



STREM: Una experiencia de abordaje multifacético de la Matemática por estudiantes de profesorado

José Andrés **Ynoñán** Jiménez

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional Pedro Ruíz Gallo
Perú

aynonanj@unprg.edu.pe

Lucila Yosimar **López** Díaz

Facultad de Ciencias Histórico Sociales y Educación, Universidad Nacional Pedro Ruíz Gallo
Perú

llopezdi@unprg.edu.pe

Roxana Mercedes **Constantino** Quintana

Facultad de Ciencias Histórico Sociales y Educación, Universidad Nacional Pedro Ruíz Gallo
Perú

rconstantino@unprg.edu.pe

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar las diferentes facetas de la Matemática y su carácter dinámico, normalmente ausente en los planes curriculares, a través de la experiencia de STREM, un evento académico virtual de carácter regional, donde estudiantes de profesorado en Matemática de una universidad peruana, se muestran "haciendo matemática", conduciendo talleres, evidenciando el carácter histórico-cultural, creativo, generalizante, antiintuitivo, abstracto y lúdico de la Matemática. Concluimos con algunas reflexiones sobre el quehacer de la actividad matemática que nos deja la realización del evento.

Palabras clave: Educación Matemática; Enseñanza virtual; Formación docente inicial; Constructivismo; belleza matemática; papiroflexia; juegos; matemagia; Topología; Perú.

Introducción

La Matemática escolar carece de problemas, junto con la pregunta, se ofrece la respuesta, como es el caso del área de un triángulo, de entrada nos dan la fórmula, sin posibilidad de descubrirla; vista así, la Matemática, parece algo acabado y que no hay más que hacer, tal como manifiesta Lockhart: “las matemáticas no son algo que hacer, sino algo que te hacen” (Lockhart & Devlin, 2009). Es a partir de preguntas genuinas, así como, a través de un proceso inductivo, como se aprende. Ese proceso de “hacer matemáticas” se planteó y llevó a cabo a través de un evento virtual denominado STREM: Seminario Taller Regional de Educación Matemática, propuesto por un Profesor y estudiantes de la carrera de Educación Matemática de la Universidad Nacional Pedro Ruíz Gallo (UNPRG) de Lambayeque, Perú.

En principio, el docente planteó escoger un tema de interés a los estudiantes para que lo expongan, dado que se pensó en un evento virtual, la condición es que fuera visual, que generase emociones positivas, y se mostrara en lo posible manipulable. Los estudiantes hicieron la exploración bibliográfica. En todos los casos se procedería en forma inductiva, a partir de preguntas que se intentaron responder y tal vez generar nuevas interrogantes. Siguiendo un proceso análogo de trabajo al de un matemático profesional, salvando obvias distancias, utilizando la creatividad, se apreciará la belleza y las conexiones de la Matemática con el arte.

El evento STREM, organizado por estudiantes de Educación Matemática de la UNPRG, se pensó en un alcance regional (Macro Región norte del Perú, donde se encuentra la Universidad mencionada, en Lambayeque) porque, si deseamos cambiar la manera negativa con que se percibe la Matemática, sería promoviendo un cambio en nuestro entorno cercano, y lo hicimos dando el ejemplo como primer paso. Algunas frases que guiaron los trabajos de los estudiantes fueron: “La Matemática rigurosa se hace con la mente, la Matemática hermosa se enseña con el corazón” de Claudi Alsina (2017), y “La Matemática no es un deporte para espectadores” de George Phillips (2005).

Metodología

STREM se llevó a cabo en forma virtual, en tres jornadas, los días 21, 22 y 23 de abril del año 2022, en horario de 16 a 19 horas cada día. El evento fue un Seminario-Taller. Las exposiciones del seminario estuvieron a cargo de seis docentes de la Región Lambayeque. Se describe a continuación, sólo la participación de los estudiantes de profesorado (talleres). Fueron nueve los temas abordados, cuatro en forma individual, cuatro en parejas, y solo uno fue conducido por tres estudiantes. La duración de cada taller fue de 20 a 30 minutos aproximadamente (incluyendo la participación del público con preguntas y comentarios). Los materiales empleados fueron sencillos, económicos y fáciles de conseguir como cuerdas, barajas, papel, cartulina, cartón, carrizo, tecnopor, etc. Se pensó dejar tiempo para pensar en las preguntas y desafíos que iban surgiendo y proponiendo al público asistente, por ello algunos temas se desarrollaron en dos sesiones en jornadas distintas. Los temas fueron los siguientes:

1. Relación entre el Álgebra y la Geometría a través de ecuaciones.
2. Matemagia.
3. Juegos.
4. Desafíos antiintuitivos.
5. Papiroflexia.
6. Algunas visiones de los sólidos platónicos.
7. Películas de jabón.
8. Diseño Phibonáureo.
9. Cometas.

El tema *Matemagia* se presentó el primer día, con tres actuaciones (números de magia) de 10 minutos cada una, intercaladas durante toda la jornada, en la tercera jornada se presentaron las soluciones detalladas a los retos. La misma metodología se aplicó al tema *Desafíos antiintuitivos* en la segunda y tercera jornadas.

Se creó una página de Facebook para el evento, donde están alojadas las grabaciones de las tres jornadas, la lista de materiales empleados, imágenes y algunos cortos con ideas que complementan las exposiciones de los estudiantes organizadores, aquí el enlace:

<https://www.facebook.com/profile.php?id=100082967480649>

Resultados y discusión

Pasamos a describir y comentar las presentaciones de cada uno de los nueve temas expuestos por los estudiantes de profesorado, resaltando la forma de abordar (método) el tema, más que el contenido (De Guzmán, 2007), con énfasis en el aspecto visual, donde interviene la parte psicomotora del empleo de las manos y el uso de materiales sencillos: Este proceso no deductivo sino en sentido contrario, sigue la secuencia de tres etapas de aprendizaje que proponen Villani y Torossian (2018): manipulación y experimentación, verbalización, y abstracción. En cada uno de los casos se empezó con algunas preguntas que guiaron el proceso de “hacer matemática”.

Relación entre el Álgebra y la Geometría a través de ecuaciones

En un contexto histórico, donde estuvieron implicados varios matemáticos italianos del siglo XVI, entre ellos Tartaglia, Cardano, Ferrari, preocupados por resolver la ecuación de tercer grado; explicamos la solución de la cuadrática por analogía con una idea geométrica usada desde los babilonios, para después, tratar de resolver la ecuación cúbica. Con una hoja de papel cuadrada al que le falta un cuadrado en una esquina, se explica la denominación “completar el cuadrado” y la técnica geométrica de resolución de la ecuación de segundo grado. ¿Puede hacerse algo análogo para la ecuación cúbica?. El ponente lo ilustró con un cubo y varios paralelepípedos de tecnopor. Resaltamos que, con este método, no se puede resolver el caso general, sino un caso especial de ecuación de tercer grado, durante el proceso, hubo casos que no tienen parangón con la intuición geométrica, y se podía abstraer para dar entrada a los números negativos y posteriormente a los números imaginarios, tal como ocurrió históricamente.

Matemagia

Es un tema con bastante historia, tiene varios cultores en la actualidad y existe bastante material disponible como recurso pedagógico; se presentaron tres números de matemagia: en el primero denominado, “los cuartos encantados” se utiliza el principio de paridad, el segundo trató de “los gatitos matemáticos” y el tercero sobre “las cartas de igual número”. En todo acto matemágico subyacen principios matemáticos, los más comunes son el principio de Kruskal, el principio de Hummer, el principio de Gilbreath. En cada número de matemagia, se puede pensar en variantes o generalizaciones, por ejemplo, en el truco de “los cuartos encantados”, se puede pensar si aún se cumple, si disponemos de otra manera las habitaciones o cambiamos el número de cuartos. En general, después de conocer el fundamento, nos queda la curiosidad de modificarlo o ponerle un toque personal y eso es motivante para aprender más.

Juegos

El aspecto lúdico está omnipresente en el corazón mismo de la Matemática, Miguel de Guzmán nos decía que muchos matemáticos consideran su actividad profesional como un juego. En STREM se presentaron tres juegos de estrategia. El *juego de las ranas*, donde participa un solo jugador, el *NIM* y el *juego del 15*, se juegan en parejas. Para el *juego de las ranas*, usamos una aplicación de la página web del *Festival Matemático Julia Robinson*. El jugador, después de haber entendido la mecánica del juego para ganar, logra descubrir patrones ocultos, desearía variar algunas de sus reglas, este juego se puede aplicar a niveles desde primaria hasta superior. Con respecto al juego del *NIM*, de la gran cantidad de variantes que existe, solo se presentó un caso sencillo. El *juego del 15* fue tomado de una conferencia de Humberto Bortolossi, de la Universidad Federal Fluminense de Brasil, después de analizar este juego, descubrimos que la estrategia para ganar es la misma que la del conocido juego del *michi* o *tres en raya*, en otras palabras, existe una equivalencia entre ambos juegos, uno más sencillo y conocido que el otro. Al estudio de ese tipo de equivalencias o “puentes”, se dedica el álgebra abstracta. Nos cuestionamos también si podemos hacer variaciones y generalizaciones de este juego.

Desafíos antiintuitivos

Hay aspectos de la matemática que desafían el sentido común, y si se les presenta de manera visual, genera curiosidad y motivación; en geometría existen muchos de ellos, sobretodo en una rama joven de la Matemática, llamada Topología. En STREM se presentaron varios casos, uno de ellos, el desafío “*de un solo corte*”, consistía en hacer un solo corte con unas tijeras sobre un papel doblado estratégicamente, para obtener sobre el papel cortado, un agujero con una figura predeterminada, que podía ser un triángulo, un rombo o una estrella. La pregunta natural es, ¿qué figuras se pueden obtener “de un solo corte”? y ¿qué estrategias de doblado se pueden emplear? Con “la banda de Möebius”, un objeto topológico, se trabajaron muchos desafíos; Otros desafíos abordados que usaron Topología fueron “nudos”, trabajados ora con papel, ora con el cuerpo, donde se mostraron casos visuales sorprendentes. Algunos desafíos más, incluían materiales como palitos de helado, cartulina, cuerdas, etc.

Papiroflexia

Incluye al origami y al kirigami, se presentaron conceptos de geometría, desde muy sencillos como ángulos, segmentos, etc. que se pueden trabajar en primaria. Para el caso de enseñanza media, doblar el papel de tal manera que se pueda probar el Teorema de Pitágoras. Con el Kirigami se pueden ilustrar conceptos avanzados de Matemática, como los fractales, nosotros construimos la escalera de Cantor y el Triángulo de Sierpinski, obviamente con un número limitado de iteraciones. Se presentó la historia del origami narrada por un dinosaurio de kirigami. Hicimos patente que las ideas de doblado y plegado, están presentes en aplicaciones tecnológicas modernas, claro está, ya no con papel, sino con materiales especiales, algunos productos son usados por la NASA en el diseño aeroespacial, otros como los stent, de dimensiones microscópicas tienen aplicaciones cardiovasculares.

Algunas visiones de los sólidos platónicos

Este tema se abordó con material manipulativo, se partió de los polígonos regulares en el plano (existe una cantidad infinita de ellos), para ver la analogía en dimensión tres, se exploraron algunas propiedades, como que los ángulos que se forman en los polígonos adyacentes (caras) son congruentes, así como todas las aristas, y el número de éstas que convergen en un vértice; se plantearon cuestiones al público, se hizo un proceso de abstracción de las principales características, y después, tal y como lo hicieron los griegos de la antigüedad, mediante argumentos de álgebra y geometría muy sencillos, se justificó el porqué existen sólo cinco poliedros regulares. Una pregunta surge de manera natural ¿Qué sucede en dimensiones mayores? Lo más importante que se trató con este tema fue diferenciar una demostración de una comprobación; en el primer caso, al demostrar la existencia de sólo cinco de tales poliedros, surgió inesperadamente una característica de complementariedad entre ellos, denominada *dualidad*; en el segundo caso, para la comprobación, se utilizó como ejemplo una fórmula más general, que cumple no sólo para poliedros regulares, esta involucra una relación entre el número de caras, vértices y aristas de un poliedro; esta fórmula, denominada *característica de Euler* tiene asociado el concepto matemático de *invariante*.

Películas de jabón

Un tema muy visual, y que nos remonta a la infancia, aparece el aspecto antiintuitivo al intentar hacer la burbuja de jabón sobre cualquier curva cerrada, ésta siempre resultará esférica por principios físicos, lo que nos anima a indagar por qué sucede esto. En la realización de la parte experimental, indicamos la preparación de la solución jabonosa con glicerina, la construcción casera de estructuras geométricas de poliedros para sumergirlos en la solución anterior: Aparte de resultar figuras bellas visualmente, éstas cumplen un principio físico-matemático de minimización, que es muy útil y aplicable en ingeniería y en la Matemática Superior.

Diseño Phibonáureo

El nombre es un neologismo formado por tres expresiones phi, Fibonacci y áureo, referidas al número irracional Phi, al matemático Fibonacci y a la proporción áurea; esta

proporción está relacionada con la construcción de diseños visualmente bellos. Se trabajó con las ideas de proporcionalidad que vienen desde la antigua Grecia, y que en la actualidad los diseñadores de logotipos comerciales las utilizan para hacerlos atractivos. Se presentó la explicación del logo del evento, fundado en la construcción de la espiral áurea a través de cuadrados adyacentes, cada una de las letras de las siglas de STREM van en cada cuadrado; y el conejo (diseñado como hecho de origami) corriendo deslizándose sobre la espiral da la idea de continuidad, hace alusión a la magia y a los conejos de Fibonacci. Puesto que en la naturaleza aparecen los números de Fibonacci, se mostró cómo están presentes en las espirales de una piña. Señalamos además que el número de oro pertenece a una familia de números metálicos, que se definen, tal como phi, a partir de una ecuación de segundo grado. Mostramos, además, como una generalización a tres dimensiones, *el número de plástico*, como única solución real de una ecuación cúbica.

Cometas

Conocidos en algunos países como barriletes o papalotes. Mediante elementos sencillos como carrizo, cuerda, papel se construyeron varios modelos de cometas, y se hicieron volar fuera de la ciudad, es un dispositivo que se basa en principios de aerodinámica para que pueda volar. En sus diseños hay simetría, pueden ser tanto bidimensionales, como tridimensionales, sirviendo para comprender y diferenciar conceptos geométricos en estas dimensiones. Se hizo la pregunta ¿De qué modo se puede conocer la altura del cometa en un determinado momento? El público asistente dió algunas respuestas, los ponentes por su parte mostraron un goniómetro casero construido por ellos mismos y su empleo, para obtener la altura aproximada de su cometa en pleno vuelo, este goniómetro les permitió además medir la altura de un edificio de una Institución Educativa local y de un tanque elevado de agua, haciendo uso de la Trigonometría. Aquí es aplicable la frase de Auguste Comte. “La Matemática es la ciencia de la medida indirecta.”

Después de una descripción de los nueve temas de los talleres, mencionamos que cada uno de los temas tratados se abordaron a través de preguntas, que nos llevaron a seguir un proceso de trabajo inductivo, lo llamativamente visual dio paso a las emociones positivas, al querer intentar ganar o descubrir el porqué, como el caso de los juegos, de los desafíos intuitivos o de la matemagia, que tienen mucho en común. Si bien como estudiantes nos habíamos preparado en nuestros temas, se trató en todos los casos, no tanto de explicar el contenido, sino de mostrar el proceso de “hacer matemática”, ante las dudas, hacernos preguntas, tratar de responderlas en base a indicios, se hicieron analogías, se formularon conjeturas, se hicieron exploraciones, se intentaron dar explicaciones, se dejaron preguntas abiertas al público para la siguiente sesión (en el caso de los temas presentados en dos jornadas), dejando tiempo para que los participantes puedan “luchar” con el problema, como propone en conferencia TED, Dan Finkel (2016), se mostraron las generalizaciones y en algunos casos las abstracciones. El aprendizaje escolar de la Matemática, según el *Constructivismo*, se produce durante el proceso de “hacer matemáticas” tal como trabaja un matemático profesional (salvando obvias distancias), Miguel de Guzmán (2007), Lockhart y Devlin (2009), Dreyfus (2014), Mabel Rodríguez y colaboradores (2022).

Hemos mostrado en STREM que se puede “hacer matemáticas” en todos los niveles, adaptando los temas de acuerdo a la profundidad, como el caso de la papiroflexia, los diseños,

los juegos, la magia, o los desafíos antiintuitivos; haciendo patente las caras más atractivas de la Matemática, propiciando las emociones positivas y haciendo intervenir en el proceso, diferentes elementos como intuición, creatividad, analogías, conjeturas, paradojas, contraejemplos; dado que se trabaja principalmente con ideas, y por eso son baratas.

En casos como el origami, los sólidos platónicos, o los diseños, las ideas que subyacen trascienden el tiempo y tienen vigencia en el arte y la tecnología actuales. Pero como las ideas son producidas por seres humanos, hemos hecho notar el carácter humano e histórico-cultural de la Matemática, reconociendo a personajes como: Platón, Fibonacci, Tartaglia, Euler, Julia Robinson, Akira Yoshizawa, Martin Gardner, e incluso contemporáneos como John Conway, Claudi Alsina, Dan Finkel, Olga Paris-Romaskevich, Andrew Wiles, entre otros.

Consideraciones finales

Uno de los objetivos de nuestro evento fue mostrar unas matemáticas vivas, atractivas y realizables, incidiendo en el método más que en el contenido (de Guzmán, 2007), a nuestro parecer se logró con creces, tal como al final del evento lo demostraron los participantes con sus intervenciones y comentarios. En STREM hemos abordado verdaderos problemas, no problemas artificiales (Alsina 2017), con una temática variada, tanto intra como extra matemáticos, mostrando las diferentes facetas de la matemática (Artstein, 2014).

Los temas abordados no se agotan con la temática presentada, sino que pueden continuar según los intereses de quien los estudie, porque ya le habrá encontrado intrínsecamente un porqué seguir explorando ideas, habrá conseguido automotivarse.

Con lo mostrado se ha conseguido proporcionar material e ideas para que sean utilizadas por los docentes de los diferentes niveles educativos. Cumpliendo con uno de los objetivos más generales como es, proyectarse a la comunidad, divulgar la Matemática, pero aún más trascendentalmente compartir ideas, y mostrar la belleza de la matemática, de una manera innovadora.

Destacamos el aprendizaje de estudiantes de profesorado en formación porque a través de eventos similares se puede socializar experiencias con maestros en ejercicio, y éstos a su vez pueden aprender de los jóvenes emprendedores, novedades y recursos como matemagia, juegos de estrategia, desafíos anti intuitivos, etc. El aprendizaje en organizar, y conducir un evento también es loable. A lo largo del trabajo organizativo y de ejecución de STREM se logró aportar algunas creaciones propias como: El logotipo del evento, un neologismo: “Phibonáureo”, unas coplas para ser entonadas por la Tuna Femenina de la UNPRG, una canción adaptada de un tema popular, una mascota que fue un enorme conejo de origami con diseños fractales, y un simpático dinosaurio de Kirigami.

Creemos que este tipo de trabajo no solo es digno de emularse, replicarse y enriquecerse con ideas, sino que debe llevarse a cabo también de manera presencial, a través por ejemplo de Festivales, con estudiantes de Instituciones Educativas para que vivencien personalmente estas actividades, y mostrarles una disciplina viva en constante evolución.

La forma de abordar la Matemática en STREM, permite proponer un trabajo multidisciplinario, ya que surgen preguntas que pueden abordarse conjuntamente con la Física, como el caso de las cometas o las burbujas de jabón, con la Biología, como es el caso de los números de Fibonacci o los dispositivos stent usados para despejar los vasos sanguíneos, con la Ingeniería como los materiales y objetos diseñados con ideas de doblado y plegado del origami; con las Ciencias Sociales como los personajes matemáticos y los procesos históricos y culturales, con el Arte, e incluso con la Filosofía como es el caso de la ética y la belleza matemática.

Como estudiantes ahora podemos tener una actitud crítica ante el currículo que se nos impone, la Matemática es mucho más que saber solo contenidos y sería necesario exigir cambios curriculares a nivel nacional, no solo referidos a planes de estudios de las carreras formadoras de docentes, sino también en los niveles de primaria y secundaria, de acuerdo a las tendencias de los tiempos actuales.

Referencias y bibliografía

- Alsina, C. (2017). Adiós a la cabra, a la col ya la barca manifiesto por una educación matemática realista y actual. *En FESPM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* 125-133
- Artstein, Z. (2014). *Mathematics and the Real World.* NY: Prometheus Books.
- De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista iberoamericana de educación, 43,* 19-58.
- Dreyfus, T. (2014). Mutual Expectations Between Mathematicians and Mathematics Educators. En Fried y Dreyfus (Ed.) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground.*(pp. 57-71). Springer, Dordrecht.
- TEDx Talks. (2016, 17 febrero). *Five Principles of Extraordinary Math Teaching | Dan Finkel | TEDxRainier.* YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=ytVneQUA5-c>
- Lockhart, P. & Devlin, K. (2009). *A Mathematician's Lament: How School Cheats Us Out of Our Most Fascinating and Imaginative Art Form.* Bellevue Literary Press.
- Phillips, G. M. (2005). *Mathematics is not a spectator sport.* Springer Science & Business Media.
- Rodríguez, M., Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., & Pochulu, M. D. (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.* Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Villani, C., & Torossian, C. (21). mesures pour l'enseignement des mathématiques (La documentation française, p. 96)[Rapport public]. Ministère de l'éducation nationale.