UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Agosto de 2022, Número 65
ISSN: 1815-0640

Teresa Claudia Braicovich

Breve Reseña

Nació en 1962 en la ciudad de Cipolletti, Rio Negro, Patagonia Argentina, realizó sus estudios de grado y postgrado en la Sede Central de la Universidad Nacional del Comahue (UnComa), que se encuentra en Neuquén Capital y también forma parte de la región patagónica argentina.

Desde 1988 es docente del Depto. de Matemática de la Facultad de Economía y Administración de la UnComa y actualmente es la Secretaria Académica de dicha Universidad.

Es investigadora incentivada por el Programa de Secretaría de Políticas Universitarias (SPU) del Ministerio de Educación de Argentina.

En el año 1992 comenzó a integrar Proyectos de Investigación y desde 2006 los dirige, todos se refieren a la temática Grafos, abarcan tres líneas de investigación, desde el punto de vista de algebraico o matemática pura, desde las aplicaciones de grafos y desde la enseñanza en distintos niveles educativos.

Ha sido Codirectora de la Revista UNION en dos períodos, es evaluadora en revistas nacionales e internaciones, también de trabajos y actas de congresos y de proyectos de la Secretaría de Políticas Universitarias (SPU) en Argentina. Ha integrado jurados para concursos docentes en distintas Universidades Nacionales, para tesis de posgrado y para postulaciones a becas.

Ha presentado comunicaciones científicas, en educación matemática y pósters, ha dictado conferencias, cursos, talleres y seminarios en congresos nacionales e internacionales. Ha integrado mesas redondas y paneles y tiene publicaciones en temáticas de matemática pura, matemática aplicada y de educación. Cuenta con publicaciones en Revistas y en cuadernos de Investigación y ha dirigido tesis de grado y postgrado.

ISSN: 1815-0640
Número 65. Agosto 2022
Páginas 1-16

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Enseñanza de Grafos: Un breve recorrido en distintos niveles educativos

Ensino da Grafos: Um breve passeio em diferentes níveis educacionais

Teresa Claudia Braicovich

Universidad Nacional del Comahue. Argentina

Resumen	En este trabajo se presentará parte del recorrido realizado en las últimas dos décadas en el marco de distintos proyectos de investigación referidos a la temática grafos, en los mismos conviven tres líneas de investigación: Algebrización de Grafos, Aplicaciones de Grafos y Enseñanza de Grafos, pero es esta última línea la que da origen a este trabajo. Dentro de los objetivos de estos proyectos siempre estuvo presente el analizar la factibilidad de introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los distintos niveles educativos. Esta teoría tuvo un gran auge en las últimas décadas asociado al gran desarrollo de la informática, pero aún no se encuentra en la mayoría de las currículas. **Palabras clave**: grafos, voronoi, delaunay.
Abstract	In this work, part of the journey carried out in the last two decades will be presented within the framework of different research projects related to the graph theme, in which three lines of research coexist: Algebrization of Graphs, Applications of Graphs and Teaching of Graphs, but It is this last line that gives rise to this work. Within the objectives of these projects, it was always present to analyze the feasibility of introducing some concepts of Graph Theory in the different educational levels. This theory had a great boom in recent decades associated with the great development of computer science, but it is still not found in most curricula. **Keywords**: graphs, voronoi, delaunay.
Resumo	Neste artigo, parte do percurso realizado nas últimas duas décadas será apresentado no âmbito de diferentes projetos de investigação relacionados com a temática dos grafos, nos quais coexistem três linhas de investigação: Algebrização de Grafos, Aplicações de Grafos e Ensino de Grafos. Gráficos, mas é esta última linha que dá origem a este trabalho. Dentro dos objetivos destes projetos, esteve sempre presente

analisar a viabilidade de introduzir alguns conceitos da Teoria dos Grafos nos diferentes níveis de ensino. Essa teoria teve um grande boom nas últimas décadas associado ao grande desenvolvimento da ciência da computação, mas ainda não é encontrada na maioria dos currículos.
Palavras-chave: grafos, voronoi, delaunay.

1. Introducción

La Teoría de Grafos permite abordar el estudio de cuestiones muy diversas, algunas con origen en pasatiempos pero otras en importantes y variadas preguntas de la ciencia o la técnica. Precisamente, esta es una de las razones del ímpetu y desarrollo que la teoría presenta actualmente. Puede tomársela como ejemplo de la utilidad del proceso de abstracción y síntesis (propio del quehacer matemático) que del análisis de diferentes casos particulares infiere una estructura fundamental que los comprende y unifica.

Suele convenirse que la Teoría de Grafos surgió como disciplina autónoma en 1936 con la publicación del libro de König, quién reunió y sistematizó en un todo orgánico numerosos resultados obtenidos en trabajos anteriores sin aparente conexión entre sí. Previamente, en 1922 había sido estudiada como parte de la topología combinatoria por Veblen. Según indica Wilson el primero en designarlos "grafos" fue Sylvester en 1878 al publicar sus resultados sobre Teoría de invariantes en química. Estas referencias pueden encontrarse en Chiappa (1989).

Muchas situaciones de la vida real pueden ser esquematizadas o descriptas, al menos en primera aproximación, por medio de los grados, formados por puntos (llamados vértices) y líneas que conecten algunos de sus pares o uno consigo mismo (llamadas aristas). Solo interesa cuáles son los vértices conectados y no donde están ubicados o la forma que se asigna a cada línea que los une, los grafos aparecen frecuentemente en disciplinas dispares bajo nombres diversos, por ejemplo: redes (ingeniería, economía, salud), sociograma (psicología), organigrama (economía, planificación), diagrama de flujo (programación), diagrama de estado (informática) o estructura molecular (química).

A pesar del gran auge que ha tenido la teoría de grafos en las últimas décadas, no se encuentra demasiado material referido al tema como asunto de enseñanza y menos aún si esa enseñanza es llevada a cabo mediante el apoyo de herramientas computacionales y es sumamente importante enseñar temas de punta de la matemática, se cita en este sentido a Claudi Alsina:

> *El camino de la educación debe permitir una formación de calidad para todos y asegurar también la actualidad de todo lo que se explica y aplica. No es posible que los currículos oficiales queden anclados en temas milenarios o de hace siglos y que no sean permeables a temáticas que siendo formativas tratan problemas de la máxima actualidad*. (Alsina, 2011, p. 16)

2. Conceptos de Teoría de Grafos en el nivel inicial y primario

Debido a que un grafo es una construcción simple, formada a partir de puntos y líneas que los unen, es posible trabajar en estos niveles con algunos conceptos de esta teoría. Los grafos son una buena herramienta para conceptualizar situaciones, para extraer pautas y entender esquemas y lograr transferirlos a situaciones nuevas.

No hay necesidad de ser un experto para utilizar los grafos con cierta soltura, el introducir algunos conceptos resulta útil para despertar el interés por la matemática, para ayudar al desarrollo lógico y a la visión espacial, puede resultar un sostén del razonamiento abstracto. Durante el desarrollo de las experiencias llevadas a cabo en estos niveles educativos se puso a los estudiantes en el papel de “investigadores”, en formuladores de preguntas y en críticos frente a las respuestas.

Se logró encontrar un camino atractivo para desarrollar en los niños competencias básicas aprovechando el gusto que suelen tener por el juego con el fin de acercarlos a nuevos conceptos matemáticos y a razonamientos propios, dinámicos y creativos. Se encuentra más detalle en Cognigni, Braicovich y Reyes, 2008.

2.1. Nivel Inicial

Se llevaron a cabo varias experiencias, en algunos casos se trabajó con grupos pequeños, en otros casos con grupos más numerosos y en varias ocasiones de manera individual. Los dos temas de grafos que se trabajaron en nivel inicial fueron caminos y grafos bipartitos.

Con respecto al primero de ellos, los niños y niñas pudieron resolver laberintos en los cuáles se representen a los caminos por dos líneas paralelas, por complejo que sea, identificando claramente cuando no se puede avanzar.

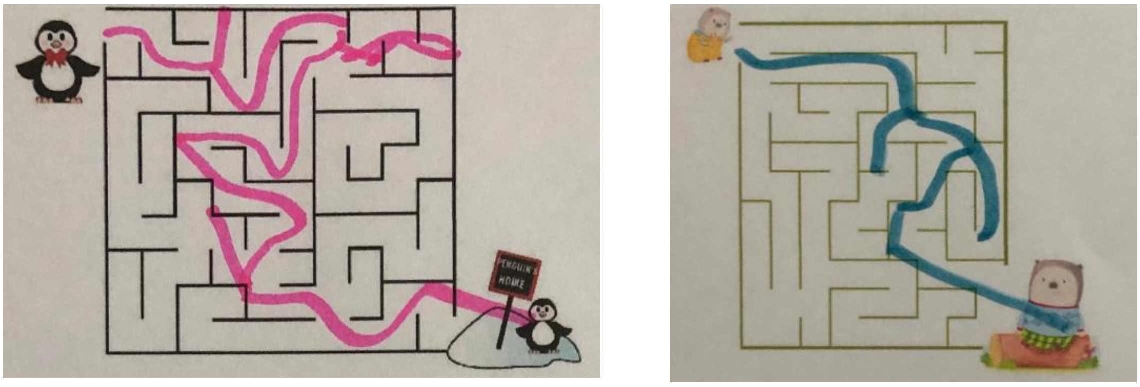


Figura 1. Laberintos resueltos por niños de nivel inicial

Sin embargo, en los grafos, como no hay obstáculos que impiden el avance se les complica y a lo sumo encuentran un camino entre dos vértices que se pide unir, pero afirman de encontrarlo que es el único que existe, aunque no lo sea. Referido a este último tema se trabajó con algunas figuras unicursales muy sencillas, pero ante la consigna de recorrer todas las aristas una sola vez y sin levantar el lápiz, no fueron capaces de cumplir ambas a la vez.

Con respecto a los grafos bipartitos, se les presentó una hoja con 5 dibujos de juguetes a la izquierda y 3 nombres de niños a la derecha, la consigna era que a cada uno de ellos se lo una a dos juguetes, a lo que contradiciendo nuestra hipótesis de que hubieran podido decir que no les alcanzaban los juguetes lo hicieron correctamente. Cuando se pide que le asignen un juguete más a cada uno, nuevamente lo hicieron de manera correcta y en ningún caso repitieron alguno de los juguetes que ya le habían sido asignados a cada niño.

Se muestran a continuación los grafos bipartitos realizados por dos de los niños:

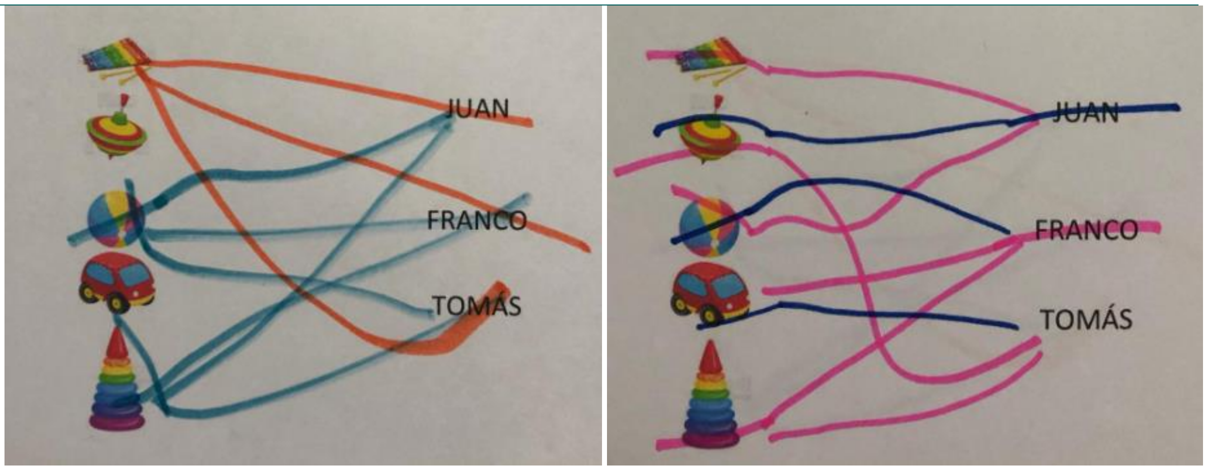


Figura 2. Grafos bipartitos de asignación realizados por niños de nivel inicial

2.2. Nivel Primario

Las experiencias en este nivel se llevaron a cabo en distintos establecimientos educacionales públicos, de radio céntrico, de radio periférico, rurales y también públicos de gestión privada. Se considera al nivel primario dividido en tres ciclos, el primero entre 1º y 3º grado, el segundo comprende 4º y 5º grados y el tercero 6º y 7º grado.

En este nivel se pueden trabajar las propiedades topológicas, con juegos y se pueden usar los grafos para representar situaciones concretas. El pensamiento atomizado del niño en los dos primeros ciclos hace que perciba cada problema individualmente, sin aún captar las regularidades, pero se sugiere enfrentarlos a una gran variedad de situaciones diferentes y entretenidas, que irán desarrollando la intuición, base “fértil” para futuras generalizaciones y comprensión de propiedades. Trabajar con grafos que representen situaciones cotidianas, poniendo la mirada en clasificaciones sencillas y en la definición de los elementos del grafo, para estimular la búsqueda de regularidades, discutir sus propias conjeturas y obtener conclusiones. En el último ciclo se dan en los primeros pasos hacia la argumentación y formulación de hipótesis, aunque luego la manera de verificarlas o refutarlas siga siendo la realización reiterada de la experiencia.

Se presentan a continuación algunos de los temas trabajados, dando el detalle correspondiente a cada ciclo.

2.2.1. Recorridos

En el primer ciclo ya son capaces de realizar recorridos con determinadas condiciones, dado, por ejemplo, un grafo como el que sigue:

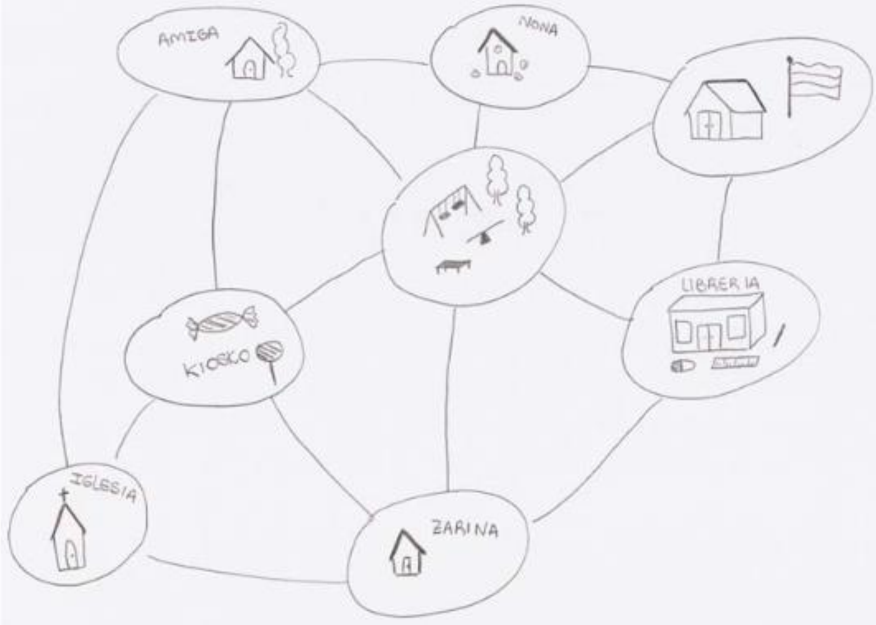


Figura 3. Grafo de actividades realizadas por los niños de primer ciclo

Fueron capaces de encontrar caminos entre lugares que se les pedía, luego se le dieron algunas condiciones, por ejemplo: "*Ir de la casa de Zarina a la escuela sin pasar por la plaza*" o "*Ir desde la escuela a la Iglesia pasando (obligatoriamente) por la librería y sin pasar por el kiosco*". Pudimos comprobar que a esta edad pueden hallarlos atendiendo a todas las condiciones dadas, incluso los caminos relativamente complejos.

Además, pudieron encontrar caminos que pasen por todos los lugares, en algunos casos los encontraron sin buscarlos y se dieron cuenta después de haberlo indicado y en otros casos lo encontraron cuando se les pidió. Se pudo observar que cuando comparan entre ellos lo hallado, cuentan la cantidad de caminos, pero no encuentran todavía una manera de individualizarlos y comparar uno a uno, lo que sí se logra en el próximo ciclo.

Es importante mencionar que al presentarles el mismo grafo que el anterior pero valuado y pedirles que hallen el camino más corto entre dos lugares dados, lo hacen contando el número de aristas recorridas, lo que muestra aún un fuerte acento "topológico" en su pensamiento, ya que no les preocupa la longitud de las aristas. Se les aclara nuevamente que deben prestar atención a la cantidad de cuadras indicada en las aristas, se demoran, pero algunos finalmente lo encuentran, haciéndolo por ensayo y error.

En el segundo ciclo se nota un cambio importante frente a las mismas propuestas, ya que realizaron un trabajo reflexivo previo a la acción o bien hicieron, pero luego analizaron y compararon con compañeros. A partir de 4º grado, se puede observar que, analizan y generan tácitamente una hipótesis, porque se sorprenden si no hallaron lo esperado y expresan "*este no era así" o "este no me sale*", también se alegran con el resultado, expresando frases como "*sí, era así, me salió*", se puede concluir que ya no es el mismo trabajo de ensayo y error como en el ciclo anterior.

Además, son capaces de encontrar recorridos eulerianos, entienden claramente la consigna desde cuarto grado, aunque a esa edad todavía no pueden explicar por qué en algunos casos existe y en otros no. Se divierten, buscan, comparan, insisten en la búsqueda, y se preguntan "*¿por qué este no me da*?", como si fuera algo mágico, sin darse cuenta la cantidad de vértices pares e impares, y cuál es la razón para que no admitan recorrido euleriano. En sexto grado, se dan cuenta que depende de la cantidad de "*salidas y entradas*" a los vértices y logran descubrir la propiedad común de los grafos eulerianos, tanto de los que admiten recorrido euleriano cerrado como abierto.

También a esta edad son capaces de crear grafos para desafiar a los compañeros, lograron "inventar", a modo de pasatiempo, figuras unicursales, algunas para que no puedan ser realizadas (más de dos vértices impares-grafos no eulerianos), otras para que se puedan repetir comenzando en cualquier vértice (todos los vértices son pares-grafos que admiten recorrido euleriano cerrado) y también algunas para que puedan ser realizadas a partir de dos vértices únicamente (exactamente dos vértices impares- grafos que admiten recorrido euleriano abierto).

El tema de caminos trabajado en el tercer ciclo fue el concepto de árbol, en particular el de árbol minimal cubriente. Esto se hizo a partir de un problema concreto. Se entregó a cada alumno un grafo valuado, de 12 vértices y 23 aristas, los vértices eran casas de un barrio cerrado, las aristas caminos no asfaltados entre ellas y el número que se indicaba en cada arista correspondía a la cantidad de cuadras entre las casas que eran extremos de las mismas. El problema consistía en hallar la forma de tener todas las casas del barrio unidas mediante calles asfaltadas, de manera tal que la cantidad de cuadras a asfaltar sea mínima, es decir debían encontrar un árbol minimal cubriente. Para encontrar estos árboles se utilizan distintos algoritmos, los que no fueron dados a los alumnos pues el objetivo de esta actividad era justamente analizar si eran capaces de trabajar de manera algorítmica.

Trabajaron en forma individual, no sabían cuál era la cantidad mínima de cuadras que debían ser asfaltadas, pero se dieron cuenta que debían buscar un árbol en el cuál se encuentren los 12 vértices. Aquí se evidencia que los alumnos interpretaron correctamente el enunciado y lograron relacionarlo con el tema presentado en la clase anterior. Los alumnos hallaron distintos árboles, en principio con más cuadras a asfaltar de las necesarias, se les indicó que era posible disminuir esa cantidad, hasta que hallaron árboles adecuados, Debían detallar el procedimiento utilizado a fin de analizar si existía algún tipo de similitud con algunos de los algoritmos conocidos para hallar árboles minimales cubrientes. Fue muy satisfactorio comprobar que la mayoría (un 75 % de alumnos) encontró algún árbol minimal cubriente de alguna manera que guarda cierta similitud con los algoritmos conocidos, que son: el de Prim, el de Sollin y los dos de Kruskal.

2.2.2. Coloreo

Este tema no fue trabajado en nivel inicial, sí en primaria. En el primer ciclo, atendiendo a que los niños no han trabajado todavía con mapas, se presentó este tema de una manera diferente. Se hizo que ellos coloreen distintos esquemas teniendo en cuenta que a regiones adyacentes debe darse distinto color. En un primer momento no se les dijo que utilicen la mínima cantidad de colores, lo que sí fue realizado en una segunda instancia. Grande fue nuestra sorpresa al comprobar que los niños pudieron optimizar los colores en los pasos sucesivos. Se encuentran secuencias para el trabajo con coloreo en Braicovich (2011).

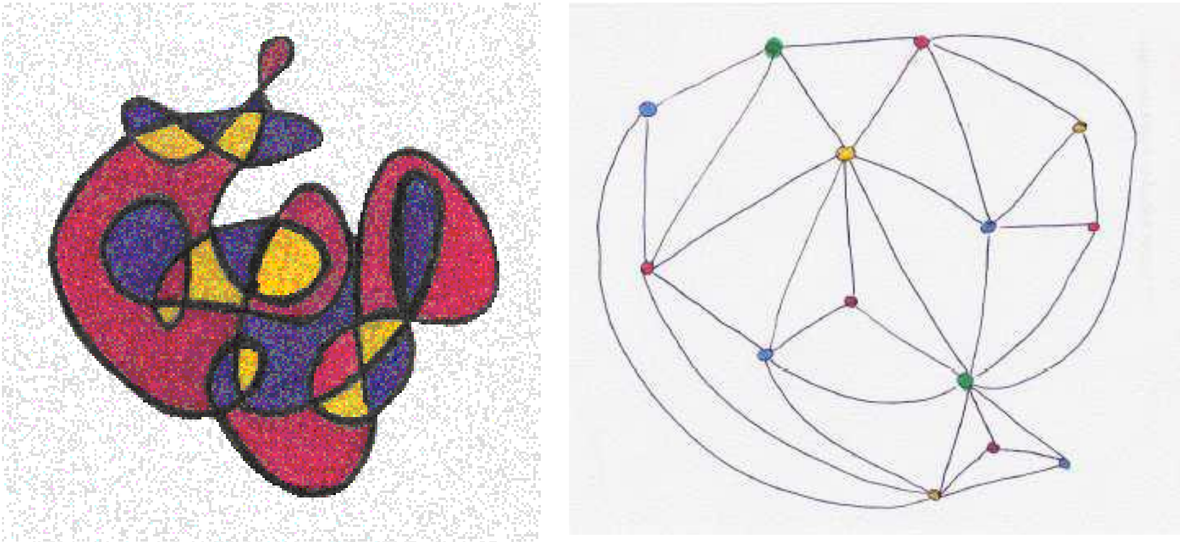


Figura 4. Coloreo de una región y de un grafo planar

A partir del análisis de la experiencia podemos se puede decir que:

- A los 5 y 6 años captan la consigna de pintar de colores diferentes las regiones colindantes en mapas sencillos, trabajar en ello llegando a resultados correctos, aplicando su propia lógica y estrategias acorde a sus edades.
- A los 7 y 8 años ya pueden traducir al lenguaje de grafos y comenzar a analizar el coloreo, encuentran la relación entre mapas y grafos.
- Entre los 9 y 11 años pueden generar hipótesis sencillas y empezar a intuir que existen algoritmos para trabajar con menor esfuerzo, ellos mismos generan sus propios algoritmos, de acuerdo a la Teoría de Landa: "*enseñar a los alumnos a descubrir procesos es más valiosos que dárselos ya formulados*". Se observó que pueden generar hipótesis con justificaciones un poco más precisas que en el período de desarrollo cognitivo anterior.
- A partir de los 12 años, se observó que captan estos conceptos con bastante claridad y trabajan siempre de manera reflexiva, con una hipótesis previa, acertada o no, pero ya se ha abandonado casi por completo el ensayo y error. Pueden realizar deducciones lógicas y son capaces de manejar distintas construcciones mentales.

3. Conceptos de Teoría de Grafos en nivel secundario

En este nivel se trabajaron los cuatro grandes temas que dieron origen a la Teoría de Grafos, que son recorridos eulerianos, recorridos hamiltonianos, planaridad y coloreo y árboles. De estos temas el único que no fue trabajado en niveles anteriores fue el de recorridos hamiltonianos, el motivo por el cuál no fue trabajado es porque es un problema abierto. Pero, justamente, eso es lo que hace rico el trabajo en secundaria porque puede ser comprendido aún para quiénes tengan conocimientos básicos de la Teoría de Grafos.

En términos generales se puede mencionar que se profundizó en los temas anteriores, hallando y formalizando algoritmos, resolviendo problemas y planteando situaciones problemáticas concretas que pueden ser modelizadas y resueltas mediante determinados conceptos de grafos.

4. Teoría de Grafos en nivel universitario

En este punto se presentan las carreras en las cuales se analizó la factibilidad de incluir algunos conceptos de grafos en términos de investigación, concientizando en la existencia de problemas abiertos, en las múltiples aplicaciones de los grafos y en la necesidad permanente de la modelización.

4.1. Carreras de Ingeniería

Es importante dar a los estudiantes herramientas que les resulten útiles para su futuro desarrollo profesional, en este sentido es importante mostrar algunas de las numerosas aplicaciones que la Teoría de Grafos tiene en carreras de Ingeniería.

A continuación, se presentan algunas aplicaciones concretas de acuerdo a las ramas de Ingeniería que se dictan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue, Cognigni, Braicovich y Alfonso (2017).

- <u>Ingeniería Química</u>: Según J. M. Amigó (2007) la Topología molecular es un capítulo que interesa a la Química y que aplica Teoría de Grafos a la descripción de las estructuras de moléculas orgánicas, esto se utiliza en investigación de nuevos fármacos.

- <u>Ingeniería Civil</u>: En diseño arquitectónico, en determinados problemas que tienen que ver con la conectividad de locales y/o ambientes, por ejemplo, se utilizan grafos, ya que los mismos permiten visualizar las conexiones espaciales, que pueden ser de comunicación física como visual, acústica o de adyacencias. Noguera Cuenca (2009).

- <u>Ingeniería en Petróleo</u>: Las redes de proceso de las refinerías son complejas y el esquema de las mismas es tratado con teoría de grafos para un mejor manejo de los datos. Benavidez Vázquez, L. (2013)

- <u>Ingeniería Mecánica</u>: En Rafael Rodríguez Puente (2012) se encuentran varios algoritmos de reducción de grafos para dar solución a determinados problemas y se pueden encontrar aplicaciones en lo que se refiere a redes de work-flow y en redes de computadoras.

- <u>Ingeniería Eléctrica y Electrónica</u>: En Piedra Hernández (2009) se encuentran aplicaciones de grafos para el diseño de complejos circuitos y también en el ámbito de las redes de comunicaciones móviles, desde las líneas telefónicas hasta registros de e-mails se utiliza Teoría de Grafos.

4.2. Profesorado Universitario y Licenciatura en Matemática

En la asignatura *Modelos Matemáticos* del actual Plan de *Profesorado Universitario en Matemática* de la UNCo., vigente desde el año 2014, hay numerosos contenidos de Teoría de Grafos. Cabe aclarar que el tema grafos no se encontraba en el plan anterior al que se encuentra actualmente vigente, por lo que se dictaron en numerosas oportunidades cursos, talleres y seminarios referidos a la temática grafos, esto en el marco de la asignatura “Enseñanza de la Matemática”.

En el plan de la Licenciatura en Matemática de la UNCo. no se encuentra el tema grafos, por lo que desde el equipo de investigación se ofrecen dos materias optativas, "*Teoría de Grafos*" y "*Aplicaciones de Grafos a temas de salud*", siendo requisito para cursar esta última tener aprobada la primera. Ambas asignaturas tienen una carga semanal de seis horas y la duración es de dieciséis semanas.

En estas dos carreras, además de dar los contenidos clásicos de la Teoría de Grafos se ha estudiado y profundizado en otros temas muy actuales, como son las Triangulaciones o Grafos de Dalaunay (TD) y las Regiones o Grafos de Voronoi (RV), los que serán desarrollados a continuación.

Es importante destacar la gran posibilidad que brinda la enseñanza de este tema en estas carreras, existe un gran vínculo con conceptos de otras áreas e incentiva a investigar las aplicaciones.

4.2.1 Triangulación de Delaunay

La Triangulación de Delaunay consiste en una red de triángulos conexa y convexa que cumple la condición de Delaunay, que es la siguiente: "*La circunferencia circunscripta de cada triángulo de la red no debe contener ningún vértice de otro triángulo en su interior, sí se admiten vértices situados sobre la circunferencia*", siendo la circunferencia circunscripta a un triángulo la que contiene a sus tres vértices, el centro de la misma es el circuncentro del triángulo correspondiente.

La denominación de Delaunay se debe al matemático ruso Borís Nikolaevich Delone (1890-1980), que fue quien planteó en el año 1934 la condición antes mencionada.

Dado el conjunto de puntos P = $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}\}$,

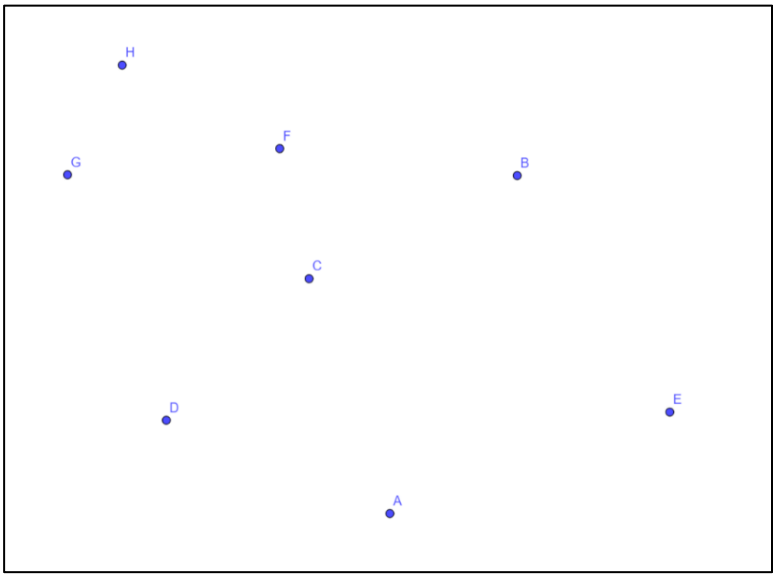


Figura 5: Conjunto de puntos P = $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

La siguiente es la Triangulación de Delaunay y y fue hallado mediante el uso del paquete de Matemática Discreta del software GeoGebra:

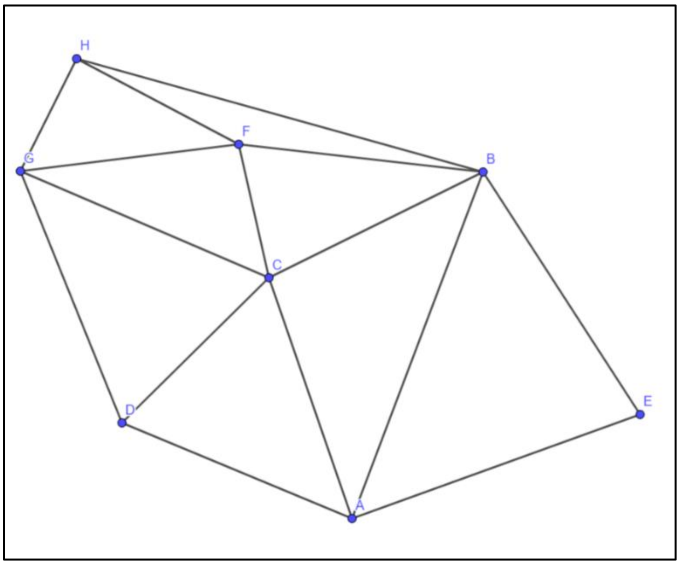


Figura 6: **Triangulación de Delaunay (TD) del conjunto P**

En la próxima figura se presenta la Triangulación de Delaunay, pero se agregan algunas de las circunferencias circunscriptas a los triángulos, donde se observa que no hay puntos del conjunto *P* en el interior de dichas circunferencias.

Es importante aclarar que correspondería haber realizado ocho circunferencias, cada una se corresponde con cada uno de los 8 triángulos, pero, a modo de ejemplo y para que sea más clara la figura, se realizaron solamente tres de dichas circunferencias, las de los triángulos GFC, ABE y ADC.

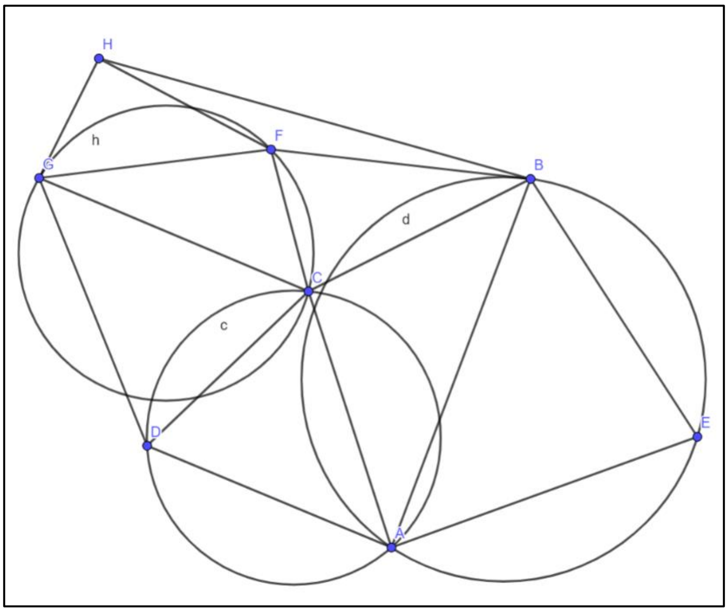
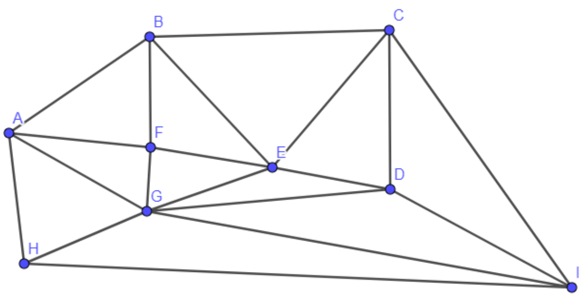


Figura 7: **TD con circunferencias circunscriptas de los triángulos**

Es posible hallar más de una Triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos dado, esto está directamente relacionado con el concepto de cuadrilátero inscriptible. Es importante aclarar que la cantidad de triángulos de una TD no depende únicamente de la cantidad de puntos del conjunto P, se ejemplifica a continuación con conjuntos de 9 vértices, en una de las triangulaciones hay 11 triángulos y en la otra hay 10.



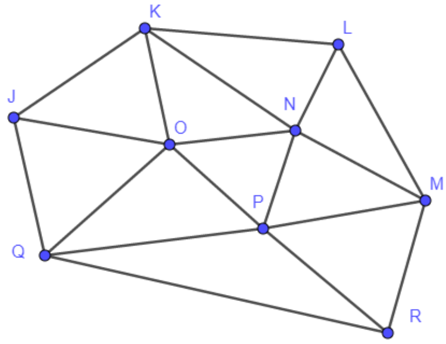


Figura 8: **TD de un conjunto de 9 puntos, una tiene 11 triángulos y la otra 10.**

Sea un conjunto *P* con *n* puntos donde hay *h* de ellos en la envolvente convexa se tiene que la TD tiene (2.*n* – 2 – *h*) triángulos y tiene (3.*n* – 3 – *h*) aristas.

Por lo tanto, como 3 es la cantidad mínima de puntos posibles en la envolvente convexa y n la cantidad máxima, la cantidad de triángulos de Delaunay para un conjunto de 9 puntos está comprendido entre 7 y 13, ya que 7 es la cantidad mínima y se da cuando todos los puntos están en la envolvente y 13 es la cantidad máxima que será cuando solamente hay 3 puntos en la envolvente.

4.2.2 Regiones de Voronoi

El diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos en el plano es la división de dicho plano en regiones, de tal forma, que a cada punto le asigna una región del plano formada por los puntos que son más cercanos a él que al resto de los puntos.

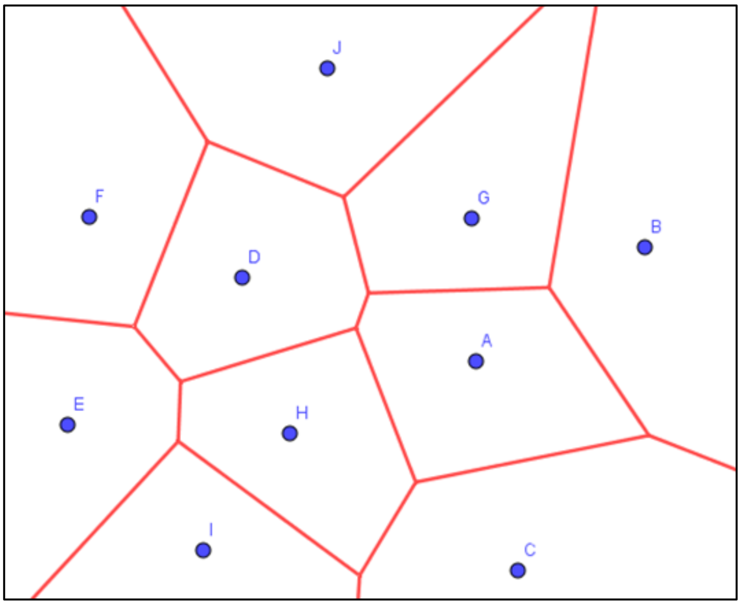


Figura 9: Diagrama de Voronoi (DV) de P = $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$

Se presenta a continuación el Diagrama o Grafo de Voronoi para un conjunto P de puntos dado, el mismo es el de color rojo.

Los grafos de Voronoi poseen una serie de propiedades muy interesantes:

- Los vértices son los puntos de intersección de las líneas, no son los puntos del conjunto *P*.
- Cada región definida por este grafo es convexa.
- Es un grafo planar donde cada vértice tiene grado 3.
- Si el conjunto *P* está formado por n puntos, entonces el grafo de Voronoi tiene n sitios o regiones, a lo sumo $(2n - 5)$ vértices y a lo sumo $(3n - 6)$ aristas. En el caso particular de la figura hay 11 vértices y 20 aristas.

4.2.3. Grafos Duales: Grafos de Delaunay y de Voronoi

Definición: Dado un grafo planar *G*, se puede construir un nuevo grafo *G´*, llamado *grafo dual de G*, asociando un vértice a cada región del grafo *G* y si una arista limita dos regiones en *G*, se añade en el grafo dual *G´*, una arista uniendo los vértices correspondientes a esas dos regiones. Como dos regiones pueden estar limitadas por más de una arista en común, pueden existir aristas paralelas.

En la siguiente figura se presenta un grafo *G* y su grafo dual *G`*:

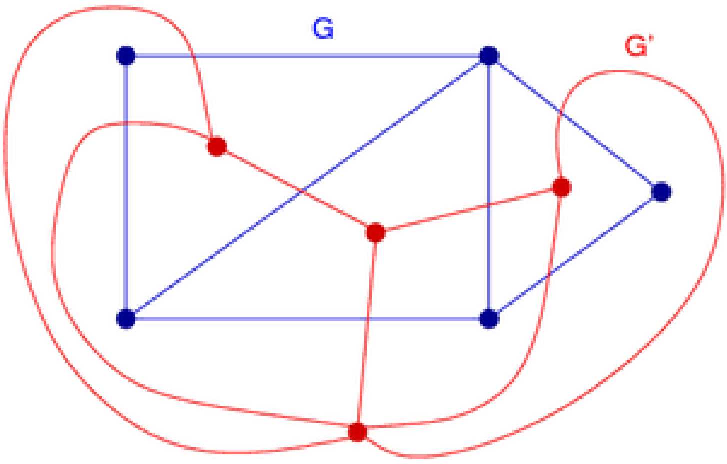


Figura 10: Grafos *G* y *G`* duales
https://es-academic.com/dic.nsf/eswiki/539575

Los grafos de Voronoi y de Delaunay son duales y contienen la misma información, pero representada de maneras distintas. En la próxima figura se presentan ambos grafos para el mismo conjunto de puntos.

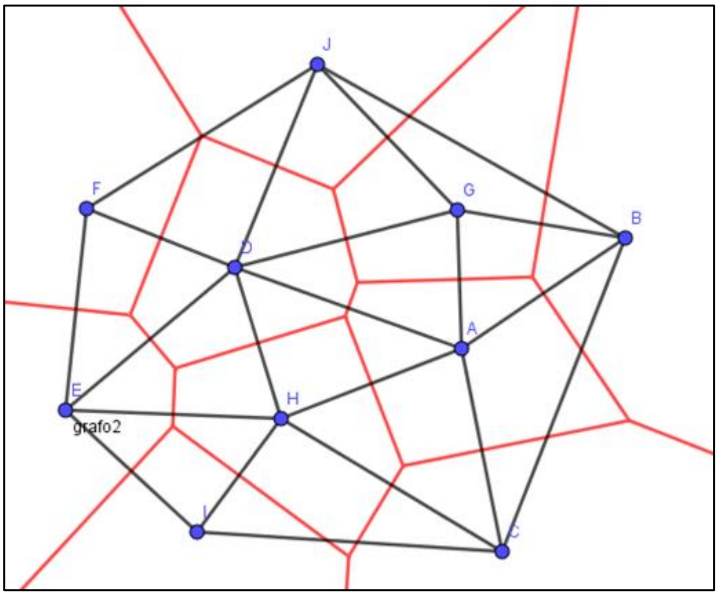


Figura 11: TD y RV para el conjunto de puntos P = $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$

4.2.4. Aplicaciones de los Grafos de Delaunay y de Voronoi

Estos grafos se utilizan en todos aquellos estudios en los que hay que determinar áreas de influencia, por ejemplo, en la cobertura hospitalaria, cercanía de estaciones de bomberos, centros comerciales, mesas electorales, control del tráfico aéreo, en el sistema de radionavegación GPS (Sistema de Posicionamiento Global) y telefonía móvil. Además de las aplicaciones mencionadas existen otras muy interesantes que serán dadas sucintamente a continuación:

Aplicación en fútbol

Una posibilidad que brindan estos grafos es la visualización del fútbol, ya que más allá del control de la pelota, los jugadores de fútbol crean y controlan el espacio disponible en el campo.

Para visualizar este proceso, lo ideal es usar las TD que conectan los jugadores con líneas, y su grafo dual, el de de Voronoi, que muestra el espacio controlado por cada jugador. También es posible mejorar la experiencia de los espectadores de televisión en la repetición de las jugadas en los partidos.

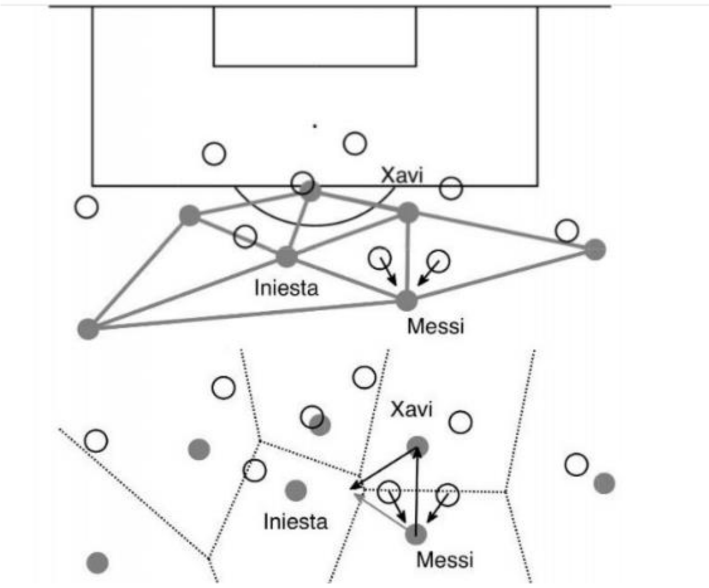


Figura 12: Representación de campo de fútbol
https://francis.naukas.com/2017/03/15/diagramas-de-voronoi-en-el-futbol/

Aplicación en seguridad: detección facial

En el 90% de los casos la detección y/o reconocimiento de rostros, se obtienen fotos de personas con una especie de grilla de puntos conectados por líneas en sus rostros. Como si de alguna forma esos triángulos o polígonos delimitados por puntos especiales del rostro, fueran lo que “ven” los algoritmos de reconocimiento facial. Estos puntos son esenciales para muchas aplicaciones y modelos de visión por computadora. Viotti, E. (2021)

Se puede detectar el rostro de una persona a partir de una imagen, obtener los puntos de referencia de la cara o *face landmarks* y por último utilizando la Triangulación de Delaunay, dibujar una grilla de triángulos sobre el rostro, que luego servirá para identificar si es el mismo rostro.

Figura 13: TD para detección facial
https://medium.com/idatha-enterprise-experience-academic-s/detecci%C3%B3n-de-caras-y-triangulaci%C3%B3n-de-delaunay-con-dlib-y-opencv-3d039374bec9

Aplicación en Imágenes

Se utilizan en las nuevas tecnologías y en especial la Tomografía Axial Computarizada (TAC) para la generación de volúmenes 3D. Cisneros, H; González, C.; Puente, A.; Camue, C.; Oropesa, R. (2014).

Se debe analizar, en caso necesario, si todos los datos obtenidos por la TAC son suficientes. De no ser suficientes se procede a generar los datos faltantes por interpolación de los ya existentes, posibilitando así obtener un volumen lo más cercano a la realidad. Luego de pasar la imagen por interpolación se genera una malla, uno de los métodos más empleados es el algoritmo de Watson, que permite obtener una Triangulación de Delaunay a través de un conjunto de puntos para cualquier región del espacio. Esta triangulación se emplea con el propósito de enlazar los puntos o vértices detectados con sus vecinos cercanos y así detectar el volumen más cercano a la realidad.

5. Conclusiones

A modo de síntesis, se puede decir que existen distintos argumentos para pensar que sería positivo introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los distintos niveles educativos, es aplicable (varios temas de esta teoría han sido utilizados creando distintos modelos en diversas áreas), es accesible (para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos básicos de matemática) y es atractivo (existen situaciones que hacen que los alumnos deban explorar y conjeturar para poder llegar a los resultados).

Por último y pensando en la proyección a futuro, para incluir este tema en las currículas es posible que deba realizarse un cambio gradual, pues hay docentes que no lo conocen. No en todos los planes de estudio de la carrera de Profesorado de Matemática y de Magisterio se encuentra el tema grafos, por lo que sería importante trabajar con los contenidos, pero también en herramientas para la enseñanza del mismo.

Por último y a modo de cierre se transcribe una frase de Claudi Alsina

> *Un grafo es una construcción extraordinariamente simple: unos puntos y las líneas que los unen. Son grafos desde el mapa del metro hasta la ruta de un mensajero, y en general, las redes de todo tipo que cimentan el mundo contemporáneo. La observación cuidadosa de estas simples estructuras nos abre los ojos a un universo de enlaces y conexiones donde las matemáticas reinan supremas*". (Alsina, 2011).

Referencias Bibliográficas

Amigó, J.; Falcó Montesinos, A.; Galvez, J.; Villar, V. (2007) La Topología Molecular. Dpto. de Físico Qca. Universidad Politécnica de Valencia. Dpto. de Matemática Aplicada. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 39. Pag.135-149.

Alsina, C. (2011) *Mapas del metro y redes neuronales*. Ed. Rodesa. Villatuerta, Navarra.

Benavidez Vázquez, L.; Águeda Ríos Solís, Y. (2013) Detección de pérdidas en la industria petrolera. *Memorias arbitradas del VIII Congreso de Ingeniería Industrial y de Sistemas.* Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Nueva León. México.

Braicovich, T.; Caro, P.; Cerda, V.; Osio, E.; Oropeza, M.; Reyes, C. (2009). *Introducción a la Teoría de Grafos*. Editorial Educo. Neuquén.

Braicovich, T.; Cognigni, R.; (2011). Coloreando la geografía desde el plano al toroide. *Revista Números. Vol 76*. 135-148. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemática.

Chiappa, R. A. (1989). Algunas motivaciones históricas en la teoría de los grafos. *Revista De Educación Matemática*, Vol. 4. Núm. 1. Recuperado a partir de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/11171

Cisneros, H; González, C.; Puente, A.; Camue, C.; Oropesa, R. (2014). Generación de imágenes tridimensionales: integración de tomografía computarizada y método de los elementos finitos. Rev. Cubana Investigaciones Biomédicas. Vol. 33 Nº 3.

Cognigni, R.; Braicovich, T.; Reyes, C. (2008). Recorriendo grafos a lo largo de la educación general básica. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina* 23. 109-125. Universidad Nacional de Córdoba.

Cognigni, R; Alfonso, L; Braicovich, T. (2017) *Libro de actas: XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*. Vol I. pp. 225-230. Universidad Nacional de Santiago del Estero. Santiago del Estero, Argentina.

Noguera Cuenca, I. (2009) Aplicaciones Arquitectónicas de la Teoría de Grafos. Valencia, España.

Piedra Hernández, V.; Paternostro Movilla, C. (2009). Aplicaciones de la Teoría de Grafos en la Informática. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia.

Rodríguez Puente, R.; Marrero Osorio, S.; Lazo Cortés, M. (2012) Aplicación de un algoritmo de reducción de grafos al Método de los Grafos Dicromáticos. *Revista electrónica: Ingeniería Mecánica*. Vol.15. N° 2. Pág. 158-168.

Viotti, E. (2021) Detección de caras y Triangulación de Delaunay con Dlib y OpenCV. IDATHA // Enterprise Experience & Academic´s