

XVI CIAEM 

Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education

 UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023


xvi.ciaem-iacme.org

Razonamiento proporcional: desafíos de su enseñanza en la formación inicial del profesorado

Pilar Peña-Rincón

Campus Villarrica, Pontificia Universidad Católica de Chile
Chile.

ppenar@uc.cl

Nielka Rojas González

Escuela de Educación, Universidad Católica del Norte
Chile

nrojas03@ucn.cl

Constanza **Ledermann** López

Laboratorio de Educación, Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Chile

constanza.ledermann@uchile.cl

Helena **Montenegro** Maggio

Laboratorio de Educación, Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Chile

helena.montenegro@uchile.cl

Resumen

Esta propuesta comparte los resultados preliminares de un dispositivo instruccional orientado a caracterizar las relaciones de proporcionalidad directa a partir de la comparación de la relación entre las variables implicadas en diversas situaciones problemáticas con dos variables. El estudio empleó un enfoque de investigación basado en diseño, cuyo propósito es fortalecer prácticas de enseñanza mediante el análisis de ciclos iterativos de diseño, desarrollo e implementación de un dispositivo educativo. El dispositivo instruccional es una secuencia didáctica sobre la unidad de proporcionalidad compuesta de tres clases, en las cuales se trabaja en base a un set de cartas diseñado especialmente, el cual fue testeado en una muestra conformada por 19 estudiantes en formación de primer año. Los resultados obtenidos permiten sostener que los estudiantes lograron un aprendizaje comprensivo del razonamiento proporcional, formulando problemas contextualizados a las problemáticas locales. Finalmente, se discuten las implicancias prácticas de los hallazgos obtenidos.

Palabras clave: Educación Matemática; Razonamiento proporcional; Formación docente; Perspectiva Sociocultural de las Matemáticas; Dispositivo Instruccional.

Abstract

This proposal shares the preliminary results of an instructional device that characterizes direct proportionality relationships by comparing the relationship between the variables involved in various problem situations with two variables. The study employed a design-based research approach, whose purpose is to strengthen teaching practices through the analysis of iterative cycles of design, development, and implementation of an instructional device. The instructional device is a didactic sequence on the unit of proportionality composed of three classes. In every class, student teachers work with a specially designed set of cards tested on 19 first-year undergraduate students. The results show that the student teachers comprehensively learned proportional reasoning and formulated problems contextualized to local problems. Finally, the practical implications of these findings are discussed.

Keywords: Mathematics education; Proportional reasoning; Teacher education; Socio-Cultural Perspective of Mathematics; Instructional device.

Introducción

El razonamiento proporcional forma parte de los contenidos fundamentales que se enseñan de manera transversal en las matemáticas en sus distintos niveles, y tiene que ver con comprender cómo una cantidad varía en función de otra. Entendemos que hay una relación proporcional cuando existe una relación entre dos cantidades que, si bien podría variar, siempre permanece en la misma relación o razón (Mineduc, 2014). Además, la comprensión de esta relación y su representación mediante gráficas y expresiones algebraicas contribuye al desarrollo de la habilidad de modelar, aportando al aprendizaje de la física y otras ciencias (Mochón, 2012), sustentando el estudio de las funciones.

En Chile, el currículum nacional comienza a abordar el desarrollo de este tema en sexto año básico cuando se espera que niñas y niños aprendan a demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla; lo aplican en la resolución de problemas sencillos; identifican patrones entre los valores de la tabla; y formulan una regla con lenguaje matemático (Mineduc 2022a). En séptimo básico se estudian las proporciones directas e inversas a partir de información presentada en tablas y modelando la relación mediante gráficas. En octavo básico se avanza en comprender cómo se relacionan las variables en la función afín, que las modelen con gráficas y expresiones algebraicas, y que apliquen las propiedades de proporcionalidad para modelar distinto tipo de situaciones (Mineduc, 2022b).

Sin embargo, diversos estudios reportan que las ideas de proporcionalidad son mal comprendidas, principalmente debido a que en el aula escolar se enseña de manera mecánica, sin lograr comprender de manera significativa el razonamiento proporcional a la base. Esto genera diversos errores en el estudiantado, como por ejemplo utilizar un razonamiento aditivo erróneo y

no reconocer la relación entre las variables, entre otros (Mochón, 2012). Una posible explicación a estas dificultades, según lo reportado por diversos estudios, radica en la formación inicial docente pues tanto el profesorado en ejercicio como quienes se están formando poseen dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Burgos et al., 2018). Por lo tanto, estaríamos en presencia de un obstáculo didáctico pues depende de los modos de enseñanza (Brousseau, 1983).

En efecto, una de las principales dificultades que se han identificado en estos estudios es que las y los docentes tienden a utilizar el algoritmo de la multiplicación cruzada (regla de tres) para resolver un problema, sin razonar si ese algoritmo es pertinente para la resolución de ese problema (Burgos et al., 2018). Otro error frecuente es no considerar algunos supuestos para poder determinar la relación proporcional de las variables, influyendo en el resultado obtenido. En otras palabras, las y los docentes tienden a focalizar la enseñanza desde un enfoque operacional relacionado con la aplicación de reglas y algoritmos, sin colocar una mayor atención al desarrollo de una comprensión más conceptual con foco en las relaciones entre las variables y el razonamiento proporcional (Lamon, 2007).

Para poder fortalecer el razonamiento proporcional en la formación inicial del profesorado, se considera crucial potenciar experiencias de aprendizaje significativo que busquen tensionar estos aspectos desde una perspectiva sociocultural de las matemáticas, permitiendo avanzar hacia una comprensión más conceptual de este razonamiento. Una forma de poder avanzar en el desarrollo de experiencias de aprendizaje significativo es el diseño de dispositivos instruccionales orientados a levantar evidencias sobre su funcionamiento (Reimann, 2011). De esta forma es posible identificar aquellos aspectos necesarios de reforzar que puedan desarrollar un mayor conocimiento didáctico del contenido.

En virtud de ello, en este estudio se comparten los resultados preliminares en el diseño de un dispositivo instruccional orientado a que las y los docentes en formación sean capaces de caracterizar las relaciones de proporcionalidad directa a partir de la comparación de la relación entre las variables implicadas en diversas situaciones problemáticas con dos variables. Para ello, se empleó un enfoque de investigación basado en diseño (Design Based Research, DBR), el cual tiene como propósito fortalecer prácticas de enseñanza por medio del análisis de ciclos iterativos de diseño, desarrollo e implementación de un dispositivo educativo (Reimann, 2011). Se espera que los resultados de este estudio contribuyan con aportar con un modelo de enseñanza innovador de este contenido, el cual puede ser replicado en otros contextos educativos.

Metodología

Este estudio emplea un enfoque de investigación basado en diseño (*Design Based Research*, DBR) para testear el diseño de dispositivos instruccionales orientado a la enseñanza de un contenido en particular (Reimann, 2011). Esta metodología se caracteriza por ser un enfoque de investigación que se desarrolla en contextos naturales y que tiene como finalidad el desarrollo de teorías asociadas a experiencias de aprendizaje. Reimann (2011) plantea que este tipo de investigación se caracteriza por ser pragmático, de naturaleza interactiva e iterativa, y por tener un fuerte componente contextual. La aplicación de este enfoque contempla tres fases: la primera consiste en preparar la planificación del diseño del dispositivo; en una segunda fase se testea el

modelo y/o diseño a experimentar, recolectando evidencias de la implementación; y, finalmente, en la tercera fase se realiza un análisis en retrospectiva aplicando marcos interpretativos de los principales resultados obtenidos (Reimann, 2011).

El dispositivo instruccional que se implementó correspondió a una secuencia didáctica sobre la unidad de proporcionalidad compuesta de tres clases orientadas principalmente a caracterizar el tipo de relaciones que se da entre dos variables implicadas en una situación, estableciendo si algunas situaciones requieren de supuestos para que se cumpla la relación entre las variables y modelizando las situaciones de proporcionalidad directa mediante su representación gráfica y algebraica. Además, se realizó una clase orientada a evaluar los aprendizajes alcanzados mediante la elaboración de cuatro ejemplos de situaciones problemáticas que contemplaran al menos un ejemplo de proporcionalidad directa.

Este dispositivo contempla un set de 116 tarjetas plastificadas de 9 x 12 centímetros diferenciadas por cuatro colores: amarillo, gris, verde y rojo. El set fue elaborado en base a 29 grupos de 4 tarjetas asociadas a una misma situación problemática, en la cual las tarjetas amarillas aparecen descrita una situación, en las grises aparecen las variables implicadas, en las verdes están las tablas de valores, y en las rojas están las gráficas. Algunas tarjetas grises, verdes y rojas están en blanco para que las y los estudiantes las pudiesen completar. En la figura 1 se comparte el material diseñado para esta actividad instruccional.

La implementación de esta actividad se realiza en grupos conformado por cuatro personas a lo largo de tres clases. En la *primera clase* se les pide a los grupos que emparejen las situaciones descritas en las tarjetas amarillas con las variables definidas en las tarjetas grises, y que en caso de que la situación no tenga una tarjeta con las variables definidas, identificaran las variables escribiéndolas en una tarjeta gris. Luego se pide que analicen las duplas de tarjetas amarillas-grises, agrupándolas según el tipo de variación que logran identificar.

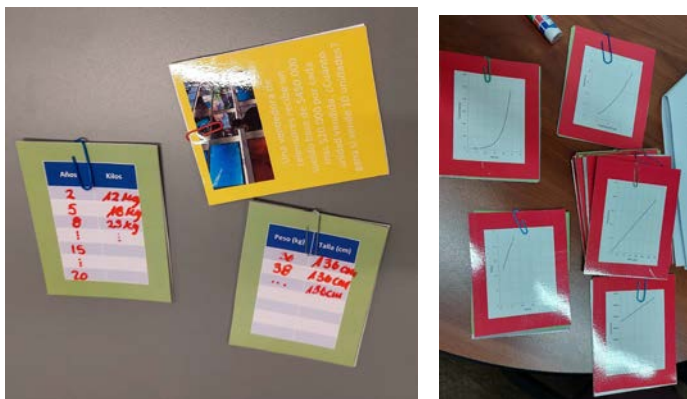


Figura 1. Set de naipes para trabajar proporcionalidad

En la *segunda clase* se trabaja sólo con las tarjetas identificadas como variaciones aumenta/aumenta, aumenta/constante y sin relación, y se les pide a los grupos que junten los pares de tarjetas amarilla/gris con las correspondientes tablas descritas en las tarjetas verdes, escribiendo los valores en caso de que la tabla no los tuviera. Posteriormente, se les pide a las y los docentes en formación que agruparan los tríos de tarjeta con las gráficas correspondientes

impresa en las tarjetas rojas (dibujando también las gráficas en caso de que faltaran), y que luego analizaran los cuartetos de tarjetas (amarillas-grises-verdes-rojas) para agrupar aquellas que tuvieran gráficos similares. En esta clase se discute que en algunos casos no es posible completar las tablas porque no hay regularidad, y que en otros casos la tabla sólo se puede completar bajo ciertos supuestos. También se caracterizan los tipos de gráficos que emergen y se establece qué se entiende por proporcionalidad directa, registrándose las principales conclusiones en una diapositiva de la clase tal como puede observarse en la figura 2.

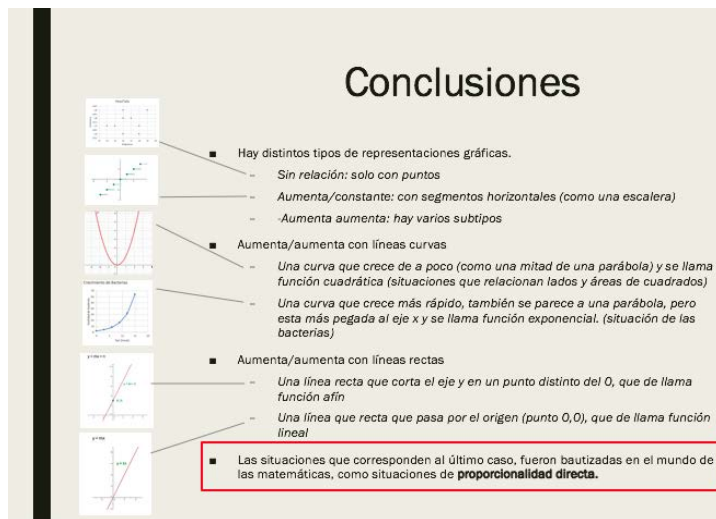


Figura 2. Imagen de una conclusión sobre tipos de gráficas establecida en la segunda clase

En la *tercera clase* se pide a los grupos de docentes en formación que identifiquen cuáles de estas situaciones son de proporcionalidad directa considerando que se representan con la gráfica de la función lineal representada por $y=mx$ o $f(x)=mx$. Además, se pide que analicen las situaciones con sus tablas y sus representaciones gráficas para descubrir cómo se puede obtener el valor de “m” en cada caso. La finalidad de esta actividad es poder concluir que el valor de m en $y=mx$ equivale a la constante de proporcionalidad que usualmente se calcula con y/x . Por último, en una *cuarta clase* se realiza una evaluación de los aprendizajes por medio de la recolección de producciones de los y las docentes en formación. Para ello se pidió que nuevamente en grupos conformados por 4 personas elaboren un set de tarjetas con 4 situaciones (16 tarjetas) considerando el tipo de situaciones que les parecieron esenciales para su proceso de aprendizaje. Cada integrante tenía que elaborar 4 tarjetas que incluía una situación con sus respectivas variables, tabla y gráfica.

La muestra en la cual se testeó el dispositivo fue por conveniencia (McMillan & Schumacher, 2005), y está conformada por las y los estudiantes en formación que cursan primer año en un programa de formación en Pedagogía en Educación Básica. Participaron de esta implementación 19 docentes en formación de primer año que se encontraban cursando la asignatura de Números. Los datos recolectados para este estudio fueron las respuestas de las y los docentes en formación desarrollada en la actividad de evaluación, y se analizaron cualitativamente (Miles et al., 2014), considerando las siguientes categorías de análisis predefinidas: tipo de tema que se propone en la situación problema; tipo de relación proporcional

y función propuesta; y forma de contextualizar y señalar los supuestos a la base del problema desarrollado.

Resultados

El análisis de los distintos sets de tarjetas elaborados por las y los docentes en formación entregan resultados interesantes de consignar. En primer lugar, si bien la totalidad de los participantes ($n=19$) entregó una situación problemática en base a las 4 tarjetas solicitadas, 17 (89.14%) lograron responder óptimamente a la tarea encomendada y 2 (10.86%) crearon situaciones con errores de sentido. Por errores de sentido nos referimos a que, si bien la relación entre las variables implicadas corresponde al tipo de relación matemática que se quería representar, hay aspectos que carecen de sentido entre la situación problemática y la realidad. Por ejemplo, una persona propuso la siguiente situación: “En una tienda de pastelería, 10 porciones de pastel tienen un costo de \$20 pesos. ¿Cuánto costará 20 porciones de pasteles? Y si quiero 40 porciones, ¿cuánto gastaré?”. Tal como se aprecia en este ejemplo, la relación es de proporcionalidad directa, pero no se considera que en nuestro país un pastel no se alcanza a producir con \$20 pesos (el kilo de harina cuesta \$1200 pesos); por lo tanto los valores que se proponen no tienen sentido.

Por otra parte, un alto porcentaje de los participantes (63.16%; $n=12$) formuló situaciones problemáticas de proporcionalidad directa asociados a una función lineal (por ejemplo “Sofía camina 2 kilómetros en 20 minutos, con una velocidad constante. ¿Cuánto se demorará con la misma velocidad recorrer 7 kilómetros? ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer en 50 minutos?”). El resto de los participantes propuso situaciones problemáticas no proporcionales asociadas a funciones afín (3 casos); funciones exponenciales (2 casos); y funciones cuadráticas escalares (un caso).

Otro aspecto interesante de reportar es el análisis cualitativo realizado a cada una de las situaciones problemáticas propuestas por la y los estudiantes en formación. 29 % de los participantes ($n=6$) contextualizó una situación problemática local, otorgando mayor sentido y cercanía a la situación que planteaban (“Marcelo es guía de alta montaña y trabaja en una agencia de turismo. Tiene un sueldo base de \$400.000 más \$20.000 por cada subida al volcán Rukapillán. ¿Cuánto gana si sube al volcán 20 veces en el mes?). De manera similar, 2 participantes (12%) refiere a una situación problemática contextualizada de manera global, dando también pertinencia al problema relatado (“Una profesora tiene un sueldo de \$700.000 y obtiene \$10.000 por cada reforzamiento que realice. Si este mes hace 5 reforzamientos, ¿Cuánto dinero va a obtener? ¿Y si hace 8?”).

Sin embargo, 5 participantes (35%) proponen situaciones problemáticas de baja complejidad y 4 propuestas no informan o señalan los supuestos a la base. Por ejemplo, un estudiante propone el siguiente problema “50 hormigas recolectan 200 hojas en un día. 100 hormigas recolectan 400 hojas en un día. ¿Cuántas hojas recolectan 150 hormigas en un día?” En la formulación de este problema se parte del supuesto de que todas las hormigas tienen el mismo rendimiento, pero no se dice ni se explicita.

Discusión

Este estudio reporta resultados preliminares sobre las respuestas de docentes en formación frente a una secuencia didáctica orientada a caracterizar las relaciones de proporcionalidad directa a partir de la comparación de la relación entre las variables implicadas en diversas situaciones problemáticas con dos variables. En términos generales, los resultados obtenidos de los análisis de la definición de las variables, el análisis de las relaciones, la caracterización de tipos y subtipos de relación en base a análisis comparativo, y la consideración de los supuestos permiten sostener que la y los docentes en formación lograron un aprendizaje comprensivo del razonamiento proporcional con foco en las relaciones entre las variables.

Otro aspecto interesante de consignar es que, a pesar de que no hubo aplicación de reglas ni de algoritmos, la y los docentes en formación pudieron comprender conceptualmente la proporcionalidad directa, al entregar ejemplos acertados sobre esta (Lamon, 2007). Además, varios participantes contextualizaron algunas situaciones problemáticas considerando el entorno local, lo cual es muy significativo porque da cuenta de un aprendizaje con sentido.

Los resultados de este estudio preliminar nos invitan a reflexionar sobre aspectos claves de contemplar en la enseñanza de este contenido. Por ejemplo, se considera fundamental continuar con el desarrollo de dispositivos instruccionales que permitan una enseñanza conceptual y comprensiva de la proporcionalidad, explicitando los supuestos a la base en la formulación del problema en sintonía con las formas de razonamiento proporcional. Además, el uso de dispositivos de esta naturaleza en los y las estudiantes en formación puede contribuir con una mejor apropiación de ideas matemáticas en ellos, posibilitando que puedan ser enseñadas con mayor pertinencia en el futuro cuando se inserten en el sistema escolar.

Agradecimientos

Este estudio es posible gracias al proyecto Fondecyt Regular 1212067, y apoyada por el Centro de Modelamiento Matemático FB210005, financiados por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID). También forma parte de la Cátedra Unesco *Formar docentes de matemáticas para el siglo XXI*.

Referencias y bibliografía

- Barab, S. (2006). Design-based research: A methodological toolkit for engineering change. In K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 151–170). Cambridge University Press.
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44(e182013). <https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013>
- Brousseau, G. (1983). Lês obstacles épistémologiques et lês problèmes em mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Lamon, S. (2016). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Volume 1* (pp. 629–667). Information AGE.
- McMillan, J., & Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa* (5th Ed.). Pearson Educación S.A.

- Miles, M., Huberman, M., & Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis. A Methods Sourcebook*. SAGE.
- Mineduc. (2014). *Guía didáctica del profesor de matemática. Conociendo los números PARTE 2, 1° a 6° Básico*. MINEDUC. <https://rural.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/22/2018/01/2014ConociendolosnumerosparteIIGuiadocente.pdf>
- Mineduc. (2022a) *Progresión de objetivos de aprendizaje para Matemática de 1° a 6° básico*. MINEDUC. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-71256_archivo_01.pdf
- Mineduc. (2022b) *Progresión de objetivos de aprendizaje para Matemática de 7° básico a 2° medio*. MINEDUC. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-71257_archivo_01.pdf
- Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24(1), 133–157.
- Reimann, P. (2011). Design-Based Research. In L. Markauskaite, L. Freebody, & P. Irwin (Eds.), *Methodological Choice and Design. Scholarship, Policy and Practice in Social and Educational Research* (pp. 37–50). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-8933-5>