El Contraejemplo como Herramienta Didáctica en el Curso de Topología General

Rodrigo Yoel **Combe** Aparicio
Universidad de Panamá
Panamá
rcombe11@gmail.com

Palabras clave: contraejemplo, demostraciones, topología, proposiciones.

Uso del Contraejemplo como Herramienta Didáctica

Como docente de la Licenciatura en Matemática soy consciente de las limitaciones que presentan los estudiantes en la realización de demostraciones de teoremas y otros resultados. El contraejemplo en la asignatura de topología es una herramienta fundamental para refutar resultados importantes tanto para los espacios métricos como para muchos resultados dentro de los espacios topológicos tales como la continuidad de funciones, los axiomas de separación y numerabilidad, la compacidad y la conexidad, entre otros.

Un contraejemplo no es más que un ejemplo donde se expone la falsedad de una proposición. El uso de un contraejemplo como método para demostrar que una proposición es falsa facilita la construcción de conocimientos matemáticos abstractos de forma significativa y contribuye al desarrollo del pensamiento crítico, ya que permite visualizar una situación donde se verifican las hipótesis, pero la conclusión es falsa.

Contraejemplos y Representaciones como Recurso Didáctico en las Clases de Topología General

a. Si A y B están en un espacio métrico (X, d), entonces
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$
<u>Contraejemplo</u>: En $(\mathbb{R}, d)$ con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ se define $A = (-3,1)$ y $B = [1,2)$. Es claro que $\overline{A} = [-3,1]$ y $\overline{B} = [1,2]$. Así pues, $\overline{A \cap B} = \emptyset$ que difiere de $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

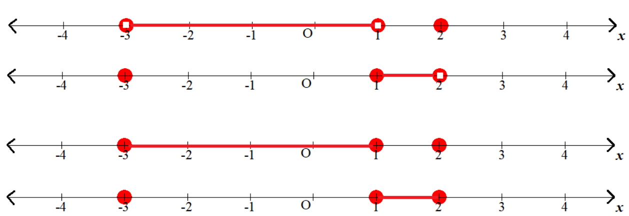

Figura 1: Representación gráfica de los conjuntos A y B y sus adherencias.

b. Si (X, τ) es un espacio topológico T_1, entonces (X, τ) es un espacio topológico T_2.
Contraejemplo: El espacio de Sierpinski $X = \{0, 1\}$, con $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ es T_1, pero no es T_2 ya que $\{0, 1\}$ es una vecindad de 1 y contiene al 0.

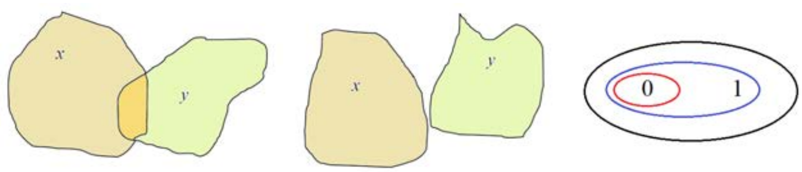

Figura 2: Representación los axiomas de separación T_1, pero no es T_2 y del espacio de Sierpinski

c. Si (X, τ) es un espacio topológico regular, entonces (X, τ) es un espacio topológico T_3.
<u>Contraejemplo</u>: Para $X = \{a, b, c\}$ se considera $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. No es difícil ver que X es un espacio regular. Sin embargo, (X, τ) X no es un espacio T_3, ya que $\{b\}$ y $\{c\}$ no son conjuntos cerrados.

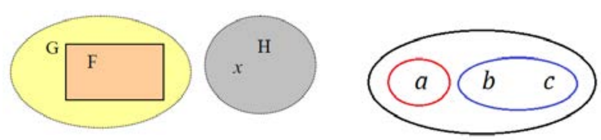

Figura 3: a. Propiedad de un espacio topológico regular. b. Espacio topológico (X, τ).

d. La propiedad de ser una sucesión de Cauchy en espacios métricos es un invariante topológico.
<u>Contraejemplo</u>: Consideremos $X = Y = (0, +\infty)$. La función $f: X \to Y$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es claramente un homeomorfismo de X en Y. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}: n \geq 1\right\}$ es una sucesión de Cauchy en X, pero bajo el homeomorfismo f, a esta sucesión le corresponde la sucesión $\{n: n \geq 1\}$ la cual no es una sucesión de Cauchy.

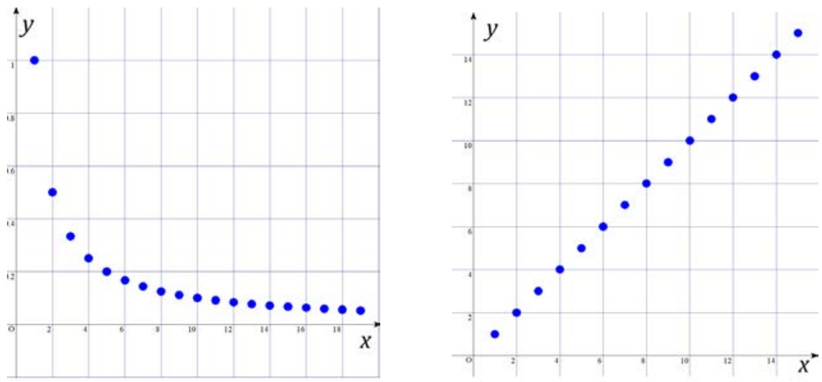

Figura 4: a. Sucesión $\left\{\frac{1}{n}:\ n \geq 1\right\}$. b. Sucesión $\{n:\ n \geq 1\}$.

Es importante resaltar que la construcción de contraejemplos no es una tarea fácil, ya que en asignaturas como Topología, Análisis y Variable Compleja el vislumbrar un contraejemplo no siempre es tan sencillo y requiere de cierto nivel de abstracción debido a que es un proceso que no sigue ninguna regla en particular.

Referencias y Bibliografía

Mederos, O. y Mederos, B. (2009). Los ejemplos y contraejemplos como herramientas para facilitar el proceso de generalización conceptual. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 257–266.

Morales, L., y García, O. (2013). Ideas para enseñar: El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 9(35), 161–175

Rosales, A. (2015). Contraejemplos en Matemáticas. Pensamiento Matemático, V(2), 61–78.