La construcción de un isomorfismo de espacios vectoriales con $\mathbb{R}^n$: El caso del profesor en formación que interpreta desde lo funcional, matricial y geométrico-figural

Claudio Zamorano Sánchez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
claudio.zamorano@mail.pucv.cl
Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), Analizamos las construcciones y mecanismos mentales que se evidencia cuando se construye un *isomorfismo de espacios vectoriales* (IEV) con $\mathbb{R}^n$, a través, del ciclo metodológico de APOE en una problemática situada, con la cual, se ponen a prueba los esquemas previos que contienen para interpretar desde una perspectiva funcional, matricial y geométrica-figural al IEV. Ello permitió investigar sobre su naturaleza unificadora al interior del álgebra lineal (AL). Resultados preliminares de la investigación dan cuenta de la importancia del contexto y las tareas para el reconocimiento de los objetos del AL en otros contextos y la existencia de relaciones entre los esquemas IEV-Funcional, IEV-Matricial y IEV-geométrico-figural, para la generación de un esquema multinterpretativo del IEV. Esto último se fundamente a través de Descomposición Genética (DG), que pone de relieve los mecanismos mentales asociados a la construcción del IEV como un esquema.

Palabras clave: Educación Matemática; Matemáticas; Educación universitaria; Formación Docente Inicial; Teoría APOE; Resolución de Problemas; Didáctica del Álgebra Lineal; Valparaíso, Chile.

Introducción

El presente reporte de investigación es un aporte a la enseñanza del álgebra lineal (AL) desde la perspectiva de APOE, aplicada a un contexto para que el profesor de formación inicial se enfrente a situaciones problemáticas que no están situadas en contextos tradicionales y pueda desarrollar un proceso de construcción conceptual. En este sentido, el objetivo principal del reporte de investigación es mostrar las construcciones mentales de un profesor en formación cuando construye un IEV, a través, de una situación contextualizada en la que el estudiante deberá enfrentarse a diversas tareas para evidenciar sus estructuras mentales cuando interpreta desde un perspectiva funcional, matricial y geométrica figural el IEV.

En este sentido, es necesario que los estudiantes puedan reconocer que los objetos del AL evolucionan en su complejidad, esto es, los sistemas de ecuaciones, matrices, espacios vectoriales, bases, junto con las transformaciones lineales, interactúan para construir nuevos objetos. Por lo tanto, para llevar a cabo el reporte de investigación sobre el IEV, se diseñó una actividad exploratoria contextualizada que, a partir del reconocimiento de un conjunto solución de un sistema de ecuación, se aplicarán acciones sobre los esquemas de transformación lineal (TL) interpretada como una función para (1) analizar las estructuras mentales cuando se construye el IEV y, así, (2) determinar los mecanismos mentales involucrados en la construcción del esquema funcional, matricial y geométrico-figural para interpretar al IEV.

En general, Para alcanzar el objetivo anterior, nos preguntamos cómo se construye el IEV y con ello, qué mecanismos mentales permiten unificar los esquemas —funcional, matricial y geométrico-figural del IEV— a través del ciclo metodológico de APOE que considera (1) a partir de un estudio teórico sobre el objeto IEV, el diseño de una descomposición genética (DG) hipotética que será puesta a prueba en un profesor en formación a través de (2) un instrumento que valide las construcciones declaradas en la DG hipotética, para luego, (3) analizar las respuestas entregadas por el profesor en formación y, así, validar o refinar la DG de IEV.

Finalmente, los resultados muestran que el IEV se desarrolla con base en tres interpretaciones —funcional, matricial y geométrico-figural— a través de las cuales la presente investigación busca identificar la existencia de un esquema que interprete desde estas tres perspectivas del IEV.

Antecedentes

Sobre el diseño de situaciones

Cuando un profesor en formación cursa la asignatura de AL, utiliza las definiciones y propiedades para solucionar situaciones problemáticas. Sin embargo, cuando debe aplicar en contextos no tradicionales, el uso de ellas va más allá de un algoritmo aprendido

En este sentido, la importancia del AL radica no solo en la aplicación de sus conceptos en la resolución de problemas propios de la línea sino también, la posibilidad de ser una herramienta concreta para resolver problemáticas contingentes en otros contextos ligados al desarrollo del Pensamiento Científico. En este sentido, investigadores de la Didáctica de la Matemática (DM) (Trigueros y Oktaç, 2019) han reportado en diversas ocasiones que, la enseñanza del AL carece de contextos donde el estudiante pueda aplicar, de forma concreta, cómo los conceptos del AL son un pilar fundamental, para resolver situaciones problemáticas en otros contextos donde se desarrolle el conocimiento científico.

Por consiguiente, la realización de actividades contextualizadas en situaciones problemáticas no tradicionales contribuye a visualizar la comprensión que tienen los estudiantes sobre el cómo se construye un objeto matemático. En este sentido, Trigueros (2019) argumenta que las actividades con un contexto real contribuyen a la comprensión de conceptos abstractos del AL y, junto con ello, proporcionar información sobre el cómo están estructurados los conocimientos para la identificación de factores que ayuden a su evolución.

Hay que mencionar que el diseño de actividades, desde la perspectiva de APOE considera, no solo la búsqueda de situaciones ficticias para la aplicación de un teorema o una propiedad, sino que, la posibilidad de que el profesor en formación pueda mostrar las estructuras y mecanismos mentales que tiene sobre un objeto matemático y el cómo, a través, de tareas ─en el contexto de APOE, acciones─ permitirá la asimilación para la generación de un nuevo esquema como una evolución más compleja. Por tanto, estas acciones sobre esquemas previos, según Trigueros y Oktaç (2019), permitirá medir el razonamiento de los estudiantes sobre un objeto matemático, así como la articulación con dominios que no son propios de la matemática.

En consecuencia, el diseño de actividades contextualizadas es un camino viable para mostrar las construcciones mentales en un grupo de profesores en formación. En este sentido y, en lo particular, junto con responder ¿Cuál es el rol del IEV para la articulación de los conceptos del AL? También será analizar ¿Cómo las tareas contribuyen para el análisis de las construcciones y mecanismos mentales que tiene sobre el objeto IEV?

Por lo tanto, el objetivo de este reporte de investigación es investigar sobre el IEV como un concepto unificador del AL, a través de un problema contextualizado con distintas tareas, para evidenciar los mecanismos mentales asociados a una DG hipotética.

Sobre el objeto de *isomorfizar*[1]

Una noción importante para la construcción de la matemática es determinar si existe un *isomorfismo* entre estructuras algebraicas. Saber cómo se comporta una estructura en conocimiento de otra, es de gran utilidad para poder analizar sus características y propiedades. En este sentido, la revisión bibliográfica en libros especializados de álgebra abstracta nos muestra que, para determinar que dos estructuras son *isomorfas*, se precisa de un homomorfismo biyectivo entre las estructuras y, con ello, una construcción conceptual que subyace a la noción de función. Este punto de vista nos muestra la naturaleza abstracta del *isomorfismo* entre estructuras y, por tanto, que requiera un mayor esfuerzo para su comprensión.

Estas observaciones que están alojadas en el estudio de los homomorfismos de grupos, nos suponen dos consideraciones importantes para cuando estudiemos el *isomorfismo* entre espacios vectoriales. La primera, considera el estudio sobre las dimensiones de las bases que generan los espacios vectoriales, debido a que se puede intuir la existencia de un *isomorfismo* solo observando la cardinalidad de ellas y, en el caso que no se pueda probar o intuir, poder construir un *isomorfismo* entre espacios vectoriales.

Por lo tanto, estas consideraciones generan el cuestionamiento sobre las condiciones que se deben cumplir para que un estudiante pueda *isomorfizar* espacios vectoriales, que interpretado desde APOE equivale a preguntar *¿cuáles son los mecanismos mentales que muestran los estudiantes cuando construyen estructuras Isomorfas*?

[1] Isomorfizar. Acción de construir un isomorfismo entre espacios vectoriales.

Marco teórico

La teoría APOE, es un modelo que describe desde una perspectiva cognitiva como un individuo aprende un concepto matemático, describiendo cómo estos son construidos mentalmente (Arnon et al., 2014), a través, de mecanismos mentales como la *interiorización, la encapsulación, desencapsulación, coordinación y reversión,* que permiten que las estructuras mentales evolucionen según el nivel de construcción del individuo (Oktaç, 2019).

Es así, como APOE nos proporciona elementos y fundamentos teóricos para describir el nivel de construcción que muestra un estudiante, con base en las producciones y respuestas que entrega, cuando se enfrenta a un objeto del AL desde una perspectiva cognitiva.

De acuerdo con ello, para el presente reporte de investigación, se han considerado unas preguntas de evaluación relacionada con la solución general (S_g) de un sistema de ecuación, para realizar una acción que afecta a los esquemas de TL interpretada como una función, el de matrices y el geométrico para explorar aquellos aspectos que articulan un esquema multinterpretativo del IEV. En relación con esto último, consideramos que el estudiante debe mostrar los siguientes componentes que serán el soporte de una DG de IEV que mostramos a continuación:

- Sistemas de ecuaciones lineales como un objeto, dado que el estudiante debe poder plantear una situación desde un contexto, determinar el conjunto solución del sistema de ecuación y poder visualizarlo desde una interpretación matricial y geométrica-figural
- Conjunto solución de un sistema de ecuación S_g cómo un proceso que le permita calcular el conjunto generador.
- La noción matemática de Función como un esquema, con la cual se evidencie la comprensión de los conceptos de función, dominio, recorrido, imagen y preimagen. Además, propiedades y teoremas ligadas a la inyectividad, sobreyectividad.
- La noción de Transformación Lineal (TL) cómo un esquema, tal que el estudiante a través de las bases α, β pueda asociar un vector $v \in \alpha$ a un vector $w \in \beta$, tal que: $T(v) = w$, para coordinarlo con el teorema de la unicidad de TL.
- La noción de base como un proceso para coordinar con el proceso de matriz para construir la matriz cambio de base.

Dado que se espera que los profesores en formación muestren las construcciones y mecanismos mentales mencionados, él deberá plantear y resolver el sistema de ecuación, para que pueda identificar al conjunto solución S_g como un conjunto de vectores que determinan a un espacio vectorial y, así, permita identificar los vectores que lo generan para ser *isomorfizados* con otro espacio vectorial, digamos $\mathbb{R}^n$.

En este sentido al coordinar el conjunto solución S_g con las propiedades de la función, podrá coordinar para construir un proceso de caracterización del conjunto solución, con la finalidad de comprenderlo como el dominio de una TL. Luego, este proceso de coordina con la noción de base de un espacio vectorial para encapsularlo en la TL. Ello propone que, al realizar una acción de analizar las propiedades de los espacios identificados sobre el dominio y recorrido de TL, se podrá tematizar en un esquema de IEV.

Cabe destacar, que otra forma de presentar el IEV (Figura 1) puede ser a través de la matriz cambio de base $[T]_{\alpha}^{\beta}$ cuando se solicita al estudiante analizar las propiedades de la TL construida. Así puede identificar los conceptos que determinan la construcción de un esquema multinterpretativo de IEV.

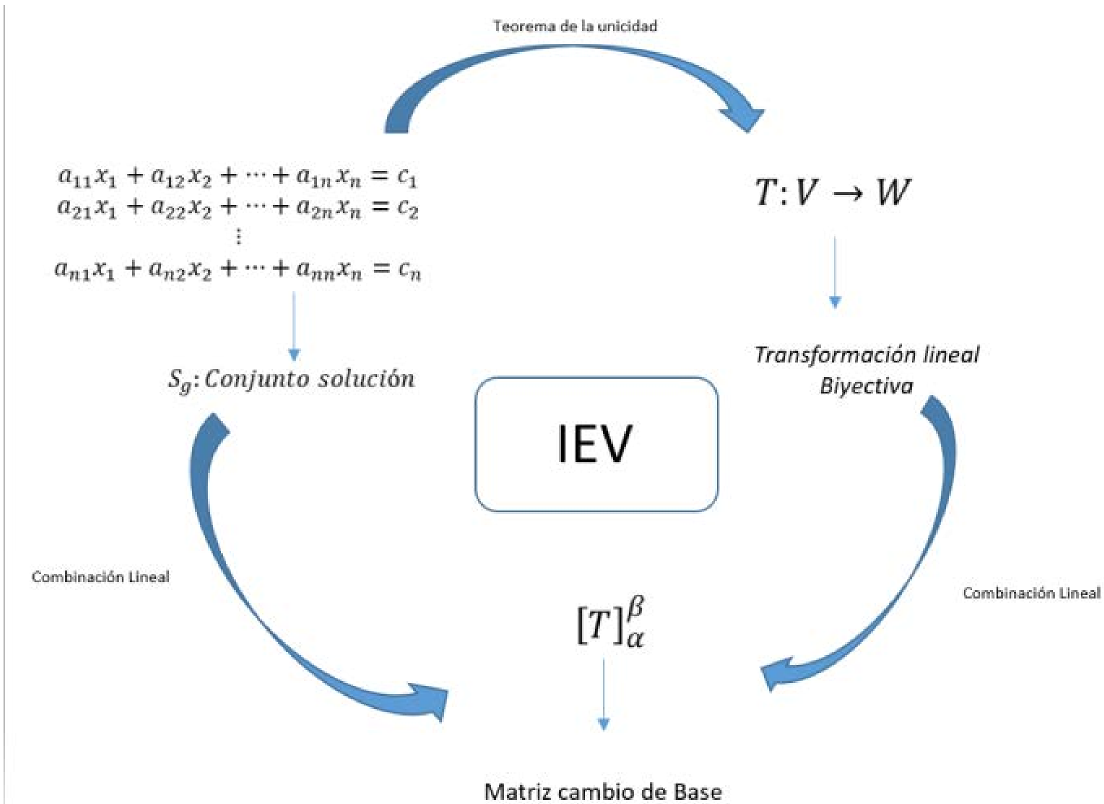

Figura 1. Construcción conceptual del IEV

Luego, según Piaget y García (1989) existen tres tipos de esquemas, el Intra, Inter y Trans. En este reporte de investigación, el nivel esquema Intra de IEV se evidencia cuando el estudiante establece conexiones parciales entre los esquemas de sistemas de ecuación y matrices, es decir, esta conexión es producto de un conocimiento práctico, por ejemplo, que un sistema de ecuación está relacionado con una representación matricial. Así mismo, un nivel esquema Inter de IEV se establecen relaciones de equivalencia más concretas, es decir, el estudiante vincula al esquema de funciones, sistemas de ecuaciones de manera completa o parcial. Finalmente, en un nivel esquema Trans de IEV, se han establecido esquemas entra las relaciones de equivalencia, entre sistemas de ecuaciones, TL y Matrices, mostrando una coherencia completa para la construcción del IEV.

Metodología

Para este reporte de investigación se ha considerado aplicar el ciclo metodológico de APOE. Ello conlleva (1) analizar y proponer un modelo de DG viable, que permita mostrar hipotéticamente cómo un estudiante construye el IEV desde una perspectiva multinterpretativa (funcional, matricial y geométrica-figural). Luego, (2) diseñar un instrumento que permita validar los mecanismos y estructuras mentales planteados en la DG hipotética y, por último, (3) analizar las respuestas de los estudiantes para validar o refinar la DG hipotética que muestra las construcciones mentales de los estudiantes. Finalmente, se espera poder identificar desde APOE aquellos componentes que permitan diseñar un modelo multinterpretativo para el IEV.

La situación problemática

Para este reporte de investigación se han seleccionado las respuestas de un grupo de profesores en formación de un curso de AL de una carrera de Pedagogía en Matemática, y que están relacionadas con el IEV.

Se ponen de relieve en el análisis de las respuestas, las justificaciones que utilizan los profesores en formación para aplicar y resolver problemas, utilizando conceptos que propicien la construcción de los esquemas de las interpretaciones funcional, matricial y geométrica-figural, para la generación de un esquema multinterpretativo de IEV. A continuación, se muestra una situación contextualizada:

El contexto*: La ley de Kirchoff para circuitos paralelos (Figura 2), indica que la sumatoria de los voltajes en una malla es igual a cero. Considerando que una malla es un camino cerrado por la cual la corriente sigue un camino y que, en cualquier resistencia, la caída de voltaje se determina por la ley de Ohm (V=R*I), determinar las corrientes involucradas en el siguiente circuito:*

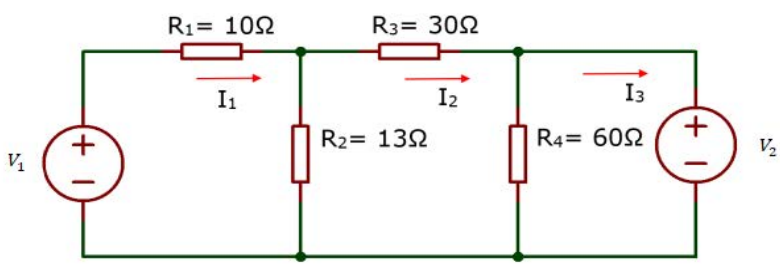

Figura 2. Circuito paralelo

Luego de plantear el problema, responde preguntas como: Plantear el sistema de ecuación; determinar el conjunto solución, *isomorfizar* con algún $\mathbb{R}^n$, entre otras. Con ello, se busca validar el desarrollo del esquema que se caracteriza por la DG hipotética para construir el esquema de IEV.

Resultado

En el siguiente apartado se muestran algunos resultados obtenidos al analizar las respuestas de dos estudiantes. El análisis está en concordancia con los niveles de esquema *Intra, Inter y Trans*, descritos en el apartado anterior y que, muestran la construcción conceptual del IEV como un modelo multinterpretativo de IEV.

En este sentido, cuando uno de los estudiantes responde a las preguntas planteadas, observamos (Figura 3) que puede establecer conexiones de correspondencia entre elementos del sistema de ecuación y las matrices. Ello se debe a que teóricamente el estudiante comprende que un sistema de ecuación tiene una representación matricial, tal como se evidencia en la Figura 3.

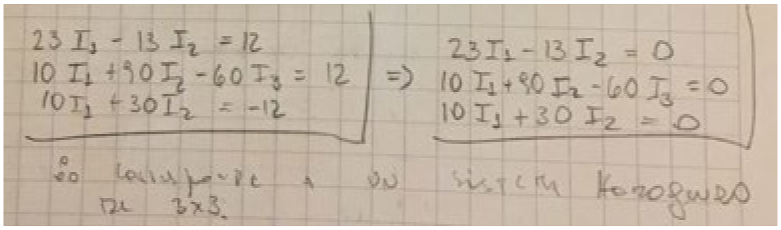

Figura 3. Sistema de ecuación asociado al contexto problemático.

A continuación, al seguir indagando en las respuestas del estudiante, el conjunto solución determinado corresponde a un subespacio de $\mathbb{R}^3$, esto es, está determinado por un subespacio de dimensión 2.

Luego, al estudiante se le solicita *isomorfizar* el conjunto solución con algún $\mathbb{R}^n$, para evidenciar la construcción de una TL que cumpla el teorema de la unicidad de TL. Para realizar esta acción, deberá buscar en sus esquemas previos una coordinación entre las bases que determinen la TL y, así, la existencia de un *isomorfismo* con algún $\mathbb{R}^n$.

La interpretación del conjunto solución, como un subespacio vectorial S de dimensión dos, es el inicio para la construcción de la TL del subespacio con el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, considerando para ello la base canónica (Figura 4).

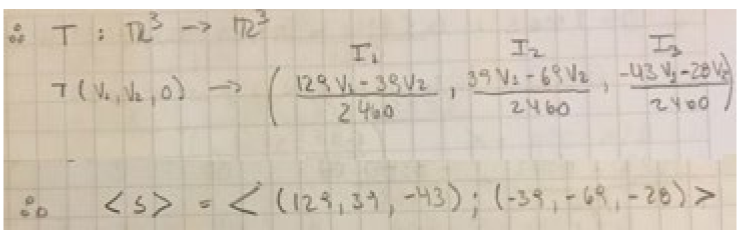

Figura 4. Determinación de la base del conjunto solución y la TL asociada.

Por lo tanto, se evidencia que el estudiante puede construir el IEV desde distintos esquemas, lo que muestra la necesidad de avanzar a la construcción de un esquema multinterpretativo de IEV.

Discusión de los resultados y conclusiones

De acuerdo con los datos recopilados en las respuestas de los estudiantes, podemos reportar que el nivel de *esquema Intra-IEV* es el que predomina. Ello se debe a que, las acciones solicitadas sobre el conjunto solución indican que las conexiones que realizan los estudiantes son con la intención de llegar a una construcción del IEV a nivel procedimental, es decir, construida por un conocimiento específico de una TL y, como consecuencia, probar la existencia de un IEV, verificando la inyectividad y sobreyectividad.

Un componente emergente importante, para verificar el IEV, es la posibilidad de indagar en las interpretaciones del conjunto solución como un plano, para poder *isomorfizarlo* con $\mathbb{R}^2$, es decir, a través del estudio de las dimensiones, podrá construir la TL del conjunto solución con la base canónica incorporando otros elementos y poder avanzar a un *esquema Inter-IEV*. Ahora, para seguir indagando hacia el *esquema Trans-IEV*, se sugiere ampliar la muestra a más estudiantes.

Con respecto a las acciones solicitadas, es necesario incorporar una entrevista para profundizar en las respuestas de los estudiantes, pero se sugiere avanzar en el planteamiento de acciones concretas que profundicen aún más en la forma que se interpreta un IEV desde una interpretación geométrica-figural.

Agradecimientos

Beca Doctorado Nacional N° 21221645 de su Beca y FONDECYT N°1180468

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory*. New York: Springer.

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM, 51(7),* 1043-1054.

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press.

Trigueros, M. (2019). The development of a linear algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM, 51(7),* 1055-1068.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task design in APOS theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43-55.