



Runa Yupana® Tawa Pukllay – Educación matemática corporal

Dhavit Prem Carlos Gabriel **Saldívar** Olazo
Universidad de Lima
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Perú

dhavitprem@gmail.com

Divapati Prem Alvaro Javier **Saldívar** Olazo
Asociación Yupanki
Perú

yachay@yupanainka.com

Resumen

Runa Yupana Tawa Pukllay (RYTP) es un conjunto de dinámicas lúdico aritméticas desarrolladas para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante el desarrollo de ejercicios corporales grupales y sincronizados. Está basado en el método Yupana Inka Tawa Pukllay (YITP) que resuelve operaciones aritméticas mediante estrategias de reconocimiento de patrones y ejecución de movimientos predefinidos en serie o en paralelo. En vez del tablero utilizado en YITP, se utilizan dibujos de yupanas en el piso a escala humana, en la que los estudiantes hacen las veces de fichas y ejecutando movimientos corporales, resuelven algoritmos mientras optimizan estrategias de comunicación, tiempo y dinámicas de solución. RYTP se viene investigando observacional, cualitativa y empíricamente en estudiantes de diferentes edades. RYTP estimula el trabajo en equipo, integra la educación física con el aprendizaje matemático y promueve la creatividad y el desarrollo de estrategias.

Introducción

El método aritmético Tawa Pukllay (Prem D., 2014-2016), desarrollado y publicado por la Asociación Yupanki entre los años 2014 y 2016 (figura 1B) nació como una propuesta de decodificación de la yupana o calculadora inca (Momath and Wolfram, 2020), la misma que fue hallada a principios del S.XX en un dibujo del manuscrito “Nueva Corónica y Buen Gobierno” (Guaman-Poma F., 1616) (figura 1).

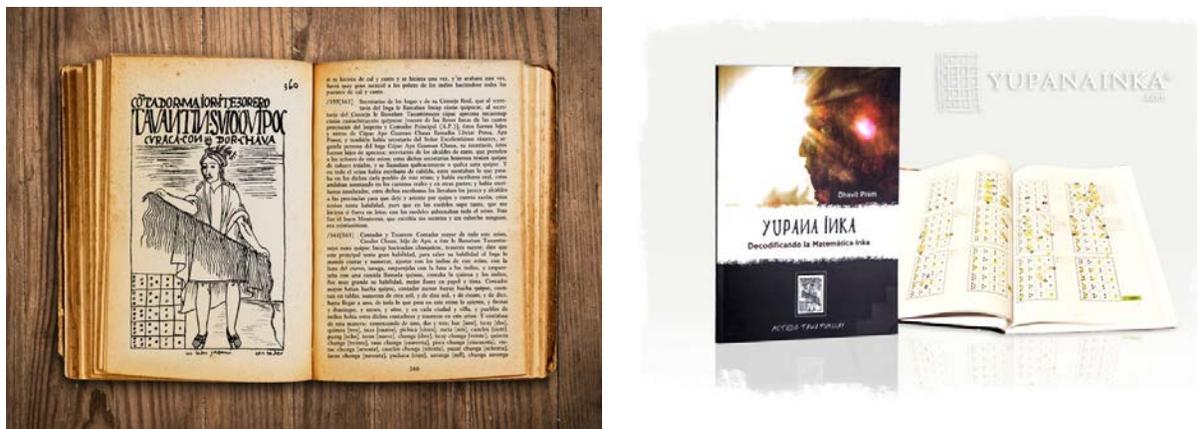


Figura 1. (A) Manuscrito “Nueva Corónica y Buen Gobierno” de Felipe Guaman Poma de Ayala, 1616
 (B) Libro Decodificando la matemática inca -Método Tawa Pukllay (Dhavit Prem, 2014-2016)

La Asociación Yupanki, dedicada a la recuperación y difusión de la matemática ancestral andina desarrolló nuevas líneas de investigación a partir del método YITP, el cual ha sido presentado en varias conferencias y exposiciones en Ferias de Ciencia y Tecnología (CONCYTEC Perú 2015 y 2017), USA Science & Engineering Festival (Washington DC 2016); Congresos Internacionales como RELME 31 (Universidad de Lima, Perú 2017), EFPEM 2017 (Universidad San Carlos de Guatemala), RELME 32 (Universidad de Medellín, Colombia 2018), VI Congreso Internacional de Etnomatemáticas: Saberes, Diversidad y Paz, ICEm-6 (Universidad de Antioquia, Colombia 2018), Congreso Internacional de innovación educativa (Tecnológico de Monterrey, México, 2019), entre otros, además de la producción de libros y artículos científicos producto de nuevas líneas de investigación tanto a nivel tecnológico como humano.

Validación matemática y formalización de YITP

El artículo *Tawa Pukllay Proof: new method for solving arithmetic operations with the inca yupana using pattern recognition and parallelism* (Prem D. et al, 2022) presentaron la formalización del método: su axiomatización, formación de teoremas y demostración de consistencia mediante el álgebra. Fue aceptado a ser expuesto en el *International Conference on Frontiers of Mathematics and Artificial Intelligence (CFMAI 2022)* en Beijing, China.

Hallazgos en el aprendizaje aritmético mediante YITP

El artículo *Semiotic Alternations with the Yupana IncaTawa Pukllay in the Gamified Learning of Numbers at a Rural Peruvian School*, publicado en la revista *Educational Technology & Society* muestra resultados que sugieren un gran potencial del YITP como herramienta educativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la aritmética, luego de haber experimentado con un sistema de autoaprendizaje del YITP codificado en un aplicativo (juego serio) para tabletas electrónicas con niños de zonas rurales en situación de aislamiento debido a la pandemia de la Covid19.(Guzmán R., 2023). En dicho estudio del tipo híbrido: cuantitativo y cualitativo, se observa la rapidez con la que los estudiantes aprenden tópicos de YITP, así como una mejora en la actitud respecto a las matemáticas. YITP también presenta un impacto

favorable en el desarrollo del pensamiento computacional en niños debido al reconocimiento de patrones y elaboración de estrategias (algoritmos) durante el aprendizaje de la aritmética (Alvarado L. et al, 2022).

La actividad física y sus beneficios en los procesos cognitivos

Las actividades de aprendizaje basadas en desarrollo psicomotriz pueden mejorar el desempeño matemático en niños preadolescentes. (Beck MM, 2016).

En los últimos años ha habido un incremento en las evidencias de los beneficios que proporciona la actividad física en los procesos cognitivos (Hernández-Mendo A., 2019). Dichos estudios están respaldados por un alto nivel de confiabilidad debido a que están basados en técnicas electrofisiológicas como el electroencefalograma (Cheron et al., 2016; Gutmann et al., 2018), la resonancia magnética funcional (Chaddock-Heyman et al., 2013; Fontes et al., 2015; Chen et al., 2016), la tomografía de emisión de positrones (Boecker and Drzezga, 2016), la tomografía de emisión de fotón simple (Shih et al., 2019), o la magnetoencefalografía (Huang et al., 2016), cuyas tecnologías de monitoreo han ido mejorando, y en consecuencia, permitiendo una mayor comprensión de los procesos cognitivos durante actividades físicas y deportivas (Hernández-Mendo A., 2019)

Runa Yupana Tawa Pukllay

El RYTP es una de las dinámicas de aprendizaje y práctica del YITP con mayor aceptación y demanda por parte de estudiantes, principalmente niños y jóvenes de educación primaria y secundaria. RYTP ha sido desarrollada con el objetivo de combinar dos actividades que frecuentemente vienen siendo enseñadas de manera separada en la mayoría de escuelas en Latinoamérica y el mundo en general: la educación física y las matemáticas. (figuras 2a y 2b)

RYTP constituye una alternancia semiótica, por cuanto utiliza un conjunto de signos aritméticos diferentes a los convencionales indo-arábigos y clarifica, precisa y expande su significado. La alternancia semiótica es una herramienta que puede ser utilizada de manera continua en la didáctica de las matemáticas, pues agudiza el pensamiento facilitando la generalización de conceptos. (Escotto-Córdova, 2021).



Figura 2. (A) Prof. Eloy Reyes y la RYTP en I.E. bilingüe (quechua-castellano) en Huamachuco, Cañaris (Perú)
 (B) Prof. Johnny Ochoa y la Runa Yupana en I.E. en Ciudad de Guatemala (Guatemala)

El propósito de esta actividad transdisciplinaria es estimular a los niños en el aprendizaje de las matemáticas de manera activa, dadas las evidencias existentes tanto desde los estudios de la gamificación como de la conexión psicomotora y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas (Beck MM, 2016; Novoa M., 2022). Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la RYTP, se ha observado que los estudiantes afianzan rápidamente el conocimiento teórico sobre la lectoescritura de números en la yupana, el reconocimiento de patrones y los movimientos YITP; pero que, además se interesan en el proceso de construcción de la yupana, lo que abre la posibilidad de enlazar la enseñanza con tópicos de medición de áreas, división de sectores en forma proporcional, utilización de herramientas de medición, entre otras actividades. (figuras 3a y 3b).

Elaboración de la RYTP

Una de las dinámicas más divertidas y que convoca una gran participación por parte de los alumnos desde su elaboración es la Runa Yupana (del quechua “Yupana Humana”). La Runa Yupana representada comprende la misma estructura básica que la desarrollada a partir del dibujo de Guaman Poma (figura 1a), es decir que contiene 5 filas y 4 columnas.

Subitización es la identificación inmediata de un número exacto de objetos en pequeños conjuntos (Piazza M. et al, 2011). Al tener una estructura repetitiva de filas con 5,3,2 y 1 puntos, RYTP facilita la subitización de dichos puntos, lo que permite que eventualmente y cuando ya no sea necesario, se prescindan de ellos al elaborar las yupanas en el piso, quedando solamente una estructura matricial de puras casillas o aprovechando losetas preexistentes.

Para su elaboración, se traza una yupana en el piso de dimensiones aproximadas a 6 m. de ancho por 9 m. de largo, teniendo en cuenta de que en vez de usar semillas o piedras se posicionarán los estudiantes quienes realizarán los movimientos a través de simples coordinaciones.

Dinámica de la RYTP

A continuación, se menciona una serie de términos y situaciones que presuponen un conocimiento previo del método YITP. Para una referencia o profundización en los mismos se sugiere revisar cualquiera de los libros o artículos seminales de YITP: a) *Yupana Inka – Decodificando la matemática. Método Tawa Pukllay* (Dhavit-Prem, 2016); b) *Hatun Yupana Qellqa* (Dhavit-Prem, 2018); c) *Tawa Pukllay Proof: new method for solving arithmetic operations with the inca yupana using pattern recognition and parallelism* (Dhavit-Prem et al, 2022)

Una vez planteado el reto matemático por el profesor, la organización del equipo de estudiantes es esencial para determinar los códigos de comunicación que utilizarán. Es recomendable que los mismos estudiantes creen dichos códigos y que durante el desarrollo de la dinámica los vayan mejorando tanto respecto a la información que se transmiten como a sus estrategias de juego. Por ejemplo, cuando dos estudiantes se encuentran en una misma casilla, haciendo contacto visual y hablando en el código acordado previamente entre ellos, deciden ejecutar un determinado movimiento. Así, dos compañeros en una casilla 2 pueden mirarse y decir *Iskay* en voz alta y a continuación desplazarse a las casillas que les corresponda, lo mismo con las casillas 3 *Kimsa* y 5 *Pisqa*. Para el caso de la casilla 1 pueden coordinar señalando la cantidad de estudiantes que ejecutarán el movimiento *Kikin* del tipo “5 en 1 = 1 en 5” o similar.

Tanto para el movimiento *Pisqa* como *Kikin*, que son movimientos en los que se descartan fichas del tablero, es importante que definan quienes saldrán de las mismas y quienes continuarán en el tablero. Una sugerencia inicial es mantener en el tablero a los estudiantes más expertos en YITP, para así garantizar las mejores estrategias hasta el final. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el objetivo no es solamente crear las situaciones óptimas en cuanto a velocidad y efectividad en los movimientos para el “cálculo”, sino que el propósito principal es elevar el nivel de habilidad de quienes más lo necesitan. Por esto, una buena práctica para este fin es que los profesores, guías o *Kamayoq* (capitanes de grupo), sitúen a los estudiantes que menos práctica tienen en situaciones que demanden estrategias en las que sean ellos quienes se mantengan hasta el final.

Hay que considerar que los *movimientos compuestos* requerirán mayor coordinación y comunicación entre los miembros del equipo. Sin embargo, no existen estándares fijos, pues la idea es precisamente que los integrantes creen su propio código como mejor vean por conveniente, mediante señas o hablando y ejecuten los movimientos hasta que el final el *Kamayoq* (capitán) del equipo, cante “¡Haku!” al mismo tiempo que suena una campana o realiza algún otro movimiento predeterminado (escriba el resultado en una pizarra o lo registre en los nudos de un khipu).

Otra práctica interesante es jugar a una ronda de 10 cálculos consecutivos e ir rotando y mezclando a los estudiantes de una y otra yupana. Esto es muy útil para la integración de todos los estudiantes, la flexibilidad y aceptación frente al cambio y a la valoración del juego y de la dinámica correctamente realizada más allá del resultado final de los equipos.

En las modalidades de *T'aqay* (sustracción-selección), *Miray* (multiplicación) y *Rakiy* (división), como es natural que se requiera una distinción de colores en “las fichas”, es recomendable utilizar prendas distintivas de color fácilmente contrastable para indicar la función de cada participante en la operación: valor positivo, valor negativo, indicador de multiplicando o de divisor.



Figura 3. (A) Construcción de la Runa Yupana en patio de la escuela: medición y demarcación de casillas (B) Distribución y colocación de puntos de manera proporcional al área de la casilla y siguiendo la secuencia 1,2,3,5

Estructura del Taller

Considerando el número máximo de participantes a los talleres, se seguirá la siguiente secuencia:

1. Introducción al Tawa Pukllay (movimientos básicos, expansión y avanzados) para la escritura de números y realización de operaciones: yapay (adición) y t'aqay (sustracción)
2. Se crearán dos equipos cuyos miembros serán aleatoriamente elegidos y conducidos a la zona de yupanas de piso.
3. Los grupos conversarán y desarrollarán estrategias de comunicación interna para la resolución de ejercicios en el Runa Yupana
4. Se generarán desafíos aritméticos para ambos equipos, y se procederá a jugar con los ejercicios, tomando nota de los resultados, tiempos y analizando estadísticas. Del mismo modo, se realizarán sesiones de retroalimentación entre los miembros de cada equipo con el objetivo de mejorar su comunicación y estrategias.

Aritmética YITP: patrones, movimientos y algoritmos

RYTP utiliza la representación de números, movimientos (*básicos*, de *expansión* y *compuestos*) y algoritmos YITP para la resolución de operaciones aritméticas. La explicación detallada de dichos algoritmos se encuentra en los libros y artículos seminales de YITP señalados en el título anterior.

Conclusiones

RYTP se viene investigando de manera observacional, cualitativa y empírica, principalmente en niños, adolescentes y jóvenes en edad escolar (primaria y secundaria). Dichos estudios sugieren que RYTP, además de poseer los mismos atributos que YITP (reduce la memoria de trabajo, facilita la imaginación, abstracción y el desarrollo de estrategias)(Guzmán-Jiménez et al, 2022), incentiva a los estudiantes a realizar el trabajo en equipo de manera organizada y comunicativa: los estudiantes manifiestan que disfrutaban de elaborar nuevas estrategias de juego y código verbal que acelere sus dinámicas, principalmente cuando juegan en modalidad *Atipanakuy* (Dhavit-Prem et al, 2019), la cual consiste en competencia de equipos en dos o más yupanas simultáneas. Próximas investigaciones serán de tipo híbrido: cuantitativo y cualitativo, orientadas a analizar eficacia de resultados, tiempos, optimización de algoritmos y de ser factible, análisis de correlatos electrofisiológicos durante el desarrollo de las dinámicas RYTP en niños y adolescentes con y sin dificultades de aprendizaje. Si bien ya existen estudios que demuestran la conexión entre las habilidades psicomotrices y el desempeño en las matemáticas (Beck MM. 2016), el objetivo es encontrar las posibles implicancias directas del RYTP tanto en la aptitud como en la actitud frente a las matemáticas.

Referencias y bibliografía

- Amato S. et al (2013) The Abacus: Instruction by Teachers of Students with Visual Impairments. 272 Journal of Visual Impairment & Blindness, July-August 2013
- Beck, MM. et al. (2016) Motor-Enriched Learning Activities Can Improve Mathematical Performance in Preadolescent Children. *Front. Hum. Neurosci.* 10:645. doi: 10.3389/fnhum.2016.00645
- Boecker, H., and Drzezga, A. (2016). A perspective on the future role of brain pet imaging in exercise science. *Neuroimage* 131, 73–80. doi: 10.1016/j.neuroimage.2015.10.021
- Chaddock-Heyman, L. et al. (2013). The effects of physical activity on functional MRI activation associated with cognitive control in children: a randomized controlled intervention. *Front. Hum. Neurosci.* 7:72. doi: 10.3389/fnhum.2013.00072
- Chen, A. G., Zhu, L. N., Yan, J., and Yin, H. C. (2016). Neural basis of working memory enhancement after acute aerobic exercise: fMRI study of preadolescent children. *Front. Psychol.* 7:1804. doi: 10.3389/fpsyg.2016.01804
- Cheron, G. et al (2016). Brain oscillations in sport: toward EEG biomarkers of performance. *Front. Psychol.* 7:246. doi: 10.3389/fpsyg.2016.00246
- Escotto-Córdova, E. A. (Ed.) (2021). *Alternancias semióticas: estrategia didáctica en la enseñanza de las matemáticas. La enseñanza que aporta la historia de las matemáticas [Semiotic alternations: didactic strategy in mathematic's teaching. Theteaching that supports the history of mathematics]*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza
- Fontes, E. B. et al. (2015). Brain activity and perceived exertion during cycling exercise: an fMRI study. *Br. J. Sport Med.* 49, 556–560. doi: 10.1136/bjsports-2012-091924
- Guaman Poma, F. (1616). *Nueva Corónica y Buen Gobierno*
- Gutmann, B. et al. (2018). The effects of exercise intensity and post-exercise recovery time on cortical activation as revealed by EEG alpha peak frequency. *Neurosci. Lett.* 668, 159–163. doi: 10.1016/j.neulet.2018.01.007

- Guzman-Jimenez, R., Dhavit-Prem, Saldívar, A., & Escotto-Córdova, A. (2023). Semiotic Alternations with the Yupana IncaTawa Pukllay in the Gamified Learning of Numbers at a Rural Peruvian School. *Educational Technology & Society*, 26 (1),79-94.79ISSN 1436-4522 (online) and 1176-3647 (print).
- Hernández-Mendo A. et al (2019) Physical Activity, Sports Practice, and Cognitive Functioning: The Current Research Status. *Front. Psychol.* 10:2658. doi: 10.3389/fpsyg.2019.02658
- Hong, Shen (2006) Teaching Mental Abacus Calculation to Students with Mental Retardation. *Journal of the International Association of Special Education*, v7 n1 p56-66 Spr 2006
- Huang, P., Fang, R., Li, B. Y., and Chen, S. D. (2016). Exercise-related changes of networks in aging and mild cognitive impairment brain. *Front. Aging Neurosci.*8:47. doi: 10.3389/fnagi.2016.00047
- L. Alvarado et al (2022), "Teaching of the Yupana with the Tawa Pukllay method for developing the Computational Thinking in children," 2022 IEEE World Engineering Education Conference (EDUNINE), 2022, pp. 1-5, doi: 10.1109/EDUNINE53672.2022.9782386.
- Leo, F. (2018) Improving spatial working memory in blind and sighted youngsters using programmable tactile displays. <https://doi.org/10.1177/2050312118820028>
- MoMath and Wolfram (2020). History of Mathematics Project - Incan Yupana. Rescatado de <https://www.history-of-mathematics.org/artifacts/incan-yupana>
- Novoa-Seminario, M. (2022). Programa de actividades psicomotoras para el desarrollo de habilidades matemáticas en niños y niñas de educación inicial: Psychomotor activities program for development of mathematical skills in initial educations' boys and girls . *Prohominum*, 2(2), 48–76. <https://doi.org/10.47606/ACVEN/PH0008> (Original work published 5 de junio de 2020)
- Piazza, M., et al. Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. *Cognition* (2011), doi:10.1016/j.cognition.2011.05.007
- Prem, Dhavit (2014-2016). Yupana Inka – Decodificando la matemática inka, Método Tawa Pukllay. Asociación Yupanki (Ed.)
- Prem, Dhavit (2018). Hatun Yupana Qellqa. Antología de estudios. Tawa Pukllay esencial y extensiones. Asociación Yupanki (Ed.)
- Prem, Dhavit et al (2019). Tawa Pukllay Atipanakuy: The 4 Sacred Games of the Inkas in a ludic arithmetic competition. Editora Artemis. DOI 10.37572/EdArt_2806213851
- Prem, Dhavit et al (2022). Tawa Pukllay Proof: New Method for Solving Arithmetic Operations with The Inca Yupana Using Pattern Recognition and Parallelism, 2022 International Conference on Frontiers of Artificial Intelligence and Machine Learning (FAIML), Hangzhou, China, 2022, pp. 209-218, doi: 10.1109/FAIML57028.2022.00048.
- Shih, C. H., Moore, K., Browner, N., Sklerov, M., and Dayan, E. (2019). Physical activity mediates the association between striatal dopamine transporter availability and cognition in Parkinson's disease. *Parkinsonism Relat. Disord.* 62, 68–72. doi: 10.1016/j.parkreldis.2019.01.027