



## Recursos abiertos de Probabilidad para la formación de profesores

Federico De Olivera  
Consejo de Formación en Educación  
Uruguay

[fededeo@gmail.com](mailto:fededeo@gmail.com)

Luciana Olesker  
Consejo de Formación en Educación  
Uruguay

[luciano05@gmail.com](mailto:luciano05@gmail.com)

Daniela Pagés  
Universidad de la República  
Uruguay

[danielapages@gmail.com](mailto:danielapages@gmail.com)

### Resumen

En esta comunicación se presenta un avance de una investigación en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemática de Uruguay, en el área de la enseñanza de la asignatura Probabilidad y Estadística. El estudio tiene como objetivo implementar recursos educativos abiertos diseñados en un proyecto anterior, a través de un experimento de diseño. Se espera que esta implementación informe el diseño de los recursos, y su eventual rediseño. La comunicación se centrará en una ejemplificación de los recursos a implementar y de las principales características de las primeras dos fases del experimento de diseño.

*Palabras clave:* Probabilidad y Estadística; Formación de profesores de matemática; Aleatoriedad; Recursos educativos abiertos; Experimentos de diseño.

### Introducción

Presentamos un avance de una investigación en curso sobre la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística en la formación inicial de profesores de matemática de Uruguay. Este estudio da continuidad a uno anterior desarrollado por el mismo grupo de investigadores.

La formación de profesores de matemática en Uruguay es una carrera terciaria no universitaria, de carácter concurrente, con una duración de cuatro años (en el plan actual, 2008). Los profesores de matemática formados en esta carrera se desempeñan en enseñanza media básica, superior y terciaria. La formación se funda en tres pilares: la formación específica en matemática, la formación en Ciencias de la Educación, y la formación en Didáctica-Práctica Docente. La asignatura Probabilidad y Estadística forma parte del tercer año de cursada de la carrera, y es un curso anual, cuyo programa prevé 6 horas semanales de clase. Durante los dos primeros años de la carrera los estudiantes han abordado el estudio de distintas estructuras algebraicas (grupos, anillos, álgebras, cuerpos, espacios vectoriales). En el tercer año, junto con el curso de Probabilidad y Estadística, se encuentra un curso de Topología, en el que se abordan los espacios topológicos generales. La primera unidad del programa de Probabilidad y Estadística se propone trabajar con la teoría axiomática de la probabilidad, y la segunda unidad está destinada al estudio de las variables aleatorias. Luego el curso continúa con esperanzas, vectores aleatorios, convergencias y por último inferencia estadística.

Los futuros profesores traen consigo, inevitablemente, ciertas concepciones y creencias sobre la probabilidad y el azar que muchas veces son erróneas. Sin duda esto repercute en su desarrollo como estudiantes y en su labor futura en el aula. Consideramos fundamental analizar estas concepciones, para informar el diseño de actividades de enseñanza en la formación de profesores de matemática.

Nuestro grupo realizó un estudio curricular y didáctico, que consistió en el análisis de currículos de la formación docente de varios países, y una revisión posterior de la literatura sobre la formación de profesores en Probabilidad y Estadística (De Olivera et al., 2020). De esta investigación surgió el diseño de recursos educativos abiertos (REAs) sobre la primera unidad del curso de Probabilidad y Estadística de la formación de profesores de matemática: espacios de probabilidad.

La investigación que estamos llevando adelante se propone implementar y analizar los REAs elaborados en el estudio anterior, utilizando la metodología de Investigación en Diseño. Para ello revisamos los REAs ya elaborados, haciendo los ajustes necesarios para su implementación. Al mismo tiempo, como parte de la metodología elegida, diseñamos la implementación en clase de estos REAs, como se indica en el apartado de metodología. El estudio se encuentra en la etapa de implementación de los ciclos de investigación y diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008), y continuará con el análisis retrospectivo de los datos obtenidos.

En esta comunicación presentamos algunos de los REAs a modo de ejemplo, y las principales componentes de las dos primeras fases de acuerdo con la metodología.

### **Antecedentes**

La investigación sobre el pensamiento probabilístico, en el área de la Educación Matemática, es bastante reciente. Los trabajos de autores como Jones (2005); Burrill y Elliot (2006); Borovcnik y Kapadia (2009); Biehler y Pratt (2012) entre otros dan muestra de esto.

Batanero (2001) presenta un desarrollo histórico del concepto de aleatoriedad, a través del que describe los distintos enfoques que se presentan. La primera es la concepción clásica, que plantea la equiprobabilidad de los distintos resultados de un fenómeno. Luego surge la concepción frecuencial, por la que un objeto se considera miembro aleatorio de una clase si puede elegirse por un método que asigne a cada miembro una frecuencia relativa a priori, luego de un gran número de casos. Estas concepciones son criticadas por Kyburg (1974), quien define la aleatoriedad en base a cuatro elementos: el objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase; el conjunto del cual el objeto es un miembro aleatorio (población o colectivo); la propiedad con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada; el conocimiento de la persona que decide si el objeto es aleatorio, o que asigna una probabilidad. Aparece así una concepción subjetiva de la probabilidad.

Olesker (2013) realizó un estudio sobre los significados otorgados a la aleatoriedad y a la probabilidad en la educación media de Uruguay. La autora señala que:

Al determinar el significado institucional dado a la aleatoriedad y la probabilidad en la enseñanza media uruguaya ha quedado establecida una preponderancia marcada del enfoque clásico. Los tipos de problemas en donde se utiliza la regla de Laplace son los que tienen mayor frecuencia de aparición en los libros analizados. Nuestra investigación mostró una tendencia excesivamente clásica de la probabilidad en la enseñanza uruguaya, con un gran énfasis en lo operatorio sobre lo experimental. En ambos ciclos de enseñanza: Básico y Bachillerato existe una preponderancia de problemas con un enfoque clásico, en los que se aplica la regla de Laplace y las propiedades de la probabilidad (p. 384).

Como ya hemos establecido, los futuros profesores no escapan a concepciones y creencias erróneas acerca de la probabilidad y el azar. De Olivera et al. (2018) encontraron que estudiantes avanzados de formación de profesores de matemática, aún preservaban ideas erróneas del azar y sus características. Si bien reconocieron como aleatoria la experiencia de tirar una moneda al aire, al preguntarles qué sucedía si doblamos la moneda en un borde, la mitad de los estudiantes consideraron que ya no era aleatorio. Parecería que asociaban la aleatoriedad con la equiprobabilidad. En dicha investigación también surge que en muchas ocasiones se asocia lo aleatorio con lo futuro. No reconocen un fenómeno aleatorio en términos de la información que se posea, es decir, un experimento pasado en general no es considerado aleatorio y esto va en directa relación con la falta del concepto subjetivo de aleatoriedad. A partir de esta investigación, realizada con estudiantes avanzados de la formación docente en Uruguay, se ven indicios de lo que se ha llamado “creencia en la ley de los pequeños números”, cuando se aplica a repeticiones de experimentos, esperando que los próximos experimentos sean forzados a modificar su resultado para que se mantenga la frecuencia deseada (De Olivera et al., 2018). La creencia en la ley de los números pequeños fue descrita inicialmente por Kahneman et al. (1982). Esta creencia describe la fuerte tendencia de la gente a creer que la información obtenida en una pequeña muestra será representativa de la población total.

Por otro lado, no es suficiente que los profesores de matemáticas de secundaria tengan una comprensión de las matemáticas avanzadas; también deben ser capaces de conectar sus cursos avanzados con el contenido que ellos enseñarán (Ticknor, 2012, p. 307). Wasserman (2018)

sostiene que la enseñanza de la matemática avanzada debe estar vinculada con las necesidades profesionales de los futuros profesores.

A partir de estos antecedentes el equipo de investigación diseñó REAs para ser utilizados, a modo de una secuencia de enseñanza, en el desarrollo de la primera unidad del programa de la asignatura Probabilidad y Estadística de la formación de profesores. En el proyecto que presentamos se reporta la implementación de estos recursos en la clase. A continuación, presentamos los principales elementos metodológicos de la investigación.

### **Metodología**

Para cumplir con los objetivos propuestos para esta investigación, hemos seleccionado como metodología la Investigación basada en Diseño, y dentro de ella, los experimentos de enseñanza (Cobb y Gravemeijer, 2008).

La Investigación basada en Diseño constituye un paradigma de investigación fundamentalmente cualitativa. De acuerdo con Molina et al. (2011):

Su objetivo es analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación (p. 76).

Las características principales de la Investigación basada en diseño son: su propósito de generar teorías situadas sobre el aprendizaje, su naturaleza intervencionista, la conjunción de confrontar conjeturas con lo que ocurre realmente en el aula sumada a la reflexión continua sobre la implementación, la naturaleza cíclica, dada por la continua evaluación y eventual rediseño entre una clase y la siguiente (Bakker y van Eerde, 2015). A su vez, Molina et al. (2011) señalan que "... un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los investigadores son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores" (p. 79). Este tipo de estudios rompe la diferenciación entre docente e investigador, ya que estos necesitan experimentar de primera mano el aprendizaje de los estudiantes y las dificultades presentadas.

Nuestra investigación consiste en la implementación de recursos abiertos ya elaborados y fundamentados, que constituyen tareas a ser aplicadas en la clase. Estos recursos se diseñaron específicamente para ser implementados por formadores de profesores en los cursos de Probabilidad y Estadística, durante la primera unidad del curso.

Los experimentos de diseño incluyen tres fases: la preparación del experimento, la experimentación en la clase y la realización de análisis retrospectivos.

La primera fase incluye el análisis de las problemáticas vinculadas con el tema a enseñar, la determinación y clarificación de los objetivos de las clases a implementar, la selección o diseño de las actividades para la clase, el discurso del docente, y todo lo vinculado con la posterior implementación del experimento. Esto implica una revisión de la literatura, análisis de estudios psicológicos y curriculares, evaluaciones propias del equipo. En particular, se deben establecer puntos finales de aprendizaje que se quieren alcanzar, así como conjeturar un posible

proceso de aprendizaje y las formas de sostenerlo (Cobb y Gravemeijer, 2008). El experimento debería incluir también la explicitación de una intención teórica del experimento. En el caso de nuestro estudio, algunos de estos elementos fueron considerados y analizados profundamente durante la investigación anterior, que culminó con el diseño de los REAs. A continuación presentamos una descripción de la fase 1 en relación con los recursos a implementar, que fueron elaborados en el estudio anterior.

### **Fase 1: preparación del experimento**

Durante esta fase, y a partir del estudio realizado anteriormente, establecimos los objetivos de aprendizaje de la secuencia conformada con los REAs. Presentamos una breve descripción de cada recurso, y los objetivos con que fueron elaborados. Los recursos pueden visualizarse en <https://sites.google.com/view/grupopye/reas?authuser=0>.

#### **Recurso sobre espacio muestral**

El objetivo de este recurso es “retomar las ideas que traen los estudiantes, trabajar y reflexionar sobre ellas, para así construir conceptos más certeros y profundos sobre estos conocimientos iniciales” (De Olivera et al., 2020, p. 41). De forma particular se espera que a través de este recurso se identifiquen los resultados posibles de diferentes tipos de experimentos, así como las formas de registrarlos. También se espera discutir sobre objetos distinguibles e indistinguibles.

La segunda actividad se propone en el contexto del clima, donde el espacio muestral es un intervalo. Además, tiene el objetivo de discutir la unicidad del espacio muestral. Esta idea se aborda también en las actividades 3 y 4.

#### **Recurso sobre simulación de experimentos**

Este REA tiene como objetivo introducir los primeros elementos de la simulación Monte Carlo. En particular, que los futuros profesores desarrollen habilidades para simular problemas. Se procura discutir qué aspectos de la realidad es preciso fijar para la simulación, y especificar hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado.

La primera actividad de este recurso aborda la simulación de una moneda honesta. Se pide a los estudiantes que elaboren mecanismos de simulación y se propone su comparación. Se aprovechan estas actividades para introducir el uso de software. Luego se propone la simulación de una moneda cargada, y de un dado no cargado. En la siguiente actividad se presenta un mecanismo y se pide valorar si corresponde a una simulación.

La segunda actividad plantea la simulación de experimentos compuestos. Las siguientes actividades de este recurso introducen las probabilidades binomiales y una primera aproximación al teorema central del límite, a través de la máquina de Galton. Finalmente se presentan dos problemas relativos a la toma de decisiones involucrada en la simulación.

### **Recurso sobre definiciones de probabilidad**

Este REA aborda las distintas interpretaciones de la probabilidad: clásica, frecuencial, subjetiva, y finalmente la definición axiomática. Varios autores (Batanero et al., 2012; Batanero, 2001; Olesker, 2013) sugieren trabajar las distintas definiciones en forma de espiral, por ejemplo, resolver un mismo problema usando las diferentes interpretaciones. El recurso consta de dos problemas iniciales: el de los cumpleaños y el de los nacimientos. Se propone resolverlos, en primer lugar, usando simulaciones. Se pretende comparar el resultado de la simulación con las respuestas intuitivas iniciales de los estudiantes. A continuación se aborda la resolución matemática de estos problemas.

Se propone luego una actividad relacionada con la práctica docente de los futuros profesores. Se pide el diseño de una secuencia didáctica para trabajar el problema de los cumpleaños en educación media y en bachillerato.

Finalmente se aborda el carácter subjetivo del azar, poniendo en tela de juicio la equiprobabilidad. A partir de esto se abordan explícitamente las distintas definiciones de probabilidad.

### **Recurso sobre dominio de la probabilidad**

Este recurso se presenta en el contexto de la gestión de la información. Se enfoca en el dominio de la probabilidad y la sigma álgebra. Numerosas investigaciones concluyen en la necesidad de atender el desarrollo de estos conceptos matemáticos (Batanero et al., 2012; Parraguez et al., 2017; Fernandes et al., 2016). El REA se inicia con una encuesta (cuestionario SCORM), que pretende que los estudiantes evoquen los conceptos que tienen sobre los subconjuntos a los que se les puede calcular la probabilidad. Luego se presenta la actividad del recurso, que consta de tres partes. La primera se vincula con los resultados posibles de un experimento. Se espera que se genere un conflicto sobre cuál sería el espacio muestral, y aborda la posibilidad de calcular la probabilidad de algunos sucesos elementales. Se pretende concluir que existen algunos a los que no se les puede calcular la probabilidad en el contexto de la actividad, pero sí a otros conjuntos que resultan de uniones. Esto llevará a reflexionar acerca de las propiedades de la probabilidad. Las siguientes dos partes del recurso dan más información para el problema inicial, de forma de poder hallar la probabilidad de todos los sucesos elementales.

### **Recurso sobre pruebas compuestas**

La investigación reporta dificultades al trabajar con experimentos compuestos y calcular probabilidades en ese contexto (Contreras et al., 2010; Fernandes et al., 2016). Por ejemplo, asociar equiprobabilidad e independencia cuando no las hay. Este recurso aborda estas dificultades, y también introduce el espacio de probabilidad condicional. Luego de la primera actividad se abordan los conceptos de experimento simple y compuesto. La segunda actividad refiere al uso de notaciones y el establecimiento de algunas convenciones. Finalmente se presentan algunos aspectos teóricos, como el teorema de la probabilidad compuesta, que se

utiliza en la siguiente actividad del recurso. Se define el espacio de probabilidad condicional y el recurso culmina con una actividad relativa a dicho espacio.

### **Recurso sobre probabilidad condicional e independencia**

Este REA comienza con una serie de ejemplos para luego discutir los conceptos teóricos. También se busca realizar consideraciones didácticas vinculadas con su futuro desarrollo profesional, vinculadas a ideas erróneas usuales. Se define independencia a partir de actividades sobre probabilidad condicional. Luego se aborda la probabilidad total de un suceso y el teorema de Bayes (a través de la visualización de un video).

Los seis recursos elaborados sobre espacios de probabilidad suponen una trayectoria hipotética de aprendizaje, elaborada colectivamente por el equipo, dos de cuyos integrantes tienen amplia experiencia en el curso de Probabilidad y Estadística para la formación de profesores. Esta trayectoria hipotética será puesta a prueba durante el experimento, y sujeta a posibles ajustes durante su realización, y posiblemente también con posterioridad a su implementación. Para esto, el equipo ha resuelto combinar las clases en las que se pongan en práctica estos recursos, con reuniones de evaluación y corrección posteriores a cada clase.

### **Fase 2: implementación de los recursos en la clase**

La fase de experimentación será realizada durante el primer mes del año lectivo 2023. Esta etapa consiste en un proceso cíclico de diseño, rediseño y testeo de las actividades a utilizar en la clase, así como otros aspectos de la implementación, a la vez que se desarrolla la puesta en práctica de esas actividades. Un aspecto fundamental es la discusión sobre la gestión docente en las clases, lo que incluye las formas de presentar e implementar las tareas, las preguntas e intervenciones docentes, así como las normas sociales y sociomatemáticas a establecer durante la enseñanza (Yackel y Cobb, 1996).

Durante la experimentación en clase, el equipo de investigadores debe analizar el proceso real de participación y aprendizaje de los estudiantes, en comparación con la trayectoria hipotética de aprendizaje elaborada en la primera fase. Esto implica también la toma de decisiones entre clase y clase, acerca de las conjeturas elaboradas previamente.

### **A modo de cierre**

Consideramos que este trabajo puede aportar a la formación de profesores en Probabilidad y Estadística, ya que la implementación en clase de los recursos elaborados nos permitirá evaluarlos y mejorarlos, a partir de la participación real de los estudiantes. Los hallazgos y conclusiones que surjan de la experimentación serán presentados en la comunicación.

### **Referencias y bibliografía**

Bakker, A. y van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example from Statistics Education. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping, N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 429-466). Springer.

- Batanero, C. (2001). *Aleatoriedad, Modelización, Simulación*. X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Zaragoza. Recuperado de: <https://ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Jaem2001.pdf>
- Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L. y Contreras, J. (2012). Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1(3), 222—245. <http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2012.13>
- Biehler, R., & Pratt, D. (Eds.) (2012). Probability in reasoning about data and risk [special issue]. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 44(7), 819–952.
- Borovcnik, M. y Kapadia, R. (Eds.) (2009). Research and developments in probability education [special issue]. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3). <https://doi.org/10.29333/iejme/233>
- Burrill, G. F. y Elliott, P. C. (Eds.) (2006). *Thinking and reasoning with data and chance: sixtyeighth yearbook*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R.A. Lesh y J. Y. Baek (eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*. (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.
- Contreras, J.M., Díaz, C., Batanero, C. y Ortiz, J. J. (2010). Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo. *Educação Matemática e Pesquisa*, 12(2), 181—198.
- De Olivera, F., Olesker, L. y Pagés, D. (2018). Concepciones de los futuros docentes sobre la aleatoriedad. Un estudio en el profesorado de matemática. *Reloj de agua*, 16, 5-14.
- De Olivera, F., Olesker, L. y Pagés, D. (2020). *Diseño de recursos educativos abiertos para la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística en la formación de profesores de matemática*. Consejo de Formación en Educación. Montevideo: Mastergraf SRL.
- Fernandes, J. A., Gea, M. M. y Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. En C. Fernández, J. L. González, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 178—187). SEIEM.
- Jones, G. A. (Ed.) (2005). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*. Springer.
- Kahneman, D.; Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press.
- Kyburg, H. (1974). *The logical foundation of Statistical Inference*. Springer.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 29 (1), 75-88. Recuperado de <https://ensciencias.uab.es/issue/view/v29-n1>
- Olesker, L. (2013). *Significados dados a la aleatoriedad y a la probabilidad en el contexto de la enseñanza media* (tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional del Comahue.
- Parraguez, R., Gea, M.M., Batanero, C. y Díaz-Levicoy, D. (2017). ¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad? *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 1(2), 1—16. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i2.3077>
- Ticknor, C. (2012). Situated learning in an abstract algebra classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 81. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9405-y>



Wasserman, N. (2018). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *Journal of Mathematical Behavior*, 49, 116-128. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.003>

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.