la matemática en el desarrollo de soluciones tecnológicas. Esto podría tener como consecuencia que la investigación en el área se convirtiera en mera consumidora de una tecnología diseñada desde campo ajenos. Evidentemente, los marcos teóricos, las metodologías y los propios objetivos de investigación podrían ser la consecuencia de esta falta de protagonismo. Con este fin, reflexionaremos sobre dos ejemplos de investigación en el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. En el primero, la solución tecnológica es ajena al área; en el segundo, la tecnología se diseña y evoluciona desde el área.

De la tecnología a la Educación Matemática

Desde la implementación de las primeras hojas de cálculo a principio de la década de los 80, se observó su potencial para la enseñanza de la resolución de problemas verbales. Así, Arganbright (1984,

p. 187) afirmó que: “La hoja electrónica de cálculo puede ser usada para complementar el estudio de los problemas verbales en álgebra […] Las capacidades ‘¿Y si...?’ de la hoja de cálculo fomentan la experimentación de ensayo y error”.

Dentro de la comunidad investigadora emergieron grupos de investigaciones centrados en analizar el potencial de la hoja de cálculo como una herramienta para ser utilizada en los primeros momentos de la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales. Así, el *Spreadsheet Algebra Project* fue un proyecto británico-mexicano que desarrollaron Teresa Rojano y Rosamund Sutherland en la década de los 90 en el que se analizó cómo alumnado sin conocimientos previos o con un largo historial de dificultades en el área de matemáticas desarrollaba las ideas de función y función inversa, expresiones algebraicas equivalentes y la resolución de problemas verbales usando el entorno de la hoja de cálculo (Rojano y Sutherland, 1991; Sutherland y Rojano, 1993). Entre las conclusiones finales del proyecto, y para el caso de la resolución de problemas verbales, se destacaba un aumento por parte del alumnado de la percepción de las relaciones entre cantidades; el uso del simbolismo de la hoja de cálculo para expresar relaciones generales; y una evolución hacia un método más general y algebraico consistente en ir de lo desconocido a lo conocido. En una línea similar, Friedlander (1996, 1999) concluyó que la resolución de problemas con la hoja de cálculo favorecía que el alumnado buscara esquemas, construyera expresiones algebraicas, generalizara y justificara conjeturas. En concreto, señalaba que el entorno ofrecía ventajas en la transición gradual de la aritmética al álgebra, ya que: “liberan al estudiante de la tarea de los cálculos y manipulaciones algebraicas; […] permiten un movimiento libre de vaivén entre el mundo de los números y el del álgebra; presentan un medio en el cual el uso del álgebra es una necesidad natural, más que un requisito arbitrario” (Friedlander, 1996, p. 71). El estudio de Dettori et al. (2001) coincidió en identificar algunas nociones algebraicas que podían desarrollarse usando la hoja de cálculo para resolver problemas verbales como: usar relaciones y sintetizar ecuaciones, iniciar en el uso de variables e incógnitas, introducir al estudio de funciones, comprobar los resultados, razonar sobre el rango de la solución, generalizar los problemas mediante parámetros y aprender el lenguaje del álgebra.

Sin embargo, en estas investigaciones también se identificaban algunos posibles obstáculos asociados al uso de la hoja de cálculo. De este modo, el potencial de la hoja de cálculo a la hora de producir gran cantidad de datos podría conducir a que el alumnado realizara un esfuerzo menor para lograr una comprensión adecuada de las situaciones problemáticas (Dettori et al., 2001; Friedlander, 1999; Rojano y Sutherland, 1991). Otro aspecto señalado como conflictivo se encontraría en el carácter aritmético o algebraico de las expresiones representadas en la hoja de cálculo. Así, Capponi y Balacheff (1989) sostenían que el uso de la hoja de cálculo requería de la manipulación de expresiones con letras, pero que el carácter algebraico de estas manipulaciones no era evidente. De hecho, identificaron dos problemas asociados al lenguaje de la hoja de cálculo: la prioridad que el entorno da al cálculo y la necesidad de integrar en las expresiones de la hoja de cálculo la sintaxis del álgebra y la de la hoja de cálculo. Como posible peligro en la enseñanza, estos autores apuntaban que la prioridad en el cálculo podría inducir a los estudiantes a interpretar las fórmulas como descripciones de cálculos numéricos, en lugar de relaciones entre datos.

La necesidad de precisar la relación entre el simbolismo de expresiones matemáticas usadas en la hoja de cálculo y en lápiz y papel dio lugar a una importante producción investigadora (Drouhard y Teppo, 2004; Friedlander y Tabach, 2001; Tabach et al., 2008; Wilson, 2006). En estos trabajos, se destacaba el carácter híbrido del lenguaje de la hoja de cálculo que permitía al mismo tiempo una representación formal y una retroalimentación numérica. Sin embargo, este carácter híbrido no necesariamente debía considerarse como un recurso fácilmente accesible. De hecho Haspekian (2005) indicaba que la utilización de la hoja de cálculo para el aprendizaje del álgebra exige de un proceso de génesis instrumental. Así, en el lenguaje del álgebra las variables se representan mediante un símbolo (una letra) conectado a un conjunto de valores posibles. En el entorno de la hoja de cálculo, una variable también se representa mediante un símbolo (un *argumento de celda*) y existe en referencia a un conjunto de valores. Sin embargo, a diferencia de la letra en álgebra, este argumento de celda ofrece al mismo tiempo: una referencia general abstracta que representa a la variable (de hecho, la formula refiere a ella, haciéndole jugar el papel de variable); una referencia concreta particular que se expresa mediante un número; una referencia geográfica que se expresa mediante una dirección especial en la hoja; y una referencia material en la que la celda puede verse como un compartimento.

Otro aspecto analizado fueron las diferencias entre el uso del signo igual en la hoja de cálculo y en lápiz y papel. Así, para Dettori et al. (2001), la hoja de cálculo no permitía expresar ecuaciones, ya que el signo igual en la hoja de cálculo significa “asignación de un valor calculado a una celda, mientras que en álgebra indica relación” (p. 199). En Drouhard y Teppo (2004) se realizó un estudio comparativo del lenguaje del álgebra y de la hoja de cálculo donde concluyó que: (a) las fórmulas del tipo =A1+2 serían equivalentes a expresiones algebraicas del tipo $x+2$, donde el signo igual de la fórmula solo sería una señal que indicaría la necesidad de realizar la operación aritmética asociada; y (b) las fórmulas del tipo =SI(A1=B1;“verdadero”;“falso”) podrían ser consideradas como una manera de expresar ecuaciones del tipo $A = B$.

Arnau (2010): Un estudio sobre la resolución algebraica en la hoja de cálculo

En Arnau (2010) se planteaba una estudio sobre las posibilidades de la hoja de cálculo para desarrollar un método de resolución de problemas verbales que pudiera ser utilizado como mediador entre la resolución aritmética y la algebraica. Como parte del marco teórico se partía de que las situaciones de enseñanza y aprendizaje pueden ser interpretadas como procesos de comunicación y producción de sentido (Puig, 2008) y que la enseñanza tiene como una de sus intenciones lograr que los estudiantes lleguen a ser usuarios competentes de un sistema matemático de signos (en adelante, SMS) (Filloy, 1999). De acuerdo con Kieran y Filloy (1989), durante el aprendizaje el alumnado utiliza SMS intermediarios que deberán ser rectificados con la finalidad de que lleguen a ser competentes en SMS más abstractos. Estos mismos SMS intermediarios pueden ser utilizados como instrumentos para la creación de métodos de enseñanza mediadores. Para la construcción de estos métodos mediadores se parte de un modelo de competencia y, manteniendo parte de base lógica, se sustituye el SMS más abstracto por un SMS menos abstracto. En el caso que nos ocupa, el modelo de competencia en la resolución algebraica de problemas verbales implicaría el uso del SMS del álgebra y vendría descrito mediante una división en pasos ideales del método cartesiano (en adelante, MC).

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2. Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.
5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.

7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema. (Filloy et al., 2008, p. 330)

En la elaboración del método de resolución de la hoja de cálculo (en adelante, MHC) se tuvo en cuenta tanto el MC como las reflexiones teórico-empíricas de trabajos previos sobre las similitudes del SMS de la hoja cálculo y el del álgebra. Básicamente, se sustituyo el SMS del álgebra por el SMS de la hoja de cálculo y no se tuvieron en cuenta los pasos posteriores al planteamiento de la ecuación (paso 4 del MC), pues no era posible llevar a cabo las transformaciones algebraicas usando el SMS de la hoja de cálculo.

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2. La asignación de una celda a una o varias cantidades desconocidas y la elección de una única cantidad desconocida representada en una celda de la que dependerán directa o indirectamente el resto de cantidades desconocidas representadas. A esta cantidad la llamaremos *cantidad de referencia* y a la celda que ocupa, *celda de referencia*.
3. Representar en las celdas anteriores (excepto en la celda de referencia) fórmulas que describen la relación que esas cantidades desconocidas tienen con otras cantidades.
4. El establecimiento de una ecuación, lo que se hace igualando dos expresiones que representan la misma cantidad.
5. La variación del valor presente en la celda de referencia hasta conseguir que se verifique la igualdad. Con este fin, replicaremos los pasos 3 y 4 sobre una secuencia de posibles valores de la cantidad representada en la celda de referencia.
6. Interpretación del valor que verifica la igualdad en términos del problema. (Arnau, 2010, p. 44)

Evidentemente ambos métodos difieren en SMS empleado, pero mantienen una parte lógica común (pasos 1-4). Para comparar de manera práctica ambos métodos utilizaremos el problema *Conejos y gallinas* (En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?). Una resolución del problema *Conejos y gallinas* usando el MC podría conducir a la ecuación $4x+2(20\text{-}x)=52$, donde x representaría a la cantidad número de conejos. En la Figura 1 se presenta una resolución mediante el MHC del problema *Conejos y gallinas*. Podemos observar que la cantidad "nº de conejos" se asocia a una celda en blanco y que el resto de cantidades desconocidas dependen, directa o indirectamente de ella. En la comparación entre los procedimientos de resolución, se observa que "nº de gallinas" se expresaría en el lenguaje del álgebra mediante la expresión algebraica $20\text{-}x$ mientras que en el lenguaje de la hoja de cálculo se le asignaría la fórmula =20-B1. En este caso el signo igual es un igual de asignación, pues la intención es indicar que el valor de la celda B2 se obtiene restando a 20 el valor de la celda B1. En cuanto a la fórmula presente en la celda B6 (=52=B5), el primer igual es de asignación (en este caso se asigna un valor booleano a B6) y el segundo es de comparación. Una vez hecho el planteamiento anterior, para poder dar respuesta al problema, deberíamos iniciar un procedimiento de prueba de valores en la celda B1 hasta conseguir que la celda B6 tomará el valor VERDADERO. En definitiva, podemos observar la presencia de las mismas relaciones en las dos resoluciones. De hecho, si comparamos las lecturas analíticas realizadas al resolver el problema *Conejos y gallinas* usado el MHC y el MC, concluiremos que es la misma y que se expresaría mediante:

- número de animales (conocida) es igual número de conejos (desconocida) más número de gallinas (desconocida);

- total de patas de gallina (desconocida) es igual a número de gallinas (desconocida) por número de patas por gallina (conocida);
- total de patas de conejo (desconocida) es igual a número de conejos (desconocida) por número de patas por conejo (conocida);
- total de patas de animales (conocida) es igual a total de patas de conejo (desconocida) más total de patas de gallina (desconocida).

	A	B	C
1	nº de conejos		paso 2 MHC
2	nº de gallinas	=20-B1	paso 3 MHC
3	nº de patas de conejo	=4*B1	paso 3 MHC
4	nº de patas de gallina	=2*B2	paso 3 MHC
5	nº de patas	=B3+B4	paso 3 MHC
6		=52=B5	paso 4 MHC

Figura 1. Resolución mediante el MHC del problema Conejos y gallinas.

Pero, más allá de los anuncios de un posible potencial de la hoja de cálculo y sobre la posible equivalencia entre lenguajes, en Arnau (2010) se aplicó una secuencia de enseñanza basada en el MHC con una duración de 13 sesiones. En la experiencia participó un grupo natural de 22 sujetos de segundo de secundaria que había sido instruido previamente en la resolución algebraica de problemas verbales. Para determinar la influencia de la instrucción se les administró un pretest y un postest formados por ocho problemas que, típicamente, exigían una resolución algebraica. Los resultados mostraron que se produjo un incremento del 2,4% en el éxito en la resolución entre el post y el pre; pero, al mismo tiempo, el recurso al SMS del álgebra se redujo en un 6,2%. Lo anterior ponía de manifiesto que una instrucción basada en el MHC podía tener un efecto (ligero) en la competencia en la resolución de algebraica; pero la disminución en el uso del SMS del álgebra apuntaba a que el efecto no suponía un aumento en la competencia en el MC. De hecho, tras la instrucción se observaba un incremento de estrategias basadas en el ensayo y error apoyadas sobre el SMS de la aritmética. En definitiva, como la mayoría de los trabajos previos, los resultados presentados en Arnau (2010) arrojaban luces y sombras sobre el uso de la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo como una forma de avanzar hacia la competencia en el método cartesiano.

DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA A LA TECNOLOGÍA

En *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Wagner y Kieran (1989) esbozaron una agenda de investigación en la que, entre otras, se planteaban estas preguntas: "¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas verbales que son intrínsecamente algebraicos? ¿Cuándo un método de resolver problemas verbales es más algebraico que aritmético?" (p. 226). En los trabajos de Cerdán (2007) y Filloy et al. (2008) se concluyó que la respuesta a las dos primeras preguntas exigía no únicamente tener en cuenta las características del problema, sino que también era necesario incluir a la persona que resolvía y a los medios que utilizaba para conseguirlo. En consecuencia, lo que podría considerarse como aritmético o algebraico no sería el problema, sino la lectura analítica o la resolución que realizara un sujeto. Por otro lado la separación entre lectura analítica y el SMS empleado para materializar la resolución abría nuevas perspectivas para dar respuesta a la tercera pregunta de Wagner y Kieran (1989). Así el carácter aritmético o algebraico de un método no puede ligarse únicamente al SMS utilizado, sino que también debe tenerse en cuenta las características del entramado de relaciones entre cantidades al que se reduce un problema, pues esto pondrá de manifiesto si la resolución debe desencadenarse desde lo conocido o desde lo desconocido. En el caso de la lectura analítica del problema *Conejos y gallinas*, presentada al final de la sección anterior, se observa que en todas las relaciones hay más de una cantidad desconocida. Esto implicaría que no es posible realizar la resolución yendo de lo conocido a lo desconocido y, por lo tanto, la lectura analítica realizada se definiría como algebraica (Filloy et al., 2008). No obstante, el carácter algebraico de esta lectura analítica, el problema podría ser resuelto usando SMS distintos al del álgebra a partir de este entramado de relaciones entre cantidades. Así, en la sección anterior se usaba el SMS de la hoja de cálculo, pero también podría usarse el SMS de la aritmética y realizar una resolución por ensayo y error. Para finalizar esta breve discusión, conviene señalar que para un mismo problema pueden existir lecturas analíticas diferentes y, en ocasiones, estas pueden ser tanto aritméticas como algebraicas (Cerdán, 2007; Filloy, Rojano y Puig, 2008).

Partiendo del metalenguaje de los grafos trinomiales (Cerdán, 2007; Fridman, 1990; Filloy, Rojano y Puig, 2008), en Arnau (2015) se desarrolla una manera de representar las lecturas analíticas mediante hipergrafos orientados. Más allá de una mera representación del entramado de relaciones entre cantidades, e independientemente del SMS empleado, es posible expresar parte de la resolución de un problema verbal mediante acciones sobre un hipergrafo. A partir de estas ideas teóricas, hemos desarrollado un STI de nombre HINTS (Arnau et al., 2013) con las siguientes características básicas: (1) el programa no supone una asignación predeterminda entre una cantidad y su representación en un SMS, sino que comprueba la validez de la representación atendido a las restricciones del problema y a las decisiones previas del resolutor; (2) el programa, apoyado sobre la base lógica que proporciona el metalenguaje de los hipergrafos, permite resolver los problemas utilizando diversos SMS; y (3) los mensajes de error y ayuda no están predeterminados y se generan atendiendo al contenido y al estado de la resolución. El hecho de que HINTS pueda emular parte de las acciones que realiza el profesorado humano cuando participa en situaciones de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas verbales (Arnau et al., 2014) ofrece posibilidades no solo desde el punto de la enseñanza y el aprendizaje, sino también desde el punto de vista de la investigación. Así, proporcionar una computadora dotada de un STI a cada estudiante permite una recogida de datos intensiva y controlada tanto de las variables de producto como de las variables de proceso. De este modo, el uso de STI permite abordar problemas de investigación ya estudiados anteriormente desde nuevas perspectivas (véase, por ejemplo, del Olmo-Muñoz et al. (2022)) o plantear nuevas líneas investigación.

Pérez-Buj et al. (2021): Un estudio sobre la resolución aritmética usando SMS alternativos

La resolución aritmética y algebraica de problemas verbales exige asignar a las cantidades una representación no ambigua. En Cerdán (2007) se define la idea de diccionario de cantidades de un problema como un conjunto de ternas (x, u, n), donde x sería el número, letra o expresión algebraica que se le asigna a una cantidad; u sería la unidad de magnitud de la misma; y n sería "la manera en la que en el lenguaje vernáculo proporcionamos un sentido" (p. 33). Aunque la representación completa y no ambigua solo se consigue teniendo en cuenta la globalidad de la terna, podemos confiar en que el recurso al primer componente sería lo suficientemente preciso como para evitar equívocos. Por esta razón, cuando se resuelve de manera aritmética, es habitual referirse a las cantidades desconocidas por el número que las representa y, cuando se resuelve de manera algebraica, mediante una letra o expresión algebraica. Sin embargo, el uso de esta manera de representar las cantidades supone que, cuando se inicia la enseñanza de la resolución algebraica de problemas, el alumnado debe sustituir el SMS sobre el que habitualmente construyen sus razonamientos. Por el contrario, al fijar la atención en el último componente, encontramos que el uso de un nombre preciso para las cantidades proporcionaría una representación no ambigua que se mantendría invariante tanto en la resolución aritmética como en la algebraica. Al mismo tiempo, y apoyándonos en que la relación entre la comprensión lectora y la competencia en la resolución de problemas verbales ha sido ampliamente constatada (Barnett, 1979; Boonen et al., 2014; Sanz et al., 2019), el recurso a la representación de las cantidades mediante nombres podría permitir un enlace más preciso con la semántica del problema y posibilitaría de esta manera la identificación de esquemas conceptuales adecuados.

Partiendo de la base anterior, en Pérez-Buj et al. (2021) se presenta un estudio que tiene como uno de sus objetivos determinar el potencial de apoyar la resolución aritmética de problemas verbales sobre los nombres de las cantidades en lugar de hacerlo sobre los valores numéricos. Los participantes fueron cuatro grupos naturales de quinto de primaria. Se configuraron dos condiciones experimentales a las que se asignaron los nombres de condición de control y condición experimental. En ambas condiciones, en la primera y en la última sesión, se administraron dos cuestionarios formados por problemas verbales típicamente aritméticos. La comparación de estos cuestionarios pretendía medir el efecto de la intervención. Durante las sesiones centrales, las personas participantes resolvieron problemas verbales multietapa, típicamente aritméticos, bajo la supervisión de HINTS. En ambas condiciones, la interfaz de HINTS proporcionaba el enunciado del problema, cuatro botones con las operaciones básicas y un botón para abandonar el problema en el caso que la persona que resolvía el problema lo considerase necesario. Cuando se finalizaba o abandonaba un problema, HINTS planteaba de manera automática el siguiente hasta agotar los problemas de cada sesión. En la condición de control, se proporcionaban botones que incluían los valores de las cantidades conocidas; mientras que, en la condición experimental (Figura 2), los botones incluían los nombres de las cantidades. De manera común en las dos condiciones, HINTS identificaba y notificaba las acciones incorrectas y generaba un nuevo botón, con el valor o nombre según la condición, cuando la operación planteada era correcta.

Figura 2. Condición experimental.

En este caso se observa que, a diferencia del caso de la hoja de cálculo, la implementación del entorno tecnológico responde a una intención didáctica y que la configuración experimental, la cual sería difícilmente abordable en una situación con lápiz y papel, se aprovecha de la teoría subyacente que es la base del diseño.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el caso de la transferencia de la tecnología hacia la didáctica de la matemática, se observa que los esfuerzos de teorización han sido posteriores a la implementación de la tecnología. Estos esfuerzos se han dirigido principalmente a generar marcos teóricos que permitieran identificar diferencias y similitudes entre la resolución de tareas en el entorno tecnológico y en lápiz y papel, analizar los procesos de producción de sentido cuando se utiliza la tecnología, y describir el proceso de apropiación de la herramienta tecnológica. Sin embargo, el recurso a este tipo de teorías podría reducir la investigación a una mera descripción de fenómenos sin capacidad de producir impacto real en el aula. Así, en el caso concreto de las investigaciones sobre el uso de la hoja de cálculo para la enseñanza de la resolución algebraica de problemas, podemos concluir que las diferentes investigaciones consiguieron establecer una imagen precisa de la ventajas e inconvenientes asociadas a su uso. Sin embargo, las conclusiones derivadas no repercutieron en la modificación de la tecnología o en el diseño de nuevas soluciones adaptadas a las necesidades educativas. En este sentido, Capponi y Balacheff (1989) planteaban dos limitaciones –la prioridad que el entorno da al cálculo y la necesidad de integrar en las expresiones de la hoja de cálculo la sintaxis del álgebra y la de la hoja de cálculo– que hubiera sido posible atender mediante la implementación de hojas de cálculo con intenciones puramente educativas. En ellas se habría podido sustituir el SMS de la hoja de cálculo por otro más próximo al SMS del álgebra donde se diera prioridad a la sustitución algebraica. Este tipo de modificaciones habría producido una mayor proximidad entre el entorno tecnológico y el entorno de referencia. Sin embargo, y de manera general, la influencia de la didáctica de la matemática en la tecnología generada ha sido reducida, y, posiblemente, esta escasa influencia podría poner de manifiesto un problema más general: la carencia de proyección de los resultados de investigación en la práctica real de aula.

Por el contrario, la implementación de soluciones tecnológicas a partir de conocimiento específico de la didáctica de la matemática permite impactar en la práctica real educativa y posibilita abordar nuevos problemas de investigación o revisitar problemas antiguos desde nuevos puntos de vista. Posiblemente la combinación del rechazo de la comunidad investigadora a las posibilidades del uso autónomo de la tecnología por parte del alumnado, junto con una confianza en la capacidad del profesorado para orquestar el uso de la tecnología, ha tenido como consecuencia dejar de lado la necesidad de diseñar una tecnología transparente en la que la distancia entre el entorno tecnológico y el entorno de referencia pudiera ser nula. La regulación de esta distancia podría ser utilizada para producir nuevas situaciones de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como se ha intentado mostrar en el diseño de investigación donde se usaba HINTS. Por otro lado, las posibilidades que ofrecen los STI de atender de manera individualizada al alumnado, emulando parte de las acciones que realiza el profesorado humano y realizando una recogida intensiva de datos, podrían permitir difuminar, en parte, la habitual separación entre metodologías cualitativas y cuantitativas.

Para finalizar, resulta sorprendente el poco interés que se ha prestado desde el área a las soluciones basadas en IA en los últimos 25 años (del Olmo-Muñoz et al., en prensa). A diferencia de la atención que se dedicó a la IA durante el siglo XX, la revolución que se ha producido en el campo de la IA en los últimos años ha generado un escaso debate en el área de didáctica de la matemática (para una excepción, véase, Richard et al. (2022)). Posiblemente esto haya sido el resultado de las orientaciones teóricas y metodológicas dominantes en el área. Quizá sería el momento de dedicar un tiempo a una reflexión encaminada a determinar si los esfuerzos para generar teorías que se propusieron en los años 80 y 90 del siglo pasado, así como los cambios metodológicos asociados, han producido los resultados esperados.

Agradecimientos

Trabajo realizado al amparo de los proyectos PGC2018-096463-B-100, financiado por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033/ y por FEDER Una manera de hacer Europa, y AICO/2021/019, financiado por la Generalitat Valenciana.

Referencias

Anderson, J. R., Boyle, C. F. y Reiser, B. J. (1985). Intelligent tutoring systems. *Science, 228*(4698), 456-462.

Arganbright, D. E. (1984). Mathematical applications of an electronic spreadsheet. En V. P. Hansen y M. J. Zweng (Eds.), *Computers in mathematics education* (pp. 184-193). National Council of Teachers of Mathematics.

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. [Tesis doctoral]. Universitat de València.

Arnau, D. (2015). Hacia profesores artificiales en la resolución algebraica de problemas verbales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 45-59). SEIEM.

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y González-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an intelligent tutoring system for arithmetical problem solving. *Learning Technologies, IEEE Transactions on, 7*(2), 155-164. https://doi.org/10.1109/TLT.2014.2307306

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., Puig, L. y González-Calero, J. A. (2013). Fundamentals of the design and the operation of an intelligent tutoring system for the learning of the arithmetical and algebraic way of solving word problems. *Coputers & Education, 63*, 119-130. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.11.020

Balacheff, N. y Kaput, J. J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 469-501). Kluwer Academic Publishers.

Barnett, J. (1979). The study of syntax variables. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 23-68). ERIC/SMEAC.

Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J. y van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. International *Journal of Educational Research, 68*, 15-26. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001

Capponi, B. y Balacheff, N. (1989). Tableur et calcul algebrique. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 179-210.

Cerdán, F. (2007). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos* [Tesis doctoral]. Universitat de València.

del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (en prensa). Intelligent Tutoring Systems for word problem solving in COVID-19 days: Could they have been (part of) the solution? *ZDM-Mathematics Education*.

del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2022). Using intra-task flexibility on an intelligent tutoring system to promote arithmetic problem-solving proficiency. *British Journal of Educational Technology, online first*.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 191-207). Kluwer Academic Publishers.

Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M.-A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En C. Hoyles y J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain* (pp. 89-132). Springer.

Drouhard, J. P. y Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. L. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 227-264). Kluwer Academic Publishers.

Feurzeig, W., Papert, S., Bloom, M., Grant, R. y Solomon, C. (1970). Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics. *SIGCUE Outlook, 4*(2), 13-17.

Fey, J. T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(3), 237-272. https://doi.org/10.2307/3482471

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(3), 327-342.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Springer.

Freudenthal, H. (1982). Fiabilité, validité et pertinence: Critères de la recherche sur l'enseignement de la mathématique. *Educational Studies in Mathematics, 13*(4), 395-408.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, 17-18*, 51-59.

Friedlander, A. (1996). Superproblemas del álgebra en hojas de cálculo. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 9, 71-75.

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education.* (pp. 337-344). PME.

Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Developing a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 252-257). The University of Melbourne.

Haspekian, M. (2005). An «Instrumental Approach» to study the integration of a computer tool into mathematics teachings: The case of spreadsheet. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(2), 109-141.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7* (3), 230-240.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 7-20). ERIC/SMEAC.

McArthur, D. J. y Lewis, M. W. (1998). *Untangling the web: Applications of the internet and other information technologies to higher education.* RAND Corporation.

McDermott, D., Waldrop, M. M., Chandrasekaran, B., McDermott, J. y Schank, R. (1985). The Dark Ages of AI: A panel discussion at AAAI-84. *AI Magazine, 6*(3), 122-134.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Newell, A. y Simon, H. (1972). *Human problem solving*. Prentice-Hall.

Pérez-Buj, G., Arnau, D., Diago, P. D. y Arevalillo-Herráez, Miguel. (2021). *La influencia del razonamiento verbal en la resolución aritmética de problemas verbales aritmético-algebraicos en un sistema* *tutorial inteligente*. Reunión del Grupo de Trabajo PNA en el XXIV Simposio de la SEIEM, València.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA, 2*(4), 87-107.

Py, D. (1993). Geometry problem solving with Mentoniezh. *Computers & Education, 20*(1), 141-146.

Richard, P. R., Vélez, M. P. y Van Vaerenbergh, S. (Eds.). (2022). *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning*. Springer.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1991). Symbolising and solving algebra word problems: The potential of a spreadsheet environment. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 207-213). PME.

Sanz, M. T., González-Calero, J. A., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2019). Uso de la comprensión lectora para la construcción de un modelo predictivo del éxito de estudiantes de 4o de Primaria cuando resuelven problemas verbales en un sistema inteligente. *Revista de Educación, 384*, 41-69. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2019-384-409

Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of «out loud» problem-solving protocols. *Journal of Mathematical Behavior, 4*(2), 171-191.

Schoenfeld, A. H. (1994). A discourse on methods. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 697-710.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*(4), 353-383.

Tabach, M., Hershkowitz, R. y Arcavi, A. (2008). Learning beginning algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 48-63.

Thompson, P. W. (1989). Artificial intelligence, advanced technology, and learning and teaching algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 135-161). Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S. y Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 220-237). Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Wilson, K. (2006). Naming a column on a spreadsheet. *Research in Mathematics Education, 8*(1), 117-132.