UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-11

Estimulando la modelización matemática mediante la creación de problemas

Uldarico Malaspina

Resumen	En este artículo se presenta y comenta problemas creados en el marco de un taller con profesores de secundaria de Jaén (Cajamarca – Perú). La intención fue crear problemas a partir de alguna situación cotidiana, como una manera de enseñar las matemáticas basándose en la indagación. La experiencia didáctica fue muy valiosa, pues contribuyó a reafirmar el papel fundamental de la indagación y la creación de problemas, como bases para la modelización matemática y para la ampliación de conocimientos. Así, partiendo de indagaciones en relación a un goteo de agua por un grifo doméstico averiado, se inició la modelización correspondiente al cálculo del desperdicio de agua durante un mes y el manejo de funciones y sus gráficos, asociados a una situación concreta; más aún, se muestra que se puede aprovechar la situación para tratar, intuitivamente, una función discontinua. **Palabras clave**: Indagación; creación y resolución de problemas; modelización matemática; variables y funciones; discontinuidad.
Abstract	This article presents and comments on problems created in the framework of a workshop with secondary school teachers from Jaén (Cajamarca – Peru). The intention was to create problems from some everyday situation, as a way of teaching mathematics based on inquiry. The didactic experience was very valuable, since it helped to reaffirm the fundamental role of inquiry and the creation of problems, as bases for mathematical modeling and for expanding knowledge. Thus, based on inquiries regarding a leak of water from a damaged domestic faucet, the modeling corresponding to the calculation of water waste for a month and the management of functions and their graphs, associated with a specific situation, began; moreover, it is shown that the situation can be exploited to treat, intuitively, a discontinuous function. **Keywords:** Inquiry; problem posing and problem solving; mathematical modelling; variables and functions; discontinuity.
Resumo	Este artigo apresenta e comenta problemas criados no âmbito de uma oficina com professores do ensino médio de Jaén (Cajamarca – Perú). A intenção era criar problemas a partir de alguma situação cotidiana, como forma de ensinar matemática a partir da indagação. A experiência didática foi muito valiosa, pois ajudou a reafirmar o papel fundamental da indagação e da criação de problemas, como bases para a modelagem matemática e para a ampliação do conhecimento. Assim, com base em

indagações relativos a uma fuga de água de uma torneira doméstica danificada, iniciou-se a modelação correspondente ao cálculo do desperdício de água para um mês e a gestão das funções e respectivos gráficos, associados a uma situação específica; além disso, mostra-se que a situação pode ser explorada para tratar, intuitivamente, uma função descontínua.
Palavras-chave: Indagação; criação e resolução de problemas; modelagem matemática; variáveis e funções; descontinuidade.

1. Problema

Si por el goteo de agua en un grifo averiado, cada 3 horas se desperdician 240 ml de agua, encontrar la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia.

Cabe aclarar que este problema fue el quinto de una secuencia de problemas tentativos propuestos por un grupo de profesores de secundaria, participantes en un taller sobre creación de problemas de matemáticas, con énfasis en la indagación.

2. La experiencia didáctica

Fue una experiencia didáctica desarrollada en forma virtual en el 2021, con docentes en servicio, de secundaria, de la especialidad de matemáticas: un taller con 100 profesores de secundaria, de la especialidad de matemáticas, seleccionados por la Unidad de Gestión Educativa Local (UGEL) de Jaén (Cajamarca-Perú) como parte de los programas de formación continua en matemáticas y ciencias, que ofrece la Academia Nacional de Ciencias del Perú al profesorado de educación básica. El taller se inició con trabajos grupales a cargo de los integrantes del equipo docente.

El propósito fundamental fue brindar a los profesores en servicio experiencias de aprendizaje o profundización de conocimientos matemáticos, haciendo indagaciones, concretando preguntas y creando problemas a partir de una situación dada, preferentemente en un contexto doméstico cotidiano. Los participantes no habían tenido experiencias similares anteriores. En el grupo de 18 profesores con el que trabajé, propuse como situación el goteo de agua por la avería de un grifo[1] y usé la figura que me envió una colega del equipo docente, tomada de Internet (Figura 1)

A continuación, reproduciré sucintamente las secuencias de expresiones (afirmaciones, interrogantes, dudas) que se suscitaron en el grupo de profesores participantes, a partir de la situación presentada y de algunas preguntas motivadores que fui introduciendo:

Situación:

[1] En el Perú, suele decirse: goteo de agua por un caño malogrado. Esta expresión aparece en las intervenciones de los profesores

Figura 1

¿Podemos crear algún o algunos problemas a partir de esta situación?

- Ideas propuestas por algunos participantes:
    - ➢ Calcular la cantidad de agua que se desperdicia.
    - ➢ Costo extra que genera el desperdicio por ese goteo.

¿Cómo hacerlo?

- Ante esta pregunta hubo algunos intercambios de ideas que finalmente llevaron a algunas consideraciones y a nuevas preguntas:
    - ➢ Tiempo en el goteo.
    - ➢ ¿En qué tiempo se llenaría una taza? (Lo cual requeriría una observación empírica.)
    - ➢ ¿Qué cantidad de agua se desperdicia en un día?
    - ➢ Los recibos vienen por mes, por lo cual convendría calcular el desperdicio en un mes

Con estas consideraciones y preguntas, algunos integrantes del grupo propusieron el siguiente enunciado de un problema tentativo:

<u>Problema tentativo 1:</u>

Calcular la cantidad de agua que se desperdicia en un mes, por el goteo de agua en un caño.

Ante este enunciado, luego de preguntar por su claridad para resolverlo, hubo reacciones como las siguientes

- ➢ ¿Pero cómo se puede calcular la cantidad de agua que se desperdicia?
- ➢ Falta considerar una referencia de la cantidad de agua que se desperdicia en cierto tiempo.
- ➢ Se podría considerar que en 3 horas se llena una taza.

- ¿Y qué capacidad tiene esa taza?
- Podríamos suponer que la taza es de 240 ml.

Con estas consideraciones, se modificó el enunciado anterior:

Problema tentativo 2

Calcular la cantidad de agua que se desperdicia en un mes, por el goteo de agua en un caño, sabiendo que en 3 horas se llena una taza de 240 ml, por ese goteo.

Hubo cierto consenso en que se había llegado a un problema claramente enunciado y que su resolución era cuestión de hacer unos cálculos:

- Calcular la cantidad de agua que se desperdicia en un día (multiplicar 240 ml por 8, por ser el número de veces que hay 3 horas en un día)
- El resultado anterior multiplicarlo por 30

Sin embargo, un profesor hizo notar que debería indicarse que el llenado de los 240 ml de agua debería ser cada 3 horas y no solo indicar que en tres horas se desperdician 240 ml. En esa línea, propuso el siguiente enunciado:

Problema tentativo 3

Si cada 3 horas se llena 240 ml de agua en un balde, encontrar la función que modela la situación.

Este enunciado provocó preguntas y algunas respuestas en el grupo, como las siguientes

- ¿Qué significa ”modela la situación”?
- La expresión se usa…
- ¿La entienden los alumnos?
- ¿Por qué no especificar las variables que intervendrán en la función?
- Tiempo y agua.
- Hay que especificar las unidades de medición.

Recogiendo estas ideas, se propuso otro enunciado, como un refinamiento del anterior:

Problema tentativo 4

Si por el goteo de agua en un caño malogrado, cada 3 horas se acumulan 240 ml de agua en un cilindro, encontrar la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se acumula en el cilindro.

Finalmente, recordando que la intención inicial fue calcular la cantidad de agua que se desperdicia, se hizo otro refinamiento de forma al enunciado anterior y así quedó el problema con el que inicié este artículo:

Problema

Si por el goteo de agua en un caño malogrado, cada 3 horas se desperdician 240 ml de agua, encontrar la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia.

Naturalmente, también hubo una serie de interrogantes y respuestas en el grupo, como las siguientes

- ¿Cuál será la variable independiente?
- El tiempo
- ¿Y la variable dependiente es la cantidad de agua que se desperdicia?
- Claro…
- ¿Qué unidades de medida usaremos?
- Horas y mililitros
- ¿Entonces buscamos una expresión algebraica para la función f?
- Claro… Podemos usar la variable t para representar el tiempo en horas.
- O sea, buscamos $f(t)$.

En este punto se produjo un silencio, como de desconcierto. Entonces comenté que leyendo con atención el problema, ya tenemos un punto del gráfico de la función. Luego de dejar tiempo a la reflexión, pregunté:

¿Podemos encontrar algunos puntos del gráfico de la función?

Mencionaron los pares ordenados (3; 240) y (6; 480) y hubo otras intervenciones:

- ¿Y a 24 cuánto le corresponde?
- ¡Es un caso de proporcionalidad directa!
- ¿Es una función lineal?
- Su gráfico es una recta.

Algunos participantes mostraron estar en terreno seguro e inmediatamente pasaron a usar un sistema de coordenadas cartesianas y mostrar una representación del gráfico de la función que imaginaron (Figura 2)

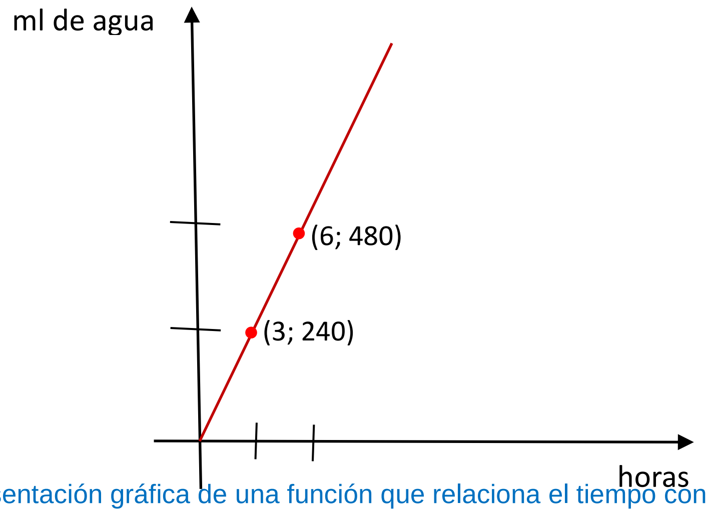

Figura 2. Una representación gráfica de una función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia

Ante este gráfico, ya al final de la sesión de trabajo grupal, surgieron preguntas, como las siguientes

- ¿Con este gráfico ya resolvimos el problema?
- ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función?
- ¿La recta no debería ser más parada? Su pendiente es 80,
- ¿Con este gráfico podemos calcular el desperdicio de agua en un mes?

Ya no hubo tiempo para responderlas en el grupo, pero se percibió la satisfacción de lo trabajado. Cuando se expuso en la reunión plenaria, hice algunos comentarios relacionados con estas preguntas, en los que ahora me detengo un poco más:

- Lo que se pide en el problema (el requerimiento) es la función que relaciona el tiempo con la cantidad de agua que se desperdicia. Esa función está representada en el gráfico mostrado, que refleja la proporcionalidad directa entre el tiempo de goteo y la cantidad de mililitros de agua que se desperdicia. Ciertamente, siendo factible – y sencillo – obtener una expresión algebraica de esa función, será más práctico usar tal expresión para obtener los correspondientes mililitros de agua que se desperdician, considerando determinado tiempo de goteo.

- Una manera de obtener la expresión algebraica de la función, es observando que su gráfico es parte de una recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto (3; 240). Así, su pendiente es 80 y su expresión algebraica es

$$f(t) = 80\,t\,, \text{ para } t \geq 0$$

- En cuanto a la pendiente 80 y la observación que la recta no es lo suficientemente “parada” al tener tal pendiente, es una ocasión para reflexionar sobre las representaciones gráficas teniendo en cuenta las escalas que se consideran en los ejes coordenados. Ciertamente, si la escala en ambos ejes fuera la misma – como suele hacerse habitualmente en clases y en textos – la inclinación de la recta no corresponde a la pendiente 80; pero en este caso, observando el punto (3; 240), el tamaño del segmento horizontal que se usa para considerar la abscisa 3 es – en términos relativos – muy grande, comparado con el tamaño del segmento vertical que se usa para considerar la ordenada 240. El segmento que corresponde a una unidad en el eje horizontal se obtiene dividiendo el segmento horizontal correspondiente a (3; 240) en 3 segmentos de longitud 1 (en la escala adoptada), mientras que el segmento que corresponde a una unidad en el eje vertical se obtiene dividiendo el segmento vertical en 240 segmentos de longitud 1 (en la escala adoptada).

- Para calcular el desperdicio de agua en un mes, habría que calcular el número de horas que tiene un mes, considerando – para simplificar – un mes de 30 días (24 x 30 = 720) y determinar el punto en el gráfico cuya abscisa es 720. La ordenada de tal punto nos dice la cantidad de agua que se desperdicia en un mes. Ciertamente, esto es posible pero engorroso obtenerlo gráficamente y es mucho más fácil usar la expresión algebraica de la función:

$$f(720) = 80 \times 720 = 57600$$

  que nos da la cantidad de mililitros que se desperdicia en un mes.

- Para calcular el costo, tendría que multiplicarse por el número que corresponda, según la tarifa de consumo de agua, que probablemente no esté por mililitros sino por metros cúbicos, lo cual lleva a recordar (o calcular) cuántos mililitros tiene un metro cúbico de agua.

  También deberá tenerse en cuenta que la tarifa podría considerar un pago fijo por un consumo menor o igual a determinada cantidad y entonces examinar si el consumo total, con el desperdicio por el goteo del caño, es mayor que ese consumo.

3. Una mirada desde la creación de problemas y la modelización matemática

Lo trabajado permite hacer diversas reflexiones en el marco de la creación de problemas y en el marco de la modelización matemática. Así, evidenciamos una forma de crear problemas por *elaboración* (partiendo de una situación, en la que no hay un problema explícito propuesto) y podemos percibir las cuatro fases que considero en la creación de un problema: indagar, proponer, resolver y refinar. La indagación (el formularse preguntas) llevó a un primer problema tentativo; el intento de solución y más indagaciones llevaron a un primer refinamiento de tal problema y llegar a un segundo problema tentativo; y así, hasta llegar al problema que es un refinamiento del problema tentativo 4.

En el proceso descrito, desde que se propuso la situación, se puede percibir también esa transición de ida y vuelta entre matemáticas y realidad, que es propia de los procesos de modelización matemática (Borromeo, 2018). Más aún, según Blomhøj (2004), los procesos de modelización tienen los subprocesos de a) formulación del problema; b) sistematización; c) matematización; d) análisis del sistema matemático; e) interpretación/evaluación; y f) validación. En el proceso descrito podemos advertir la presencia de estos subprocesos, salvo el de validación, que significaría – en una situación real – comparar datos observados con datos predichos por el modelo.

Cabe destacar también la presencia muy importante de la indagación, como una fase en el proceso de creación de problemas y destacada por Sala, Font y Ledesma (2021), en todo proceso de modelización.

4. Ampliando conocimientos matemáticos: una función discontinua

Las transiciones de ida y vuelta entre matemática y realidad, en los procesos de modelización, nos llevan a plantearnos preguntas, observando con más atención la situación planteada. Por ejemplo, la función f obtenida, como un modelo matemático para determinar el desperdicio de agua por el goteo en el grifo averiado, tiene como representación algebraica $f(t) = 80\,t$, para $t \geq 0$; y esta es una función continua, con una representación gráfica en la Figura 2[2]. Sin embargo, tratándose de un goteo, estrictamente hablando, el desperdicio de agua no se incrementa a cada instante. Así, podemos suponer – coherentemente con el dato que cada 3 horas se llena una taza de 240 ml – que cada 2 segundos cae una gota. Ciertamente, es un supuesto simplificador, en un marco de proporcionalidad directa. Entonces, cada 2 segundos se incrementa el agua que se desperdicia, pero, desde que empiezan a correr los 2 segundos hasta un instante antes de que se cumplan, el total de agua que se desperdicia se mantiene constante. Esto nos hace pensar en una discontinuidad por saltos de la función[3]. Como tenemos el dato que en 3 horas se desperdician 240 ml de agua, podemos deducir que en 1 hora se desperdician 80 ml de agua, lo cual significa que en 3600 segundos se desperdician 80 ml de agua y, en consecuencia, que en 2 segundos se desperdician

$$\frac{80}{3600} \times 2 = \frac{80}{1800} = \frac{2}{45} \approx 0.044 \text{ ml de agua}$$

Así, asumimos que se comienza la observación en el instante 0 y no cae una gota de agua hasta un instante antes de cumplirse 2 segundos y por ello, en ese lapso, se desperdicia 0 ml de agua; a los 2 segundos exactamente, cae una gota de agua, por lo cual se desperdicia $\frac{2}{45}$ ml de agua y desde ese instante hasta un instante antes de cumplirse 4 segundos, el desperdicio de agua se mantiene en $\frac{2}{45}$ ml, hasta el instante en que se cumple exactamente 4 segundos y cae una segunda gota de agua, por lo cual el desperdicio acumulado de agua ya es de $\frac{4}{45}$ ml.

---

[2] Una manera de tener una idea intuitiva de una función h continua, real, de variable real, definida en un intervalo cerrado [a; b] es observar que es posible hacer una representación gráfica de ella usando lápiz y papel, sin necesidad de levantar el lápiz, desde que se inicia en el punto (a; h(a)). Las funciones que no son continuas, se llaman *discontinuas*.

[3] La discontinuidad se percibe al notar que hay saltos para t = 2, 4, 6, …y en consecuencia el gráfico de la función d no puede hacerse sin levantar el lápiz del papel.

Asumiendo que esto continúa de esta manera, podemos hacer una representación gráfica (parcial) de la función desperdicio de agua, que podemos llamar d, como se muestra en la Figura 3. Su variable independiente es también el tiempo, medido en segundos. Notar que $d(2) = \frac{2}{45}$; $d(4) = \frac{4}{45}$; $d(6) = \frac{6}{45}$

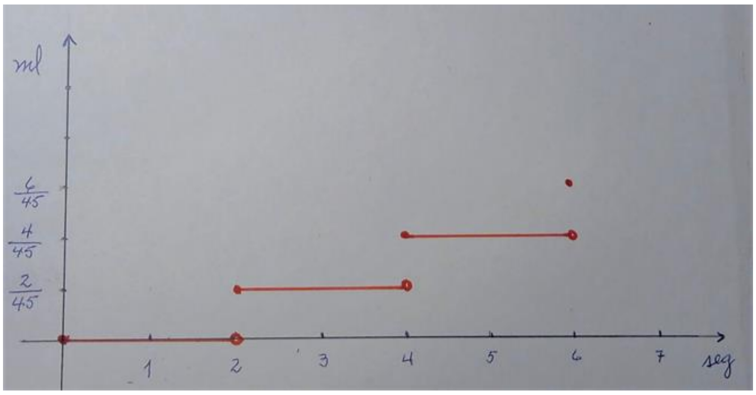

Figura 3. Una representación gráfica de la función d

Es probable que el lector familiarizado con las funciones ya haya reconocido esta función como una función "mayor entero" o "máximo entero"[4] y que suele representarse usando corchetes dobles. La que corresponde al gráfico mostrado, que es una representación de la función desperdicio "más real", considerando que por la avería del grifo hay un goteo de agua y no un chorro continuo de agua, es

$$d(t) = \frac{2}{45}\left[\!\left[\frac{t}{2}\right]\!\right], \text{ para } t \geq 0.$$

¿Y qué relación tiene esta función discontinua d con la función continua f que encontramos antes? Algo fundamental a tener en cuenta es que f relaciona horas con mililitros de agua y d relaciona segundos con mililitros de agua. Así, podemos verificar que los puntos que son los extremos izquierdos de los segmentos horizontales del gráfico de la función d (Figura 3), están alineados en una recta de pendiente $\frac{2}{45}$ / 2; o sea $\frac{1}{45}$. Sin embargo, si en el eje de abscisas consideramos horas

en lugar de segundos, en lugar de dividir $\frac{2}{45}$ entre 2, debemos dividir $\frac{2}{45}$ entre $\frac{2}{3600}$,

que nos da 80. Este número, es la pendiente de la recta sobre la cual está el gráfico de la función f. Por todo esto, si en la Figura 3 usamos horas en el eje horizontal, en lugar de los segundos considerados, podemos intuir e imaginar que los segmentos

[4] La función "máximo entero", hace corresponder a cada número real x el mayor entero que es menor o igual que x. Si llamamos g a tal función, esta suele representarse usando corchetes dobles, por $g(x) = [\![x]\!]$

horizontales reducirán drásticamente su tamaño, pues un segmento de 2 unidades de longitud – unidades que representan segundos – se reduciría a un segmento de $\frac{2}{3600}$ unidades de longitud, considerando unidades que representan horas. Así, los segmentos horizontales prácticamente se reducirían a puntos, todos alineados en una recta de pendiente 80, lo cual nos aproxima al gráfico de la función f (Figura 2). A partir de este ejercicio de imaginación, también podemos decir, metafórica e intuitivamente que, el gráfico de la función desperdicio de agua, por horas, como consecuencia de la caída de una gota de agua ($\frac{2}{45}$ ml), cada 2 segundos, por un grifo averiado, es una sucesión de "puntos" en el plano, muy cercanos entre sí, que comienza en el origen de coordenadas y continúa por el primer cuadrante en la dirección de la recta de pendiente 80 (similar al gráfico de f, en la Figura 2); pero si miramos con un microscopio tal sucesión de "puntos" podríamos ver los segmentos horizontales del gráfico de d, siendo sus extremos izquierdos los puntos de la sucesión.

5. Comentarios finales

La experiencia didáctica descrita, nos hace ver la importancia de considerar en la formación de profesores – tanto inicial como continua – la creación de problemas, como una forma de sentar bases para su formación en modelización matemática, así como de brindar oportunidades de reflexión individual y compartida, que potenciarán sus competencias didácticas y matemáticas (Malaspina, 2017; Malaspina, Torres & Rubio, 2019). Ciertamente, estas experiencias contribuirán a un mejor trabajo en las sesiones de aprendizaje con sus estudiantes.

La indagación, que es una fase importante en los procesos de creación de problemas – sobre todo en la creación por elaboración, partiendo de situaciones – está también muy presente en los procesos de modelización matemática, como el que hemos mostrado.

Se hace evidente que un modelo matemático es una representación de una realidad concreta y a él se llega mediante supuestos – en muchos casos supuestos simplificadores – y transiciones de ida y vuelta con la realidad. Algunos supuestos no explícitos en este caso, son que la presión del agua es constante (si no lo fuera, el desperdicio sería mayor al incrementarse la presión); otro supuesto no explícito es que el grifo no se usa, pues si se usara un determinado tiempo, en ese lapso no habría desperdicio de agua. La consideración de aspectos más minuciosos de la realidad, puede llevar al uso de recursos matemáticos más complejos, pero puede ocurrir que las explicaciones o predicciones que se necesiten hacer en la situación concreta, no requiera del uso de ese grado de complejidad matemática. Por eso la importancia del subproceso de validación en los procesos de modelización. En este caso, siendo d la función que expresa más precisamente el desperdicio de agua en la situación planteada, con los supuestos simplificadores, puede ocurrir que para fines prácticos sea suficiente trabajar con la función f.

Más allá de las observaciones relacionadas con la modelización matemática, se muestra, una vez más, que situaciones reales motivan profundización en las matemáticas. Así, hemos llegado no solo a una función lineal sino a una función "máximo entero" que es un ejemplo importante de función discontinua por saltos.

Bibliografía

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: A theory for practice. In B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). Gotemburgo, Suecia: National Center for Mathematics Education

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* *http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf*

Malaspina, U., Torres, C., & Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, y L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving*. (pp. 133 -151) Suiza: Springer.

Sala, G., Font, V. & Ledezma, C. (2021). Relaciones entre los procesos de modelización matemática y de indagación desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática 30*(1) 116-139 https://doi.org/10.48489/quadrante.23590

Autor: Malaspina Jurado, Uldarico

Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Expositor en foros internacionales de Educación Matemática. Autor y coautor de libros y artículos de Matemática y Educación Matemática. Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Palmas Magisteriales - Grado Amauta