INTERACCIÓN ENTRE LA MAESTRA Y LOS ESTUDIANTES EN LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE CLASES DE POLÍGONOS

The interplay of teachers and student actions in the teaching and learning of polygons class

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación fue caracterizar una enseñanza que responde al pensamiento matemático de los estudiantes de 3º de educación primaria sobre el aprendizaje de clases de polígonos. Identificamos características de las acciones de la maestra y los argumentos y procesos de justificación generados por los estudiantes cuando resolvían tareas sobre clases de polígonos, Tomamos un episodio de enseñanza dirigido a apoyar la capacidad de análisis de los estudiantes de figuras geométricas para ilustrar algunas de estas interacciones. Los resultados indican la relevancia de las relaciones entre las cuestiones planteadas por la maestra sobre los procedimientos de resolución de los estudiantes, el tipo de tareas presentadas y la naturaleza de los argumentos justificativos de los estudiantes para apoyar la relación entre la deconstrucción dimensional y las aprehensiones cognitivas, necesaria para el aprendizaje de clases de polígonos.

Palabras clave: *interacción entre estudiantes y maestra, geometría, clases de polígonos, demanda cognitiva de las tareas.*

Abstract

The aim of this research was to characterize teaching that responds to the mathematical thinking of students in the third grade of primary education about learning of polygon classes. We identified characteristics of the teachers' actions and the different types of arguments and justification processes generated by students when solving tasks about polygon classes. We selected a teaching episode addressed at supporting students' capacity to analyse geometrical figures to illustrate some of these interactions. Findings indicate the relevance of the relationships between the questions posed by the teacher about students' solving procedures, the type of tasks presented, and the nature of students' justificatory arguments to support the relationship between dimensional deconstruction and cognitive apprehensions, necessary for learning polygon classes.

Keywords: *interplay between students and teacher, geometry, polygon classes, cognitive demand of the assignments.*

INTRODUCCIÓN

La comprensión del concepto de polígono y de clases de polígonos se consideran aspectos claves en el desarrollo del pensamiento geométrico (Battista, 2017; Clements et al., 1999), ya que implica razonar con los significados matemáticos de los atributos de una figura. En particular, para determinar

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Interacción entre la maestra y los estudiantes en la enseñanza aprendizaje de clases de polígonos. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 179-187). SEIEM.

la pertenencia de dos figuras perceptualmente diferentes a una misma clase de polígonos, reconocer ejemplos y no-ejemplos de una clase de polígono, o construir polígonos con condiciones (Bernabeu et al., 2021a, 2021b). Una característica del desarrollo de esta comprensión está vinculado a la forma en la que los estudiantes comunican matemáticamente sus ideas a través de *argumentos* que les permiten convencer a alguien de lo que se afirma o se niega. Los argumentos de los estudiantes, como parte del proceso de comunicación, combinan la coordinación de dos sistemas semióticos de representación: el discursivo (oral o escrito) y el no-discursivo (dibujos, bocetos, figuras geométricas, construcciones con material didáctico) (Duval, 2017). Cuando se produce la sinergia entre los registros discursivos y no-discursivos es cuando los estudiantes son capaces de hacer la *conversión* bidireccional entre ambos registros mediante las *transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos que se denotan*. Esta conversión evidencia el proceso de dotar de significado matemático a partes de las figuras geométricas (*deconstrucción dimensional* (Duval, 2017)), generando argumentos para justificar. Por ejemplo, cuando un estudiante analiza una figura geométrica asignando significado matemático a sus partes relacionándolas con la definición de un concepto geométrico para determinar su pertenencia a una clase de polígono. En el desarrollo de la comprensión de los objetos geométricos, el papel del maestro y de las actividades propuestas son clave. Sin embargo, las interacciones entre el maestro, los estudiantes y las tareas para apoyar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes es todavía poco conocido.

La naturaleza compleja de las interacciones que se dan en las clases de matemáticas dificulta la tarea de identificar aspectos relevantes de la enseñanza para el aprendizaje de los estudiantes (Hiebert y Grouws, 2017). Algunas investigaciones han identificado características de las situaciones de enseñanza que apoyan la progresión del pensamiento matemático de los estudiantes (Ambrose y Kenthan, 2009; Bartolini y Bacaglini-Frank, 2015, Jacobs y Empson, 2016) como, por ejemplo, el tipo de tarea planteada, las interacciones en el aula y las decisiones de la maestra sobre qué aspectos atender y cómo hacerlo para ajustar la enseñanza en respuesta al pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs y Empson, 2016). Estas investigaciones identifican aspectos de la enseñanza que caracterizan lo que la maestra hace cuando interactúa con los estudiantes y el contenido matemático para apoyar su aprendizaje (Franke et al., 2007). En este mismo sentido, Conner et al. (2014) han examinado el papel de los profesores de educación secundaria para apoyar la argumentación colectiva entre los estudiantes y cómo apoyar el razonamiento y argumentación de estos, el impacto de las acciones del maestro sobre las oportunidades de aprendizaje generadas para sus estudiantes (Martin et al., 2005). Investigaciones en educación primaria han abordado la enseñanza de los poliedros, subrayando la relevancia del maestro en las interacciones entre los estudiantes y el contenido geométrico al examinar ejemplos y contraejemplos de objetos geométricos para fijar la atención en sus partes componentes (Ambrose y Kenehan, 2009). Otras subrayan la relación entre el tipo de actividad propuesta a los estudiantes de primero de educación primaria (6-7 años) y el desarrollo del pensamiento geométrico (Bartolini y Baccaglini-Frank, 2015). Sin embargo, en esta etapa educativa son menos conocidas las características de las conexiones de las acciones de los maestros y las argumentaciones de los estudiantes cuando resuelven determinadas tareas geométricas que apoyan la construcción de la comprensión de los polígonos.

Las acciones de los estudiantes pueden ser relevantes si el maestro las identifica como tales cuando se dan en el momento y las puede usar para apoyar la progresión del pensamiento matemático de los estudiantes. Tener en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes durante la enseñanza es una tarea desafiante para los maestros pues deben considerar las características del contenido y de procesos geométricos implicados.

Apoyándonos en investigaciones previas que nos han proporcionado resultados sobre los niveles de sofisticación de los estudiantes de la comprensión de los polígonos en estudiantes de tercero de educación primaria (Bernabeu et al., 2021a, 2021b, 2022), surge esta investigación en la que queremos caracterizar la enseñanza que responde al pensamiento matemático de los estudiantes a través de los movimientos de la maestra que aprovecha los argumentos y procesos de pensamiento geométrico de los estudiantes durante la discusión grupal.

MARCO TEÓRICO

Las decisiones del maestro al decidir sobre las tareas en la planificación de una lección, las cuestiones que puede plantear y la gestión de la interacción con sus estudiantes cuando resuelven las tareas son aspectos que determinan el aprendizaje de los estudiantes. Conner et al. (2014) caracterizaron acciones del maestro vinculadas a las oportunidades de aprendizaje generadas para los estudiantes, entre ellas: (a) plantear *preguntas o demandar información* a los estudiantes, y (b) *acciones de apoyo* para facilitar el desarrollo de una argumentación. Por ejemplo, al *demandar* algún tipo de *información* a los estudiantes puede generar un contexto social para que estos generen diferentes tipos de argumentos que puedan vincularse a determinadas *acciones de apoyo* por parte del maestro (por ejemplo, ratificar los argumentos discursivos de los estudiantes para fijar ideas, realizar comprobaciones empíricas, o plantear cuestiones que generen conflictos cognitivos).

Por otra parte, desde las investigaciones previas (Sinclair et al., 2016) sabemos que los argumentos de los estudiantes, entendidos como lo que les permite *convencer a alguien de lo que se afirma o se niega,* pueden ser de diferentes tipos. Los argumentos de los estudiantes están vinculados a las aprehensiones cognitivas que evidencia el proceso de deconstrucción dimensional mediante la cual los estudiantes dotan de significado matemático a partes de las figuras geométricas (Duval, 1995, 2017). Diferenciamos dos tipos de argumentos: los *discursivos* y los *empíricos*. Un *argumento discursivo* implica justificar algún procedimiento o resolución cuando el maestro pregunta ¿por qué? o cuando el estudiante explica la pertenencia de un polígono a una determinada clase de polígono. Mientras que un *argumento empírico* implica la construcción de figuras geométricas. Por ejemplo, cuando los estudiantes construyen con *meccano* o *geoplano* (recursos didácticos), o dibujan en la pizarra un polígono con determinadas condiciones. La forma en la que los estudiantes generan estos argumentos está vinculada a la forma en la que se dan las interacciones con el maestro y la tarea propuesta, con el fin de lograr los objetivos de aprendizaje pretendidos.

Por tanto, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación

- ¿Qué oportunidades de aprendizaje apoyan los procesos de razonamiento geométrico de los estudiantes y aumentan la capacidad de análisis?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

29 estudiantes de 3º de educación primaria participaron en una instrucción que tenía por objetivo apoyar la construcción de la comprensión de las clases de polígonos. La instrucción constaba de 10 sesiones de 50 minutos (2 sesiones por semana) durante 5 semanas, basado en tres focos que representan referencias importantes en el aprendizaje del concepto de polígono y clases de polígonos (Sinclair et al., 2016): Foco 1. Reconocer atributos de las figuras. Reconocer y justificar cuándo una figura es un polígono. Transformar una figura que no es un polígono en un polígono; Foco 2. Reconocer y construir polígonos con determinados atributos; y, Foco 3. Identificar el atributo común en un conjunto de polígonos perceptualmente diferentes con el fin de reconocer y representar ejemplos de una clase de polígonos.

Instrucción

Las tareas de la instrucción fueron guiadas y complementadas por la maestra (preguntas y acciones de apoyo) y resueltas en gran grupo por los estudiantes. Estas estaban relacionadas con los tres focos indicados. Los objetivos de las tareas del Foco 1 eran consolidar los atributos relevantes del concepto de polígono (figura plana cerrada, con lados rectos y no cruzados). Para ello, los estudiantes tenían que reconocer ejemplos y no-ejemplos de polígonos (figura 1), usando los atributos del concepto de polígono y justificar por qué una figura era o no un polígono. El objetivo de las tareas del Foco 2, fue reconocer y usar atributos adicionales en los polígonos (cóncavos-convexos; según el número de lados; simétricos; clases de triángulos; y clases de cuadriláteros). Por ejemplo, construir con material didáctico (*meccano* o *geoplano*) un triángulo según la amplitud de sus ángulos (acutángulo, rectángulo u obtusángulo) para que otro estudiante reconociera qué triángulo se había construido y justificar su resolución. Por último, el objetivo del Foco 3 era identificar atributos comunes en polígonos perceptualmente diferentes. Por ejemplo, identificar a qué clase pertenecen un conjunto de triángulos perceptualmente diferentes. Los datos de la investigación provienen de las video-grabaciones de las 10 sesiones de la instrucción.

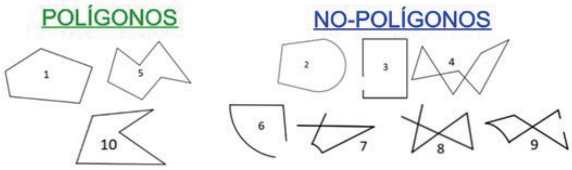

Figura 1. Tarea de reconocer polígonos y no-polígonos.

Análisis

Para el análisis, adoptamos el llevado a cabo por Martin et al. (2005) basado en el “análisis-en-tres-partes” propuesto por Miles y Huberman (1994). Este análisis consiste en simplificar los datos, organizarlos de forma comprimida e identificar patrones emergentes de los datos. Para ello, analizamos los vídeos de las sesiones segmentando estos desde que la maestra proponía una tarea, hasta que ratificaba el razonamiento de los estudiantes y/o proponía una nueva tarea, considerando cada segmento como una unidad de análisis. Cada segmento tenía un objetivo de aprendizaje vinculado a un aspecto geométrico específico. En cada uno de estos segmentos identificamos tres variables: (i) el tipo de tarea que estaba siendo resuelta; (ii) el tipo de acciones de la maestra, y (iii) el tipo de argumentos generados por los estudiantes. Esta forma de proceder permitió categorizar acciones individuales de la maestra y argumentos de los estudiantes antes de considerar la cadena de interacciones entre estos en diferentes momentos de la resolución de las tareas (identificar patrones emergentes de los datos). Las categorías que emergieron de los movimientos de la maestra se basan en las acciones del maestro tomadas de Conner et al. (2014) y las categorías de los estudiantes, en los argumentos generados por los estudiantes, los cuales evidencian las aprehensiones cognitivas en el proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 1995, 2017). Posteriormente, discutimos semejanzas y diferencias entre los segmentos de enseñanza, considerando las tres variables anteriores, e intentamos identificar momentos clave para la progresión del pensamiento geométrico de los estudiantes y en el uso del lenguaje considerando cómo las interacciones entre los estudiantes y la maestra apoyaban estos progresos. En la sección de resultados ejemplificamos uno de estos momentos: Apoyar el desarrollo de la capacidad de análisis. Aunque fueron diversas las situaciones que ejemplifican este momento, estás se representan a partir de un diagrama en el que se muestra un patrón de intercambio de información entre la maestra y los estudiantes al resolver las tareas.

RESULTADOS

Apoyar el desarrollo de la capacidad de análisis

Este momento se caracteriza por la interrelación entre el tipo de cuestiones que plantea la maestra sobre las resoluciones de los estudiantes, el tipo de tareas y las argumentaciones de los estudiantes para justificar y explicar sus resoluciones que implicaban considerar diferentes atributos de las figuras. Por ejemplo, en la tarea de introducir los triángulos según sus ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo) (sesión 6) se plantea reconocer cómo son los ángulos que conforman un triángulo una vez fijado uno de estos (por ejemplo, si en el triángulo hay un ángulo recto, cómo son los otros dos). El objetivo de este tipo de tareas es desarrollar el proceso de deconstrucción dimensional que se evidencia a través de la aprehensión discursiva en la que se asigna significado matemático a partes de los triángulos; y la aprehensión operativa al transformar el triángulo construido para averiguar otros atributos (Duval, 1995). La tarea pide a los estudiantes que, a partir de la construcción de un triángulo rectángulo con el *geoplano*, los estudiantes lo analicen para reconocer otros atributos de esta clase. Así, la maestra plantea preguntas para averiguar cómo son los otros dos ángulos de los triángulos rectángulos construidos (*preguntas de indagación*). En la interacción que se genera, los estudiantes van modificando los ángulos del triángulo rectángulo construido para conjeturar que los otros dos ángulos deben ser agudos generando un *argumento* apoyado en las construcciones y modificaciones realizadas (argumentos discursivo y empírico) en respuesta a las preguntas de la maestra. En un momento dado, un estudiante llega a la conclusión que si hace dos ángulos rectos lo transforma en un cuadrilátero, el hecho de hacer dos ángulos rectos obliga a tener mínimo cuatro lados; de manera indirecta están comprobando la suma de los ángulos internos de los triángulos, si la suma de los tres es mayor a 180º (dos rectos y el agudo que falta), ya no puede ser un triángulo. Además, en esta interacción se observa cómo la maestra ofrece un vocabulario técnico de las matemáticas que se ve reflejado en las argumentaciones posteriores de los estudiantes (los ángulos pueden ser agudos). En este momento, la maestra *ratifica el argumento discursivo* de los estudiantes para subrayar que en un triángulo rectángulo los ángulos que no son rectos solo pueden ser agudos. La interacción producida se transcribe a continuación (E= todos los estudiantes; En= estudiante concreto)

> M: [Muestra un triángulo rectángulo construido en un *geoplano*] ¿cómo son los otros dos ángulos de un triángulo rectángulo? Tiene uno recto y los otros dos, ¿cómo son?
>
> E: [Tras observar sus triángulos rectángulos construidos en *geoplano*] acutángulos.
>
> M: Los ángulos pueden ser agudos, rectos u obtusos.
>
> E: Agudos.
>
> M: ¿Son siempre agudos? Comprobarlo.
>
> E: Sí, son siempre agudos.
>
> E15: Es que, si hago otro ángulo recto, se forma un cuadrado (refiriéndose a un cuadrilátero).
>
> M: Muy bien, no sería un triángulo. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto y dos agudos.

La figura 2 representa el esquema de las conexiones entre la maestra y los estudiantes al resolver una tarea que implicaba fijarse en otros atributos diferentes del ángulo recto en los triángulos rectángulos. Esta conexión muestra la comprensión de los atributos de los triángulos rectángulos.

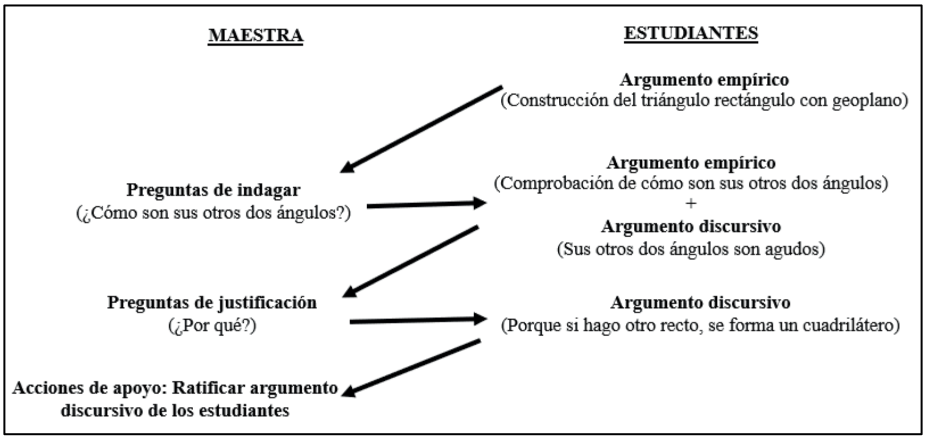

Figura 2. Secuencia de movimientos entre las preguntas y acciones de la maestra y los argumentos de los estudiantes en tareas de indagar sobre los atributos no presentes en la definición.

Otro ejemplo de este tipo de momento se da al introducir las definiciones de los triángulos según sus lados (equilátero, isósceles y escaleno) y al realizar la tarea de anticipar qué tipo de triángulo se puede construir a partir de dos segmentos dados con una longitud determinada (sesión 5). La resolución de esta tarea permite apoyar la deconstrucción dimensional a través de la aprehensión discursiva al pedir a los estudiantes que se fijen en la longitud de dos segmentos dados y los relacionen con las definiciones de los triángulos según sus lados. En esta interacción, la maestra comprueba cómo es la longitud de los lados de un triángulo (figura 3) midiendo con una regla dos de sus lados (por ejemplo, un lado mide 3’5 cm y el otro mide 3 cm). La maestra realiza una *pregunta de anticipación*: *¿qué triángulo se puede construir?* Los estudiantes, a través de un *argumento discursivo*, anticipan que puede ser un escaleno o un isósceles, dependiendo de la medida del tercer lado. La maestra mide el tercer lado del triángulo (por ejemplo, 1 cm), y pide a los estudiantes que digan qué clase de triángulo es y por qué (p*regunta de justificación)* para que los estudiantes *argumenten discursivamente* por qué pertenece a esa clase de triángulo. Finalmente, la maestra *ratifica el argumento discursivo de los estudiantes* para reiterar los atributos de la definición. La interacción producida se transcribe a continuación.

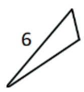

Figura 3. Triángulo para construir.

M: Vamos a medir los lados (figura 3). [La maestra con ayuda de una regla mide los lados]. Un lado mide 3’5 cm y otro mide 3 cm, ¿qué triángulo puede ser?

E: Isósceles o escaleno.

M: Muy bien, porque tenemos dos diferentes. [La maestra mide el tercer lado]. (El tercero mide) 1 cm. Tenemos 3’5 cm, 3 cm y 1 cm. Entonces ¿qué es?

E: Escaleno.

M: Escaleno. ¿Por qué?

E: Porque tiene tres lados diferentes.

M: Muy bien, porque tiene tres lados diferentes.

La figura 4 representa el esquema de las conexiones entre las preguntas de la maestra, y la generación de los argumentos de los estudiantes apoyados en la resolución de la tarea que tenía como objetivo aumentar la capacidad de análisis de los estudiantes al centrar su atención en la relación entre la longitud de los lados de los triángulos. Este esquema refleja cómo los estudiantes progresan en su comprensión de las clases de triángulos según sus lados.

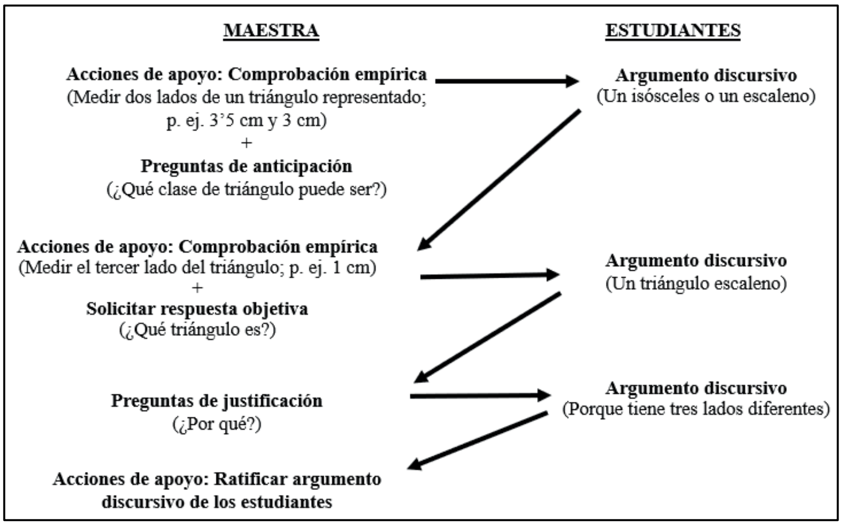

Figura 4. Secuencia de movimientos entre las preguntas y acciones de la maestra y los argumentos de los estudiantes en tareas de anticipar la clase de polígono a partir de algunos atributos.

En estos ejemplos de los momentos centrados en aumentar la capacidad de análisis de los estudiantes vinculados al desarrollo del proceso de deconstrucción dimensional y de las aprehensiones cognitivas se evidencia el papel de las cuestiones de la maestra al crear oportunidades de aprendizaje para que los estudiantes generen argumentos discursivos y empíricos. El tipo de tarea planteadas permite centrar la atención y establecer relaciones entre los diferentes atributos de los triángulos y sus definiciones, y la argumentación de los estudiantes se articula a través de los movimientos de la maestra (preguntas de justificación, indagación y anticipación; y la ratificación de los argumentos discursivos de los estudiantes), y las respuestas de los estudiantes a través de los argumentos discursivos y empíricos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar una enseñanza que responde al pensamiento matemático de los estudiantes 3º de educación primaria sobre el aprendizaje de clases de polígonos. En este estudio mostramos uno de los momentos identificados mediante el análisis de las sesiones de enseñanza de una instrucción, que permite asumir que este apoyaba la construcción de la comprensión de la idea de clase de polígonos de los estudiantes a través del desarrollo de la capacidad de análisis. Este momento ha sido caracterizado por la naturaleza de las interacciones entre las acciones y cuestiones planteadas por la maestra y los argumentos y procesos de justificación generados por los estudiantes cuando resolvían tareas sobre clases de polígonos. El proceso de análisis seguido nos ha permitido centrarnos en los aspectos matemáticamente específicos de la interacción. Los ejemplos del momento que caracterizamos en este trabajo muestran las características de la enseñanza dirigida a potenciar el desarrollo de la capacidad de análisis y la adquisición de un vocabulario técnico de las matemáticas como rasgos característicos del pensamiento geométrico de los estudiantes. Este momento viene caracterizado por las interacciones de la maestra con los estudiantes al resolver tareas geométricas razonando con los significados matemáticos de los polígonos. Los estudiantes combinaron el uso de los argumentos discursivos (durante las interacciones grupales) y empíricos a través del uso de materiales didácticos como el *meccano*, sin cambiar el objeto que lo representa, lo cual apoya la idea de Duval (2017) sobre la comprensión de los conceptos geométricos.

Nuestros resultados nos permiten identificar características de las interacciones entre la maestra y los estudiantes cuando resuelven tareas que pueden ser consideradas matemáticamente exigentes para los estudiantes. Así, el tipo de situación de enseñanza que hemos categorizado como momento centrado en aumentar la capacidad de análisis de los estudiantes, está caracterizado por las acciones de la maestra al realizar preguntas de indagación y justificación centradas en las resoluciones de los estudiantes que podemos considerar productivas. Estas preguntas las consideramos productivas ya que apoyan la generación de procesos de deconstrucción dimensional vinculados al desarrollo de aprehensiones cognitivas que permiten a los estudiantes asignar significado matemático a partes de las figuras o transformar partes de una figura para indagar otros atributos, que son rasgos característicos del desarrollo del pensamiento geométrico. En este sentido, la gestión de la discusión realizada por la maestra en este tipo de momentos ha sido un elemento esencial de las oportunidades ofrecidas a los estudiantes para generar argumentos tanto discursivos como empíricos. Estas resoluciones han consistido en el reconocimiento de los atributos relevantes de las figuras, más allá de la dimensión perceptual, al exigirles justificar a través del discurso o la representación. De esta forma, la tríada de preguntas y acciones de la maestra-característica de la tarea- y los argumentos de los estudiantes se convierten en un todo inseparable, orquestados a partir de los objetivos de aprendizaje, que permite explicar el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes (Bernabeu et al., 2022) al favorecer la posibilidad de la coordinación de las aprehensiones cognitivas y el proceso de deconstrucción dimensional (Duval, 1995, 2017). Así, la mirada detallada a las interacciones entre maestra y estudiantes durante la resolución de tareas sobre polígonos nos permiten dar cuenta de aspectos matemáticamente relevantes en la enseñanza que pueden condicionar y/o apoyar al aprendizaje de los estudiantes.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo del Proyecto I+D+I – PGC del Ministerio de Ciencia e Innovación. Plan Nacional de Investigación (Ref.: PID2020-116514GB-I00).

Referencias

Ambrose, R. y Kenehan, G. (2009). Children's evolving understanding of polyhedra in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 158-176. https://doi.org/10.1080/10986060903016484

Bartolini, M. G. y Baccaglini-Frank, A. (2015) Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM Mathematics Education, 47*, 391-405. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0636-5

Battista, M. (2017). The development of geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). NCTM-IAP.

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2021a). Levels of sophistication in elementary students' understanding of polygon concept and polygons classes. *Mathematics*, *9*(16), 1966. https://doi.org/10.3390/math9161966

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021b). Primary school students' understandings of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 251-270. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 49-70. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208

Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192-212. https://doi.org/10.2307/749610

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401-429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Franke, M., Webb, N., Chan, A., Battey, D., Ing, M., Freund, D. y De, T. (2007). *Eliciting student thinking in elementary school mathematical classrooms*. NCRESST.

Hiebert, J. y Grouws, D. (2017). The effects of classroom mathematics teaching on students' Learning. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM-IAP.

Jacobs, V. y Empson, S. (2016). Responding to children's mathematical thinking in the moment: an emerging framework of teaching moves. *ZDM Mathematics Education, 48*, 185-197. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0717-0

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 95-124. https://doi.org/10.1007/s10649-005-6698-0

Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis*. Sage Publications.

Pirie, S., Kieren, T. y Gordon, C. (1999). Growing minds, growing mathematical understanding: Mathematical understanding, abstraction and interaction. En L. Burton (Ed.), *Learning Mathematics. From hierarchies to networks* (209-231). Falmer Press.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), 691-719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6