



## Enseñanza problémica de las probabilidades mediante paradojas

Luis **Maraví** Zavaleta  
I.E. Salaverry, Alto Salaverry  
Perú  
[a20146949@pucp.pe](mailto:a20146949@pucp.pe)

### Resumen

El presente trabajo tiene como propósito describir los elementos del enfoque problémico advertidos en la enseñanza de la probabilidad durante la solución del problema del Gran Duque de Toscana en el nivel secundario. Para lograr tal propósito se diseñó una actividad donde el núcleo fue el problema mencionado, mientras que la estructura fue diseñada en base al enfoque de Enseñanza Problémica. Entre los principales hallazgos se encontraron la creación de la situación problémica, la definición del problema docente, así como la utilidad de los impulsos heurísticos para resolver el problema y, así, aprender aspectos de la probabilidad. Se precisan, por otro lado, mayores investigaciones en torno a factores que generaron dificultades, tales como el uso del tiempo, el tamaño del grupo escolar y el propio contenido docente, así como en el estatus didáctico del factor que provoca la situación problémica.

*Palabras clave:* Educación Matemática; Educación secundaria; Enseñanza presencial; Mediación pedagógica; Resolución de problemas; Investigación exploratoria; Enseñanza de la probabilidad.

### Introducción

Debido al impacto causado por la pandemia de Covid-19 en la enseñanza-aprendizaje se precisa explorar diferentes enfoques para desarrollar dicho proceso (Reimers, 2022). En este contexto, que además plantea variados desafíos, Maraví (2021) propone la necesidad de dominar conceptos estadísticos y elementos de incertidumbre y probabilidad (Wild et al., 2018). Dentro de los últimos aspectos mencionados, tópicos importantes constituyen la identificación de la situación de incertidumbre, el experimento aleatorio y la determinación del espacio muestral. Al respecto Malquichagua (2019) indica que lo último podría generar conflictos y confusiones que se encontrarían vinculadas con la comprensión que se posea acerca de la concepción clásica de la

probabilidad, tal como lo muestra el caso del problema del Gran Duque de Toscana, estudiado en su momento por Székely (1986), Maistrov (1974) y Perero (1994). Empero, este problema histórico que también es una de las paradojas de la probabilidad, posee múltiples potencialidades didácticas que necesitan ser canalizadas (Contreras et al., 2011; Borovcnik & Kapadia, 2014). Por ello, este trabajo se plantea describir los rasgos relacionados con la enseñanza problémica que se advirtieron durante la solución del mencionado problema en el nivel secundario, dadas las particularidades de esta paradoja que lo vinculan con tal enfoque de enseñanza. En específico, se desea explorar la contribución del enfoque de enseñanza problémica en la solución del problema del Gran Duque de Toscana. Para lograr dicho propósito, primero se realiza un breve examen de los elementos teóricos vinculados con el problema mencionado y con el enfoque de enseñanza problémica. Luego, se mostrarán los métodos empleados durante el estudio, así como los resultados obtenidos. Por último, se consignarán las consideraciones finales del trabajo.

### **Elementos teóricos**

#### **Esencia de las paradojas. El problema del Gran Duque de Toscana**

La incertidumbre es una categoría que muestra cómo se interrelacionan los polos contradictorios de lo posible y lo real en el mundo objetivo (Rosental & Straks, 1965; Rosental & Iudin, 1973; Tabak, 2004). Un ejemplo de tal relación lo brindan las paradojas de la probabilidad. Estas reflejan una disparidad entre la intuición y el desarrollo conceptual existente sobre un concepto (Borovcnik & Kapadia, 2014; Batanero et al., 2005). Tal es el caso del problema del Gran Duque de Toscana (David, 1962; Maistrov, 1974; Székely, 1986) que se desarrolla en el presente trabajo y que, debido a su esencia, debería permitir que los estudiantes reformulen sus concepciones primarias sobre los conceptos teóricos asociados a él (Leviatan, 2002).

El problema del Gran Duque de Toscana proviene del siglo 16 y está relacionado con el juego de los dados. Estudiado y resuelto por Galileo Galilei bajo la muy probable instancia de su protector financiero, el Gran Duque de Toscana (David, 1962), consiste en lo siguiente: al lanzar tres dados y sumar los resultados, las posibilidades de obtener 9, 10, 11 y 12 se consiguen con seis ternas de sumandos en cada caso. Ahora bien, agrega Galilei, es conocido por la experiencia de los jugadores que obtener 10 y 11 es más ventajoso (es decir, más probable) que tener 9 y 12 (David, 1962). Para probar esta afirmación y resolver la paradoja, resulta importante considerar el orden en que se obtienen los puntajes de cada dado, como lo indicaron Cardano y Galilei (Székely, 1986; Tabak, 2004) pues dos procedimientos de conteo distintos pueden arrojar diferentes probabilidades. De esta forma se constata que 9 puede ser obtenido de 25 formas, mientras que 10 de 26 formas, por lo que es más probable obtener este resultado. Se observa la dificultad que genera el problema para determinar todos los elementos del espacio muestral y así calcular las probabilidades (Borovcnik & Kapadia, 2014).

#### **Enfoque problémico de la enseñanza y su aplicación a la didáctica de la probabilidad**

El carácter contradictorio dialéctico intuición-realidad que se revela en la paradoja del Gran Duque de Toscana permite justificar la adopción de un enfoque de enseñanza pertinente a él. En el presente trabajo, se considera que tal enfoque es el de la enseñanza problémica. En este

enfoque, el concepto de contradicción es importante debido a que es la fuerza motriz que genera el cambio de la realidad (Dafermos, 2018), algo que acontece también en el campo cognitivo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje (Torres, 1993). En ese sentido, además, la enseñanza problémica tiene por finalidad capacitar sistemáticamente a los alumnos para la resolución independiente de cualquier problema durante la enseñanza, mediante la interacción de los elementos de enseñanza-aprendizaje productivos con los reproductivos (Torres, 1999).

Para desarrollar el mencionado enfoque se consideran cuatro categorías dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, cuyo carácter didáctico y esencia filosófica son abordados por Maraví (2020): a) situación problémica, b) problema docente, c) tareas y preguntas problémicas y, d) lo problémico. De acuerdo con Torres (1999), la primera categoría refleja en el ámbito cognitivo del estudiante la contradicción entre lo conocido y lo desconocido que se plantea durante el desarrollo de la clase de matemáticas, mientras que el problema docente precisa aquello que debe ser buscado para resolver la situación problémica. Entre tanto, las tareas y preguntas problémicas son actividades e impulsos, respectivamente, dirigidos a resolver el problema docente (Torres, 2013). Finalmente, lo problémico es el nivel de complejidad considerado en las tareas, preguntas y habilidades de los estudiantes para resolver el problema. Existen varias experiencias antiguas y relativamente recientes con el empleo del enfoque problémico en enseñanza de la matemática (Danilov, 1968; Jungk, 1979; Torres, 1993; Torres, 1999). Empero, hasta el momento no se han encontrado referencias acerca de los vínculos existentes entre dicho enfoque y la enseñanza de las probabilidades. Precisamente, ese pretende ser uno de los aportes del presente trabajo, mediante la metodología que se reseña a continuación.

### **Elementos metodológicos**

La experiencia se desarrolló a mediados de agosto de 2022 en una sección de quinto grado de educación secundaria perteneciente a una institución educativa pública de la periferia de Trujillo. La sección estuvo conformada por cincuentatres estudiantes entre varones (49%) y mujeres (51%), entre 16 y 17 años de edad, quienes se reencontraban después de dos años de ausencia física de las aulas debido a la pandemia de Covid 19. Su identidad fue preservada mediante letras mayúsculas. En especial, se enfocó la atención en las evidencias brindadas por tres estudiantes del grupo de investigación, A, B y C. Esto se realizó dada su pertenencia a diferentes segmentos de la sección: La primera (A) es una estudiante quien posee bajas calificaciones en el área de matemáticas, en tanto que B es un estudiante con altas calificaciones quien, además, estudia en las mañanas en un centro de preparación preuniversitario. El estudiante C también posee altas calificaciones, pero tiene carga familiar propia y debe dedicar medio día a trabajar en su propia empresa.

Cabe indicar que en el presente trabajo se emplea una metodología basada en el estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 1999), donde se recogen aspectos de la propuesta metodológica de Lee (2002), quien considera al conocimiento como una producción colectiva de profesor y alumnos en la que él no es un investigador extraño al grupo. En ese sentido, la actividad planteada en este trabajo posee similitudes con las mostradas por Contreras et al. (2011), así como por Batanero y Borovcnik (2016) para la enseñanza de las probabilidades mediante paradojas. Así, la actividad aplicada consideró una versión adaptada del problema del Gran Duque de Toscana presentado por Borovcnik y Kapadia (2014). Las primeras redacciones

de dicha versión fueron validadas por un grupo de profesores y alumnos extranjeros vía grupo de mensajería por internet. Como resultado, el problema fue planteado a los alumnos durante la experiencia bajo la siguiente redacción: *Sea el experimento “lanzar tres dados y observar la suma de los resultados obtenidos”. Se afirma que las probabilidades de obtener 10 u 11 son mayores que las de obtener 9 o 12. ¿Esto es verdad?*

Por otro lado, la estructura de la actividad consideró las etapas de la situación típica de enseñanza de sucesión de indicaciones de carácter algorítmico, que es una de las formas en las que se estructura la enseñanza de la matemática con empleo de recursos heurísticos como sustrato de la enseñanza problémica (Majmutov, 1983). Por ello, el procedimiento empleado comprende las fases de orientación hacia el problema (con el aseguramiento del nivel de partida y la motivación y orientación hacia el objetivo), el trabajo en el problema para buscar la secuencia de pasos del procedimiento, la solución del problema mediante la formulación de la sucesión de indicaciones y, por último, la evaluación de la solución y de la vía (Torres, 2002). En el transcurso de las fases mencionadas se analizaron las producciones de los estudiantes, así como sus testimonios con ayuda de los elementos provenientes de la enseñanza problémica. Como procedimiento para asegurar la validez de los hallazgos observados se recurrió a la triangulación de analistas (Mok & Clarke, 2015), así como a la presentación de los hallazgos a las personas sobre las que se realizó el estudio (Patton, 1990).

## Resultados

Este trabajo se planteó describir los elementos del enfoque problémico advertidos en la enseñanza de la probabilidad durante la solución del problema del Gran Duque de Toscana en el nivel secundario. En específico decidió explorar la contribución del enfoque de enseñanza problémica en la solución del problema del Gran Duque de Toscana. Para ello, desarrolló la experiencia donde se pudieron apreciar, entre otros, los siguientes resultados.

Tras haber planteado el problema en clase, se suscitó incertidumbre en algunos estudiantes, como en el caso de B. Obsérvese lo indicado por él en la figura 1:

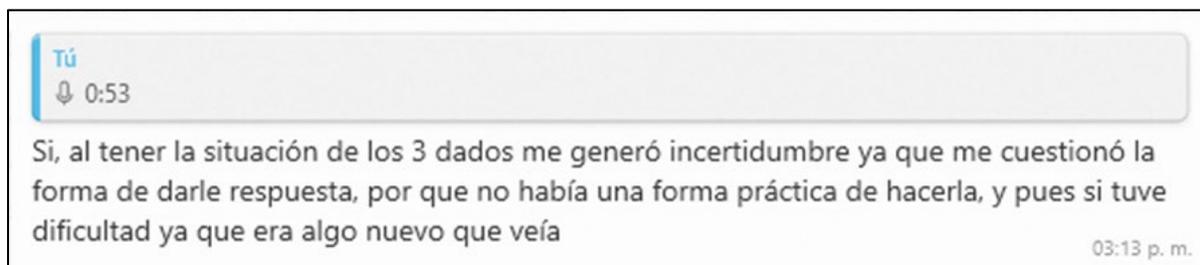


Figura 1. Testimonio del estudiante B

Este momento inicial de incertidumbre, empero, pudo haber sido superado por el estudiante B y otros compañeros suyos cuando, después del primer encuentro con el texto del problema, ellos comenzaron a calcular la suma de los resultados al lanzar dos dados. Esta estrategia, por su parte, permitió a otros compañeros encontrar el camino para la solución del problema. Empero, como la incertidumbre persistía en algunos otros estudiantes, se recordó la importancia de la determinación del espacio muestral en problemas sobre probabilidades, así

como se indagó con ellos acerca de la cantidad y forma de los eventos en este problema específico (216 ternas). Dado que el interés por arribar a la respuesta se incrementó, junto con el decrecimiento de la incertidumbre para los alumnos, se tomó la decisión de plantear preguntas que deberían permitir el arribo a respuestas más explícitas, tales como: “¿cuáles son las sumas de resultados que dan 9, 10, 11 o 12, respectivamente? ¿Podemos calcularlas en forma organizada en una tabla?”. En esa línea, la estudiante A elaboró una tabla (Figura 2), que fue comparada con el resultado inicialmente obtenido por la mayoría de alumnos (donde se tenía 15 eventos equiprobables, el mínimo valor de la suma de las ternas era 3 y el máximo, 18). A partir de la tabla quedó claro cuál era el evento más probable durante el lanzamiento de los tres dados y la suma de los puntajes obtenidos.

9	10	11	12
1+2+6	1+3+6	1+4+6	1+5+6
1+3+5	1+4+5	1+5+5	1+6+5
1+4+4	1+5+4	1+6+4	2+4+6
1+5+3	1+6+3	2+3+6	2+5+5
1+6+2	2+2+6	2+4+5	2+6+4
2+1+6	2+3+5	2+5+4	3+3+6
2+2+5	2+4+4	2+6+3	3+4+5
2+3+4	2+5+3	3+2+6	3+5+4
2+4+3	3+1+6	3+3+5	3+6+3
2+5+2	3+2+5	3+4+4	4+2+6
2+6+1	3+3+4	3+5+3	4+3+5
3+1+5	3+4+3	3+6+2	4+4+4
3+2+4	3+5+2	4+1+6	4+5+3
3+3+3	3+6+1	4+2+5	4+6+2
3+4+2	4+1+5	4+3+4	5+1+6
3+5+1	4+2+4	4+4+3	5+2+5
4+1+4	4+3+3	4+5+2	5+3+4
4+2+3	4+4+2	5+1+5	5+4+3
4+3+2	4+5+1	5+2+4	5+5+2
4+4+1	5+1+4	5+3+3	5+6+1
5+1+3	5+2+3	5+4+2	6+2+5
5+2+2	5+3+2	5+5+1	6+3+4
5+3+1	5+4+1	6+1+5	6+4+3
6+1+2	6+2+1	6+2+4	6+5+2
6+2+1	6+3+1	6+3+3	6+6+1
6+3+1	6+4+1	6+4+2	
6+4+1	6+5+1	6+5+1	
6+5+1	6+6+1	6+6+1	

A = # sumandos 10, 11, 12  
 B = # sumandos 9, 12  
 Resp. Es verdad las probabilidades de 10 y 11 son mayores que las de 9 y 12

25      27      27      25

Figura 2. Tabla elaborada por la estudiante A

Finalmente, como una muestra del impacto generado por la clase, obsérvese lo indicado por el estudiante C en la figura 3:

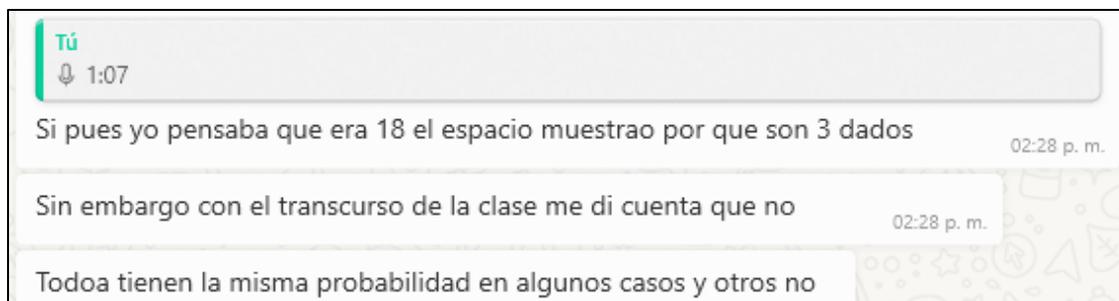


Figura 3. Testimonio del estudiante C

Lo manifestado por el estudiante C estaría indicando, en forma resumida, los cambios producidos en él debidos a la organización de la clase.

### Consideraciones finales

Para explorar la contribución del enfoque de enseñanza problémica en la solución del Problema del Gran Duque de Toscana, se analizaron los resultados anteriormente mostrados mediante las categorías de tal enfoque que se mencionaron en un apartado precedente. Con ese fundamento, el presente trabajo sostiene que la situación problémica habría sido creada a partir de lo indicado por el estudiante B (Figura 1), pues de acuerdo con lo afirmado en su testimonio, se generó contradicción entre lo conocido y desconocido por él (Torres, 1999). Asimismo, el cálculo de la suma de cada uno de los resultados obtenidos tras el lanzamiento de dos dados (primero) y de tres dados (después) que realizaron el estudiante B y otros compañeros suyos, mostraría la presencia de la definición del problema docente (Torres, 1999) pues es una actividad orientada a la solución de la incertidumbre planteada, mediante la constitución del espacio muestral. En ese sentido, tales cálculos, así como las preguntas planteadas para perfilar el problema docente y, por ende, a resolverlo, habrían jugado el rol de las tareas y preguntas problémicas (Torres, 2013), tal como lo muestra la tabla elaborada por la estudiante A (Figura 2). En ellas, lo problémico poseyó un nivel de complejidad mínimo. Sin embargo, ello no habría impedido la reformulación de los conceptos primarios sobre probabilidad que indica el estudiante C (Figura 3) y que constituye, precisamente, uno de los propósitos de la introducción de las paradojas sobre la probabilidad en la enseñanza (Leviatan, 2002).

El análisis de algunos aspectos del impacto de la enseñanza problémica durante la solución del problema del Gran Duque de Toscana presenta los cimientos de la enseñanza de las probabilidades desde tal enfoque, las mismas que permitirían abordar las dificultades detectadas por Malquichagua (2019), como la presencia de respuestas diferentes al constituir el espacio muestral en un problema relacionado con las paradojas de la probabilidad. De este modo, se brindan procedimientos organizados para resolver la contradicción generada por este fenómeno, así como la incertidumbre que podría suscitarse a partir de él en cada uno de los estudiantes de la clase. Por ello, con la creación de la situación problémica, la definición del problema docente y el empleo de preguntas problémicas, se registraría la contribución didáctica del enfoque de enseñanza problémica en la solución del problema del Gran Duque de Toscana. Sin embargo, debería ser motivo de una investigación ulterior el establecimiento del estatus didáctico de las paradojas probabilísticas pues, como se ha podido observar en el problema del Gran Duque de

Toscana, no parece sencillo el tránsito y empleo de recursos aritméticos (como los del conteo) en el campo de la probabilidad para determinar el espacio muestral. Asimismo, también constituye de especial interés la cuestión acerca de cómo perfeccionar las tareas y preguntas problémicas, en tanto que impulsos planteados a los estudiantes para la determinación del espacio muestral en el problema ya mencionado. Finalmente, en línea con lo anterior, es necesario estudiar otros aspectos que surgieron durante la experiencia, como la graduación en dificultad de los impulsos didácticos, o el uso del tiempo para el manejo del contenido y del grupo escolar, que constituyeron limitaciones durante la experiencia. Por todo esto, es necesario continuar con la experimentación para enriquecer la propuesta de enseñanza problémica de las probabilidades.

### Referencias y bibliografía

- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school, challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense.
- Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). From puzzles and paradoxes to concepts in probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking, advances in mathematics education* (pp. 35-74). Springer.
- Contreras, J., Batanero, C., Arteaga, P., y Cañadas de la Fuente, G. (2011). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilon*, 28(2), 1-11.
- Dafermos, M. (2018). *Rethinking cultural-historical theory: a dialectical perspective to Vygotsky*. Springer.
- Danilov, M. (1968). *El proceso de enseñanza en la escuela*. Grijalbo.
- David, F. (1962). *Games, gods, and gambling*. Hafner.
- Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la matemática I*. Pueblo y Educación.
- Lee, J. (2002). An analysis of difficulties encountered in teaching Davydov's mathematics curriculum to students in a U.S. setting and measures found to be effective in addressing them (tesis de doctorado, State University of New York at Binghamton). [https://www.researchgate.net/publication/267595843\\_Ji-Eun\\_Lee\\_An\\_analysis\\_of\\_difficulties\\_encountered\\_in\\_teaching\\_Davydov's\\_mathematics\\_curriculum\\_to\\_students\\_in\\_a\\_US\\_setting\\_and\\_measures\\_found\\_to\\_be\\_effective\\_in\\_addressing\\_them](https://www.researchgate.net/publication/267595843_Ji-Eun_Lee_An_analysis_of_difficulties_encountered_in_teaching_Davydov's_mathematics_curriculum_to_students_in_a_US_setting_and_measures_found_to_be_effective_in_addressing_them)
- Leviatan, T. (2002). On the use of paradoxes in the teaching of probability. *Proceedings of ICOTS 6*. IASE. [https://iase-web.org/documents/papers/icots6/6g3\\_levi.pdf?1402524962](https://iase-web.org/documents/papers/icots6/6g3_levi.pdf?1402524962)
- Maistrov, L. (1974). *Probability theory, a historical sketch*. Academic.
- Majmutov, M. (1983). *La enseñanza problémica*. Pueblo y Educación.
- Malquichagua, M. (2019). *Análisis de situaciones-problema para la enseñanza de la probabilidad en la educación básica* (tesis de maestría, PUCP). [https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/15486/MALQUICHAGUA\\_FERN%c3%81NDEZ\\_MANUEL\\_AUGUSTO\\_FRANCISCO.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/15486/MALQUICHAGUA_FERN%c3%81NDEZ_MANUEL_AUGUSTO_FRANCISCO.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Maraví, L. (2020). La teoría del reflejo de V. I. Lenin en la tradición dialéctica de L. S. Vygotsky y sus vínculos con la educación matemática: error y fantasía en la enseñanza problémica de la geometría. En C. Gaita (Ed.), *X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemática, actas* (pp. 693–702). Pontificia Universidad Católica del Perú. <https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568>

- Maraví, L. (2021). Emergent curriculum in basic education for the new normality in Peru: orientations proposed from mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 108, 291-305.  
<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10100-w>
- Mok, I. y Clarke, D. (2015). The contemporary importance of triangulation in a post – positivist world: examples from the learner’s perspective study. En A. Bikner – Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 403 –425). Springer.
- Patton, M. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods*. Sage.
- Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. Iberoamérica.
- Reimers, F. M. (2022). Learning from a pandemic. The impact of COVID-19 on education around the world. En F. Reimers (Ed.), *Primary and Secondary Education During Covid-19* (pp. 1–37). Springer.
- Rosental, M. y Iudin, P. (Eds.). (1973). *Diccionario filosófico*. Universo.
- Rosental, M. y Straks, G. (1965). *Categorías del materialismo dialéctico*. Grijalbo.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Morata.
- Székely, G. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Reidel.
- Tabak, J. (2004). *Probability and statistics: the science of uncertainty*. Facts on file.
- Torres, P. (1993). *La enseñanza problémica de la matemática del nivel medio general* (tesis de doctorado no publicada). ISP Enrique José Varona.
- Torres, P. (1999). *Métodos problémicos en la enseñanza de la Matemática*. Academia.
- Torres, P. (2002). *Didáctica de las matemáticas*. Universidad en Ciencias Pedagógicas Enroque José Varona.
- Torres, P. (2013). La instrucción heurística en la formación de profesores de matemática. En C. Flores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática educativa: la formación de profesores* (pp. 201-216). Díaz de Santos.
- Wild, C., Utts, J. y Horton, N. (2018). What is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield. (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education*, (pp. 5–36). Springer.