XVI CIAEM ICMI
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Construções geométricas das abelhas apis e melíponas: alguns problemas contextualizados

Cláudia Ferreira R. **Concordido**
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
concordido@ime.uerj.br
Rosa **García** Márquez
Faculdade de Formação de Professores – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Brasil
rosagmarquez@yahoo.com.br

Resumo

As abelhas, além de serem importantes no equilíbrio ecológico, são excelentes arquitetas, como pode ser observado em sua engenhosidade, organização, precisão e intuição geométrica na construção das colmeias. O objetivo deste trabalho é sugerir alguns problemas interdisciplinares para os professores de Matemática do Ensino Fundamental, Médio e/ou Ensino Superior, indicativos da presença da matemática na natureza. Os problemas sugeridos envolvem geometria plana, espacial e analítica e o cálculo diferencial e integral. A metodologia prevista é qualitativa, pois através da observação das construções arquitetônicas encontradas na natureza, especificamente das abelhas, pretende-se incentivar professores e alunos a se interessarem por outros problemas elencados ao meio ambiente. A resolução de problemas, envolvendo essa abordagem prática como metodologia, contribui com o processo de aprendizagem e conhecimento.

Palavras-chave: Matemática educativa; Ensino Médio; Ensino Básico; Modelagem; Atividades pedagógicas; Geometria Analítica; Cálculo Diferencial e Integral; Conscientização ambiental.

Introdução

O desenvolvimento sustentável é um tema de grande relevância, uma vez que lida com a preservação dos ecossistemas do planeta. Por isso, é fundamental que esteja presente nos conteúdos abordados nas mais variadas disciplinas escolares. O professor é um elemento chave no processo de ensino e aprendizagem, e deve se empenhar em trazer para a sala de aula problemas práticos de natureza contextualizada. A interdisciplinaridade confronta a segmentação do conhecimento nas disciplinas, pois apesar de cada uma guardar sua especificidade, passa a se evidenciar um diálogo constante entres elas, o que proporciona inclusive o surgimento de novos campos do saber. Para D'Ambrosio (1997) interdisciplinaridade e transdisciplinaridade possibilitam até mesmo a busca de uma convivência harmoniosa com a natureza. Com essa perspectiva, são propostas nesse trabalho algumas atividades pedagógicas, na forma de exercícios direcionados a diferentes níveis educacionais, buscando estabelecer a relação da matemática com outras áreas de conhecimento (em especial, a Biologia) e com seu cotidiano.

Apesar de parte da matemática aqui desenvolvida estar um pouco além dos ensinamentos da educação básica, o intuito das atividades é sugerir aos colegas possibilidades de se destacar, em alguma medida, o processo matemático presente na construção dos alvéolos, bem como a eficiência das abelhas. Despertar um olhar para a consciência ambiental é nosso objetivo indisfarçável, que esse trabalho tenta alcançar no ambiente escolar, considerando como inconteste a importância das abelhas para o desenvolvimento sustentável e para o equilíbrio ecológico.

Interdisciplinaridade e educação ambiental

A Matemática pode servir como instrumento de investigação e compreensão da realidade que nos cerca. A contextualização dos conteúdos matemáticos e a busca de inter-relações destes com os de outras áreas do conhecimento são procedimentos inerentes ao processo de modelagem e são propulsoras da interdisciplinaridade.

A educação ambiental deve ser um caminho para sensibilizar e conscientizar os alunos. No contexto escolar, ancorada em uma perspectiva interdisciplinar e transversal, a Matemática pode se aliar a outras disciplinas, tendo por meta capacitá-los para a participação ativa e a solução de problemas ambientais.

Abelhas e algumas de suas características

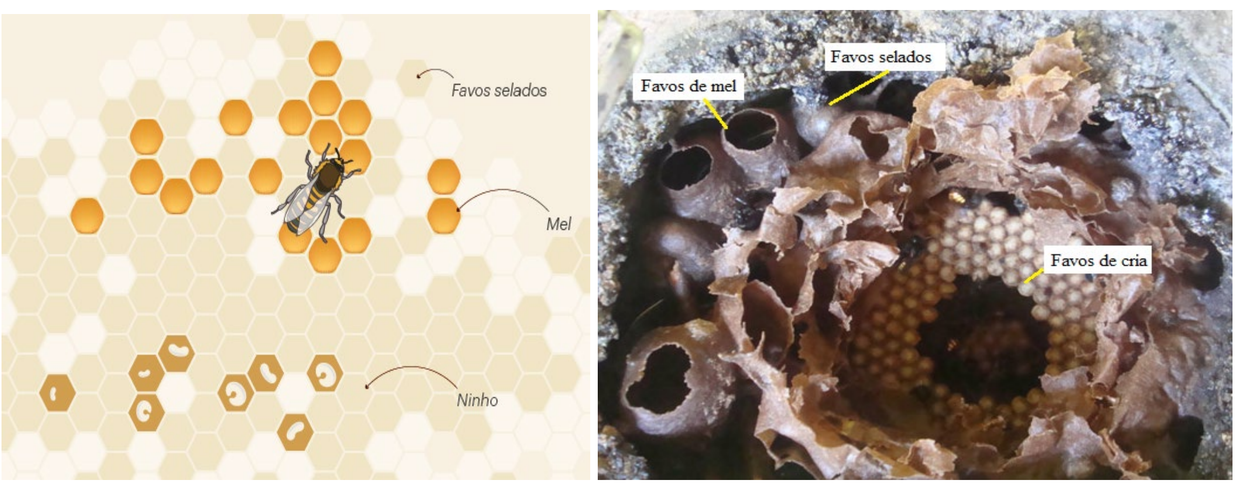
As abelhas são insetos voadores da ordem *Hymenoptera* (que significa "asas membranosas"), sendo importantes no equilíbrio ecológico devido ao efeito da polinização. Além disso, a construção de alvéolos por esses insetos oferece uma excelente oportunidade de ação pedagógica no ensino da Matemática e Ciências.

Atualmente, em nosso planeta existem mais de vinte mil espécies de abelhas; segundo Michener (1990), na família Apidae são destacadas 4 tribos: Euglossini, Bombini, Apini e a tribo Meliponini. As abelhas das tribos Meliponini e Apini são as que desenvolveram o maior nível de sociedade. As primeiras também são conhecidas como abelhas sem ferrão - comumente chamadas de nativas ou indígenas, cujo nome científico é *Meliponini* - receberam esse nome por possuírem um ferrão atrofiado. Já as Apini são abelhas com ferrão, e abrangem as abelhas australianas, europeias, africanas e as conhecidas como abelhas africanizadas, resultantes do cruzamento das abelhas europeias e africanas (Vieira, 1986; Kerr, 2001).

No Brasil existem aproximadamente cinco mil espécies de abelhas da família Apidae e, dentre estas, há quase trezentas e cinquenta espécies sem ferrão. No Peru existem cerca de novecentas espécies de abelhas, sendo cento e quarenta delas sem ferrão (Rasmussen & Castillo, 2003). As abelhas são responsáveis pela maior parte da polinização das flores e ainda nos fornecem cera, geleia real, mel, pólen, própolis e seu veneno; todos esses produtos são de interesse medicinal, alimentar e comercial. Apesar de sua importância, ultimamente observou-se uma redução drástica das populações de abelhas a nível mundial. Este problema, conhecido como desordem do colapso das colônias (CCD) (Pires et al., 2016), tem diversas causas, como a perda de seu habitat, quando florestas e jardins dão lugar a construções ou mesmo a plantações de monoculturas, excesso de agrotóxicos, poluição ambiental e parasitas (Bueno, 2010).

Forma dos alvéolos e potes de alimento

Os favos (conjunto de alvéolos) são construídos com a menor quantidade de cera secretada por uma glândula das abelhas operárias. As abelhas da tribo Apini constroem seus favos em forma de prismas hexagonais (Figura 1a), que armazenam o mel e servem também de berçários para suas crias. As abelhas nativas constroem dois tipos de potes elipsoidais, uns pequenos para as crias e outros maiores para armazenar mel e pólen e que ficam separados dos filhotes, conforme mostra a Figura 1b.

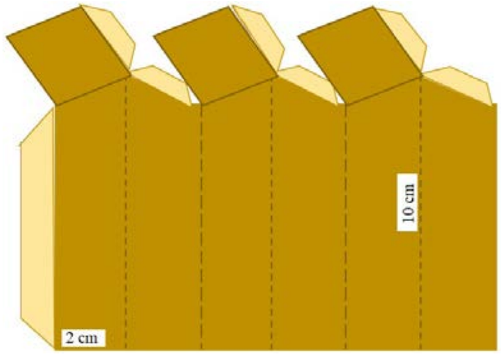


(a) (b)

Figura 1: (a) Alvéolos hexagonais (Fonte: https://www.publico.pt/2020/05/30/infografia/mundo-abelhas) (b) Potes elipsoidais (Fonte: https://vidasustentavel.wordpress.com/2011/04/21/abelhas-nativas-sem-ferrao-2/).

Abelhas com ferrão: A arquitetura dos favos chamou a atenção de vários geômetras, como Pappus de Alexandria (350 a.C. – 290 a.C.), Johannes Kepler (1571-1630), Jean-Dominique Maraldi (1709 – 1788), entre outros. Os alvéolos destas abelhas têm a forma de prismas hexagonais regulares, abertos em uma extremidade (por onde as abelhas entram) e fechado em outra por três losangos congruentes, com ângulos diédricos medindo $\beta = 109°28'$ e $\alpha = 70°32'$. Estes valores foram determinados por Maraldi (Vaiano et al., 2015) e, independentemente do tamanho da abelhas, os valores não mudam. A união dos três losangos forma um ápice triédrico, cuja extremidade serve de fundo para outros três alvéolos. Essas abelhas vão construindo uma série de ápices triédricos a partir de um plano vertical, simultaneamente para ambos os lados, de cima para baixo. Em seguida, constroem alvéolos paralelos, projetados com uma inclinação de 9º a 13º sobre o plano horizontal, com intuito de diminuir a vazão do mel, conforme a Figura 2a.

(a)



(b)

Figura 2: (a) Inclinação dos favos encaixados (Fonte: http://www.apiariosbonadio.com.br/favo-de-mel/). (b) Planificação do alvéolo de abelha apis melífera.

Abelhas sem ferrão: Os ninhos dos meliponíneos são construídos com cerume – um composto de diversos materiais encontrados na natureza, misturados com a cera secretada por elas e com uma resina (própolis), feita de materiais recolhidos de árvores ou arbustos. Elas costumam nidificar em diversos locais, como em troncos de madeira, a partir de cavidades já existentes (cupinzeiro), em copas de árvores, em postes de luz ou até mesmo abaixo do solo.

As células de cria têm um formato elipsoidal e agrupadas em forma de discos sobrepostos e unidos com pilastras de cera ou construídos com uma disposição espiralada. Em algumas espécies, estas células se assemelham a um cacho de uvas, unidas com filamentos finos de cerume (Kerr et al., 2001). Já os potes de alimento são maiores e em forma elipsoidal, conforme mostra a Figura 1b. Algumas espécies, como a Lambe-olhos, constroem pequenos potes que se assemelham a octaedros truncados quando estão sobrepostos.

Atividades pedagógicas

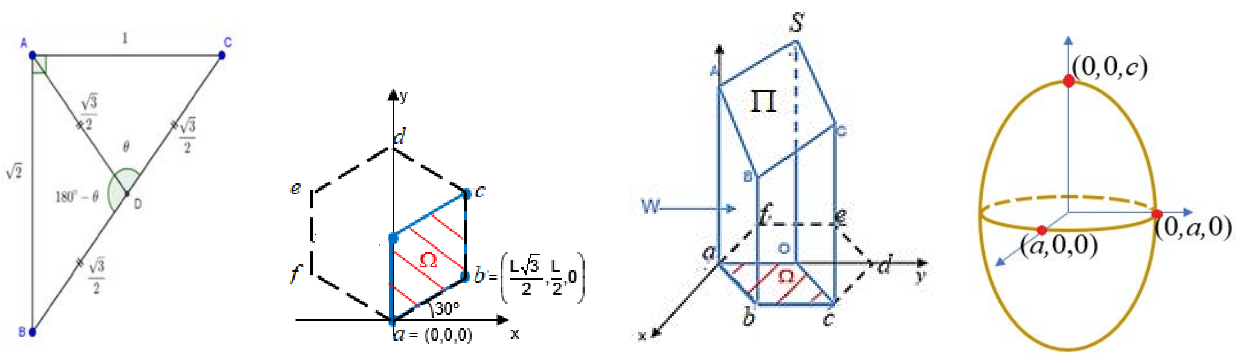
A seguir listamos algumas atividades pedagógicas para vários níveis educacionais que visam a prática da interdisciplinaridade através da presença da matemática na natureza. Antes de iniciar as atividades, é interessante que o professor, em conjunto com o professor de Biologia, converse com a turma sobre a importância das abelhas na natureza e desperte sua curiosidade quanto à organização de uma colmeia e da construção dos favos. O professor pode também tratar de aspectos relacionados à atividade econômica de apicultura e meliponicultura (criação das abelhas sem ferrão), juntamente com o professor de Geografia. O professor de Redação também pode ser incluído nesse tipo de trabalho interdisciplinar, para que se gere uma pesquisa escrita.

Atividade 1: Considerando triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos, determine o menor perímetro e a maior área abrangida para ladrilhar o plano euclidiano.
Objetivo: Mostrar que o hexágono regular é a figura ideal, lembrando que a estrutura dos alvéolos das abelhas apis são hexagonais.

Procedimento: Determinar, junto com os alunos, as condições de ladrilhamento e concluir qual polígono regular (de 3 lados, 4 lados ou 6 lados) possui menor perímetro, uma vez fixada sua área. Sugere-se ao professor expor previamente uma aula sobre ângulos internos e áreas dos principais polígonos regulares. Para maiores detalhes veja Menezes (2017).
Público-alvo: 1º ou 2º ano do Ensino Médio.

Atividade 2: Usando a planificação dos favos hexagonais (Figura 2b), imprima em cartolina, recorte e forme um alvéolo. Reúna e cole os alvéolos formando um favo da colmeia.
Objetivo: Manipular e explorar os favos hexagonais, auxiliando a construção e a fixação dos conceitos geométricos envolvidos de maneira lúdica.
Público-alvo: Ensino Fundamental.

Atividade 3: Sabe-se que uma colônia de abelhas mandaçaia (*Melipona quadrisfaciata*), com aproximadamente 500 abelhas operárias, é capaz de produzir até 2,5 litros de mel por ano, enquanto um enxame de abelhas africanizadas, com 60 mil abelhas produz até 20 litros de mel por ano. Qual é a proporção de mel entre as abelhas citadas?
Objetivo: Trabalhar a regra de três simples.
Procedimento: Através da regra de três simples, pode ser determinada a quantidade necessária de operárias de cada espécie para produzir um litro de mel. Depois comparar os resultados, mostrando que as abelhas nativas produzem 15 vezes mais mel que as apis.
Público-alvo: Ensino Fundamental



(a) (b) (c) (d)

Figura 3: (a) Segundo triângulo retângulo do dispositivo de Teodoro. (b) Projeção do prisma hexagonal no plano XY. (c) Um terço do prisma hexagonal. (d) Esquema de pote elipsoidal.

Atividade 4: Considerado o triângulo da Figura 3a, verifique que o valor do ângulo agudo θ é 70°32’ e de seu complementar é 109°28’.
Objetivo: Observar que os ângulos θ e 180°- θ, formados pela mediana relativa à hipotenusa e a hipotenusa de um triângulo retângulo encontrado no conhecido dispositivo de Teodoro, coincidem com os ângulos do triedro dos alvéolos das abelhas apis (Menezes, 2017).
Procedimento: Sabendo que a mediana relativa de qualquer triângulo retângulo à hipotenusa é igual à metade da hipotenusa, então $\overline{AD}$ mede $\overline{BC}/2$ (Figura 3a). Aplicando a lei dos cossenos ao ΔADC, tem-se o valor de θ.
Sugere-se ao professor expor previamente uma aula sobre triângulos retângulos.
Público-alvo: 1º ou 2º ano do Ensino Médio.

Atividade 5: Supondo que o lado de um hexágono mede L cm, identifique um dos vértices com a origem (Figura 3b) e escreva as coordenadas dos outros vértices.
Objetivo: Descrever as coordenadas dos pontos do hexágono regular no plano XY.
Procedimento: Identificar cada ponto, observando a figura dada (veja a resposta na atividade 8).
Público-alvo: 3º ano do Ensino Médio ou alunos de Geometria Analítica do Ensino Superior.

Atividade 6: Verifique que o volume do alvéolo (Figura 3c) é $V = 3W = \dfrac{3L^2h\sqrt{3}}{2}$.
Objetivo: Determinar o volume de mel de um alvéolo da abelha apis, através de integrais triplas.
Procedimento: O volume da região $W = \left\{(x,y,z) \in \mathrm{IR}^3 \,/\, 0 \le z \le \Pi \quad \text{e} \quad (x,y) \in \Omega\right\}$, onde

$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathrm{IR}^2 \,\Big/\, 0 \le x \le \dfrac{L\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + L\right\}$ e Π é o losango *ASCB₁* (Figura 4),

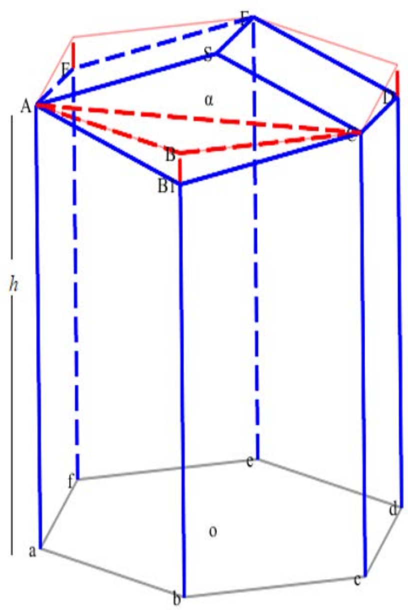
pode ser obtido por meio de integrais triplas.
Público-alvo: Alunos de Cálculo de Várias Variáveis.

Atividade 7: Sabe-se que os potes de mel de uma espécie de abelha nativa são semelhantes a elipsoides. O volume de um elipsoide de revolução é dado por $V(E) = \dfrac{4\pi a^2 c}{3}$, onde a é a metade do diâmetro e c a metade da altura do pote (Figura 3d). (a) Encontre o volume de mel desse pote, sabendo que um pote de mel das abelhas Uruçus amarela tem 3,5 cm de diâmetro e 4,0 cm de altura. (b) Utilizando integrais triplas, verifique que o volume deste elipsoide de revolução E: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$ é dado por $V(E) = \dfrac{4\pi a^2 c}{3}$.
Objetivo: Determinar o volume de mel que cabe em um alvéolo da abelha melípona. No Ensino Médio o professor pode utilizar a fórmula dada; no Ensino Superior pode ser uma aplicação das integrais triplas.
Procedimentos: (a) O professor pode auxiliar na determinação dos valores de *a* e *c*, utilizando a calculadora para obter o volume aproximado dos potes de mel das Uruçus amarelas de 25,656 cm^3. Lembre-se que cada sachê de mel contém 4 cm^3.
(b) Considerar o elipsoide de revolução E: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$, onde a e c são constantes reais positivas e representam as medidas dos semieixos das três elipses obtidas no corte do elipsoide pelos planos coordenados $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente. O volume de E é obtido por $V(E) = \iiint\limits_E dx\,dy\,dz$. Utilizando coordenadas esféricas, temos $V(E) = \iiint\limits_{\tilde{E}} a^2 c \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$,
$0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi < \pi$ (Andrade, 2020; Guidorizzi, 2015).
Público-alvo: (a) Ensino Médio; (b) Alunos de Cálculo de Várias Variáveis.

Atividade 8: Supondo que a altura de um alvéolo de uma abelha apis mede *h* cm e o lado do hexágono mede *L* cm, verifique as coordenadas espaciais dadas na Figura 4.
Objetivo: Descrever as coordenadas espaciais dos vértices de um alvéolo.
Procedimento: O professor pode utilizar algum aplicativo, como o Geogebra, Maple, etc., para mostrar a figura em IR^3 ou formar um alvéolo (Atividade 2) para melhor entendimento.
Público-alvo: Alunos de Geometria Analítica do Ensino Superior.

Atividade 9: Considere os vetores $\overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{AB_1}$ (Figura 4).

a) Encontre o ângulo entre estes vetores.
b) Determine a equação do losango Π*: ASCB₁*.



$$a=(0,0,0) \qquad A=(0,0,h)$$

$$b=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},0\right) \qquad B=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},h\right) \qquad E=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{3L}{2},h\right)$$

$$c=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{3L}{2},0\right) \qquad B_1=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},h-m\right) \qquad F=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},h\right)$$

$$d=(0,2L,0) \qquad C=\left(\frac{L\sqrt{3}}{2},\frac{3L}{2},h\right) \qquad F_1=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},h-m\right)$$

$$e=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{3L}{2},0\right) \qquad D=(0,2L,h) \qquad S=(0,L,h+m);$$

$$f=\left(\frac{-L\sqrt{3}}{2},\frac{L}{2},0\right) \qquad D_1=(0,2L,h-m)$$

onde

$$m=\sqrt{3\tan^2\tfrac{\theta}{2}-1}$$

$$o=(0,L,0)$$

Figura 4: Alvéolo hexagonal e vértices.

Objetivo: Aplicação de um problema real, com álgebra vetorial.
Procedimento: A equação do plano que passa por *ASCB₁* é dada por $\Pi:(P-P_o)\cdot\vec{\eta}=0$, onde η é o vetor normal definido por $\vec{\eta}=\overrightarrow{AS}\times\overrightarrow{AB_1}$, $P=(x,y,z)$ e $P_o=A$. O valor de *m* é determinado utilizando relações trigonométricas.
Público-alvo: Alunos de Geometria Analítica do Ensino Superior.

Atividade 10: Admitindo que as dimensões dos potes de abelhas mandaçaia medem 2,5 cm de diâmetro e 3 cm de altura, (a) determine o volume desses potes; (b) calcule a quantidade de cerume utilizada na construção do pote de alimento, supondo que ele tem uma espessura de 1 mm (área superficial) (Andrade, 2020).
Objetivo: Aplicação de integral de superfície e integral tripla.
Procedimento: O volume de mel é determinado utilizando a fórmula obtida na Atividade 7: $V(E)=\dfrac{4\pi a^2 c}{3}$. Para determinar a área da superfície E, usamos a representação paramétrica $r(u,v)=(a\cos u\,\mathrm{sen}v, a\,\mathrm{sen}u\,\mathrm{sen}v, c\cos v),(u,v)\in T$. A área da superfície de revolução é $A(E)=\iint_T \|r_u\times r_v\|\,du\,dv; T=[0,2\pi[\times[0,\pi[$. Respostas: V=9,82 cm^3, A(E)=22,29 cm^2.
Observação: Independentemente da espécie de abelhas, pode ser notado que elas minimizam a quantidade de cera ou cerume para a construção de seus favos de cria, mel e/ou pólen.
Público-alvo: (a) Ensino Médio; (b) Ensino Superior.

Considerações finais

Problemas contextualizados evidenciam a importância da Matemática junto às demais disciplinas do currículo escolar, como por exemplo Geografia, Ciências e Português, rompendo as barreiras criadas entre as disciplinas, além de gerarem um processo de pesquisa e conhecimento por parte do aluno.

Com este trabalho esperamos despertar nos leitores um maior interesse no estudo de problemas práticos e, em particular, na arquitetura dos alvéolos das abelhas e sua conexão com a geometria. Pretendemos contribuir também para o processo de conscientização ambiental. Algumas espécies de abelhas nativas possuem menos de 5 mm e infelizmente são confundidas e aniquiladas como se fossem mosquitos, portanto sugerimos que nos livros escolares sejam divulgadas algumas fotografias das abelhas nativas.

Referências e bibliografia

Andrade, R. V. (2020). *Matemática aplicada na dinâmica populacional de algumas espécies de abelhas nativas*. [Dissertação de Mestrado, PROFMAT, FFP, UERJ]. https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5773&id2=171030928

Bueno, J. F. (2010). *Sistema automatizado de classificação de abelhas baseado em reconhecimento de padrões*. [Tese de Doutorado em Engenharia, Escola Politécnica, USP]. https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3141/tde-10012011-114124/publico/Tese_Jesus_Franco_Bueno.pdf

D´Ambrosio, U. (1997). *Transdisciplinaridade.* (3a ed.). Palas Athena.

Guidorizzi, H. L. (2015). *Um curso de Cálculo*. (5a ed., *Vol. 3*). LTC.

Kerr, W. E., Carvalho, G. A., da Silva, A. C., & de Assis, M. G. P. (2001). Aspectos pouco mencionados da biodiversidade amazônica. *Parcerias estratégicas, 12*, 20-41.

Menezes, F. R. (2017). *A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos*. [Dissertação de Mestrado, PROFMAT, IME, UERJ]. https://www.bdtd.uerj.br:8443/handle/1/4865

Michener, C. D. (1990). Classification of the Apidae. *University of Kansas Science Bulletin*, 54, 140 − 152.

Pires, C. S. S., Pereira, F.M., Lopes, M.T.R., Nocelli, R.C.F., Malaspina, O., Pettis, J. S., & Teixeira, E. W. (2016). *Enfraquecimento e perda de colônias de abelhas no Brasil: há casos de ccd?. Pesq. Agropec. Bras*, 51(5), 422-442.

Rasmussen, C., & Castillo P. (2003). Estudio preliminar de la meliponicultura o apicultura silvestre en el Perú (Hymenoptera: Apidae: Meliponini). *Rev. Per. Ent*., 43, 159 -164.

Vaiano, A. Z., Márquez, R. G., & Araújo, J. (2015). Abelhas Africanizadas e Construções Geométricas. *Anais do VIII Congresso Scientiarum História.* HCTE/UFRJ.

Vieira, M. I. (1986). *Apicultura Atual: Abelhas Africanizadas - melhor adaptação ecológica, maior produtividade, maiores lucros.* Editora Nobel.