

PRINCIPIOS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

Principles of mathematical modelling from the perspective of didactic suitability

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G. y Breda, A.

Universitat de Barcelona

Resumen

El objetivo de este trabajo, de corte teórico-reflexivo, es establecer potenciales relaciones entre dos tipos de principios: por una parte, los principios específicos que orientan la incorporación de la modelización matemática en los procesos instruccionales y, por otra parte, los Criterios de Idoneidad Didáctica como una propuesta de principios generales de la Educación Matemática. Para ello, primero se realizó una revisión de la literatura especializada en modelización para identificar los argumentos y principios sobre este proceso y su incorporación en la enseñanza de la matemática; luego, estos argumentos y principios se organizaron en principios más generales; y finalmente, estos principios se relacionaron con los Criterios de Idoneidad Didáctica. Como resultado principal, se sentaron las bases para el diseño de una pauta de Criterios de Idoneidad Didáctica específicos para los procesos instruccionales que incluyan la modelización matemática.

Palabras clave: argumentos, criterios de idoneidad didáctica, modelización matemática, principios.

Abstract

The aim of this – reflective on theory – work is to establish potential relationships between two types of principles: on one hand, the specific principles that guide the incorporation of mathematical modelling in the instructional processes and, on the other hand, the Didactic Suitability Criteria as a proposal of general principles of Mathematics Education. To do this, firstly a review on specialised literature in modelling was carried out, in order to identify the arguments and principles on this process and its incorporation in mathematics teaching; then, these arguments and principles were organised in more general principles; and finally, these principles were related to the Didactic Suitability Criteria. As a main result, the foundations for the design of a guideline of specific Didactic Suitability Criteria for the instructional processes which include mathematical modelling were laid.

Keywords: arguments, didactic suitability criteria, mathematical modelling, principles.

INTRODUCCIÓN

Existe un consenso internacional sobre la importancia de desarrollar competencias que permitan utilizar la matemática para la resolución de problemas del mundo real, entre las que se destaca la competencia en modelización matemática (Kaiser, 2020). Para lograr este consenso, en la literatura se han documentado una serie de argumentos, basados en los hallazgos y resultados obtenidos a partir de la investigación en modelización, a favor de su incorporación en la enseñanza de la matemática (Blum,

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G. y Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345-354). SEIEM.

2011). Esto se ha manifestado, por ejemplo, en la evaluación internacional PISA, donde la modelización se considera como un aspecto central para la resolución de problemas (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2019).

Por su parte, la Educación Matemática también ha logrado ciertos consensos sobre el quehacer de la disciplina, lo que se ha materializado en propuestas de estándares y principios generales, realizadas por diferentes investigadores e instituciones, para orientar la práctica del docente hacia su mejora. En otras palabras, se trata de una recopilación de criterios que gozan de un amplio consenso en la Educación Matemática (por ejemplo, National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Praetorius y Charalambous, 2018) y, en esta línea, es que el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) (Godino et al., 2007) ha propuesto los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (Godino, 2013). Una de las líneas de desarrollo de este constructo es su concreción para contenidos y procesos específicos (Breda et al., 2018). En cuanto a los contenidos se destacan, entre otros, los trabajos de Aroza y colaboradores (2016) para la proporcionalidad, y de Posadas y Godino (2017) para la ecuación cuadrática. En cuanto a los procesos, en este estudio se pretende seguir una línea similar para la modelización matemática.

REFERENTES TEÓRICOS

En esta sección se presentan los dos referentes teóricos considerados en este estudio.

Modelización matemática

En términos generales, la modelización matemática es entendida como un proceso que transita desde el mundo real hacia el matemático para dar solución a una situación-problema tomada desde la realidad. Desde el plano teórico se han diseñado diferentes herramientas para su análisis, conocidas como ciclos de modelización (Borromeo, 2006), así como también han emergido distintas perspectivas sobre su implementación (Abassian et al., 2020). A lo largo de la construcción del corpus teórico sobre el que se fundamenta la modelización – donde coexisten diversas posturas al respecto (Borromeo, 2013) – se han planteado una serie de *argumentos* a favor de su inclusión en la enseñanza de la matemática – y de otras disciplinas – para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

A modo de ejemplo, un *argumento* sería «Trabajar la modelización en la enseñanza de la matemática desarrolla la competencia en modelización matemática» (Niss y Højgaard, 2019); o, también, una serie de *argumentos* clásicos que se retoman en el trabajo de Blum (2011), en donde se plantea que el trabajo con modelización “ayuda a los estudiantes a comprender mejor el mundo; da soporte al aprendizaje matemático [...]; contribuye al desarrollo de varias competencias matemáticas y actitudes apropiadas; contribuye a una imagen adecuada de la matemática” (p. 19, traducción de los autores). A su vez, estos *argumentos* han dado lugar a algunos *principios* que orientan la incorporación de la modelización en los procesos instruccionales como, por ejemplo, que una tarea de modelización debe ser «‘abierta’, ‘compleja’, ‘realista’, ‘auténtica’, así como también un ‘problema’ que sea ‘solucionable mediante un ciclo de modelización’» (véase Borromeo, 2018, pp. 46-47).

Criterios de idoneidad didáctica

En el EOS (Godino, 2013) se entiende la *idoneidad didáctica* de un proceso instruccional como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los *significados personales* logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los *significados institucionales* pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Los CID son un constructo multidimensional que se descompone en seis *criterios* o *idoneidades* parciales, cada uno

de los cuales cuenta con sus respectivos componentes, y su operatividad exige definir un conjunto de indicadores observables que permitan valorar el grado de idoneidad de cada una de las facetas del proceso instruccional. En la tabla 1 se describen los CID y se presentan los componentes de cada uno, con base en la pauta de Breda y colaboradores (2017).

Tabla 1. Criterios de idoneidad didáctica y sus componentes. Adaptado desde Breda et al. (2017).

Criterios	Descripción	Componentes
Epistémico	Para valorar si la matemática que se enseña es una 'buena matemática'.	<ul style="list-style-type: none"> – Errores. – Ambigüedades. – Riqueza de procesos. – Representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Para valorar, antes de iniciar el proceso instruccional, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes.	<ul style="list-style-type: none"> – Conocimientos previos. – Adaptación curricular a las diferencias individuales. – Aprendizaje. – Alta demanda cognitiva.
Interaccional	Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los estudiantes.	<ul style="list-style-type: none"> – Interacción docente-discente. – Interacción entre discentes. – Autonomía. – Evaluación formativa.
Mediacional	Para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso instruccional.	<ul style="list-style-type: none"> – Recursos materiales. – Número de estudiantes, horario, y condiciones del aula. – Tiempo.
Afectivo	Para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso instruccional.	<ul style="list-style-type: none"> – Intereses y necesidades. – Actitudes. – Emociones.
Ecológico	Para valorar la adecuación del proceso instruccional al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.	<ul style="list-style-type: none"> – Adaptación al currículo. – Conexiones intra e interdisciplinares. – Utilidad sociolaboral. – Innovación didáctica.

Los criterios, componentes, e indicadores de los CID se basan en los principios y estándares del NCTM, así como en las tendencias y resultados de la investigación en Educación Matemática, tal como se explica en Breda y colaboradores (2018). De este modo, constituyen una herramienta consensuada que se utiliza para estructurar la reflexión docente en los programas de formación de profesores (véase Sánchez et al., 2021) y que, en términos de este trabajo, juegan el papel de *principios* generales de la Educación Matemática. Finalmente, en el EOS se considera que potenciar la modelización es un aspecto que mejora la idoneidad didáctica del proceso instruccional (Sala et al., 2017).

Objetivos de la investigación

En este trabajo se propone como objetivo general establecer potenciales relaciones entre los *principios* generales de la Educación Matemática con los específicos de la modelización matemática. Para su concreción, se han dispuesto los siguientes objetivos específicos (OE):

- OE1: Generar, a partir de la revisión de la literatura sobre modelización matemática, un banco de *argumentos* que justifican y *principios* que guían su incorporación en los procesos instruccionales.
- OE2: Relacionar los *argumentos* y *principios* generados a partir del cumplimiento del OE1 con los criterios, componentes, e indicadores de los CID.

METODOLOGÍA

En este estudio, de corte teórico-reflexivo, se ha dispuesto de una metodología para cada OE.

Metodología del OE1

En un *primer paso* se analizaron las diferentes maneras de entender la modelización que ofrece la literatura, y se adoptó así una posición propia (véase Ledezma et al., 2021, 2022). En un *segundo paso* se realizó una revisión de la literatura especializada en modelización matemática, para así identificar los *argumentos* y *principios* consensuados por la comunidad de investigación en Educación Matemática sobre este proceso. Para este *paso*, la metodología consistió en un análisis documental (Bowen, 2009) de diferentes estudios teóricos sobre modelización matemática (Blomhøj y Jensen, 2007; Blum, 2011; Blum y Niss, 1991; Borromeo, 2018; Doerr y English, 2003; English, 2003; Kaiser, 2020; Lesh y Doerr, 2003; Niss y Højgaard, 2019; entre otros), los que se seleccionaron por su relevancia e impacto dentro de la literatura sobre este proceso. En un *tercer paso* se elaboró un banco de *argumentos* y *principios*, seleccionando los más representativos para, posteriormente, ser revisados por los autores y, de este modo, depurar y unificar los *argumentos* y *principios* similares.

Metodología del OE2

En un *cuarto paso* se agruparon los *argumentos* y *principios* obtenidos del OE1 en *principios* más generales que guíen la incorporación de la modelización matemática en los procesos instruccionales. En un *quinto paso*, estos *principios* se relacionaron con los criterios, componentes, e indicadores de los CID, para ver si estaban incluidos en ellos. Para ello, se consideraron los *principios* específicos de la modelización que no quedaron incluidos en los CID.

PRINCIPIOS DE LA MODELIZACIÓN DESDE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

Con relación al OE1, en el *segundo paso* de la metodología se realizó una selección que, sin ser exhaustiva, es bastante amplia en cuanto a los *argumentos* y *principios* extraídos de la literatura que justifican y guían la incorporación de la modelización matemática en los procesos instruccionales. Hay que hacer constar que en esta comunicación no se pretende abarcar la totalidad de *argumentos* y *principios* existentes, sino hacer énfasis en aquéllos que tienen más amplio consenso en la comunidad de investigación en modelización matemática.

Resultados del OE1

Como un primer resultado se obtuvo, en el *tercer paso* de la metodología, un extenso banco de *argumentos* y *principios* que, en algunos casos, eran muy similares entre sí. Por ejemplo, había un ítem que decía «Prepara a los estudiantes para utilizar la matemática para la resolución de problemas, o describir aspectos de áreas o situaciones extra-matemáticas», que es muy similar al ítem «Trabajar la modelización permite a los estudiantes ‘ver y juzgar’ (reconocer, comprender, analizar, y evaluar) ejemplos representativos del uso de la matemática para resolver problemas del mundo real», por lo que se optó

por unificarlos. Otro caso fue con los ítems «Lograr un balance entre la mínima guía del docente y la máxima independencia de los estudiantes», «Lograr un balance entre el trabajo independiente en grupos y las actividades con el grupo curso», y «Promover la enseñanza de la autonomía dirigida», los que también se optó por unificar. Después de realizar una depuración y posterior unificación de los ítems similares, se obtuvo como un segundo resultado la tabla 2.

Tabla 2. Argumentos y principios en la literatura sobre modelización matemática. Elaboración de los autores.

Argumentos y principios de la modelización matemática
01. Las aplicaciones matemáticas, la modelización matemática, y la resolución de problemas son medios idóneos para desarrollar competencias generales y actitudes en los estudiantes.
02. Realizar tareas de modelización fomenta las capacidades de exploración, creatividad, resolución de problemas, apertura mental, autosuficiencia, y autoconfianza.
03. Trabajar la modelización prepara a los estudiantes para vivir y desenvolverse como ciudadanos íntegros.
04. Trabajar la modelización permite a los estudiantes ‘ver y juzgar’ (reconocer, comprender, analizar, y evaluar) ejemplos representativos del uso de la matemática para resolver problemas del mundo real, además de prepararlos para utilizar la matemática en la resolución de problemas, o describir aspectos de áreas o situaciones extra-matemáticas.
05. Trabajar la modelización desarrolla la competencia en modelización matemática en los estudiantes, pues la resolución de problemas y la modelización matemática se consideran competencias fundamentales para el siglo XXI.
06. Se le debe asignar una posición apropiada a la modelización en los currículos de matemática.
07. Las tareas de modelización deben generar una imagen enriquecedora y completa de la matemática en todas sus facetas.
08. La incorporación de la modelización es adecuada para ayudar a los estudiantes a adquirir, aprender, y conservar conceptos, nociones, métodos, y resultados matemáticos.
09. La modelización proporciona motivación y relevancia a los estudios matemáticos, ya que prepara a los estudiantes para que piensen matemáticamente.
10. Una tarea de modelización debe ser ‘abierta’, ‘compleja’, ‘realista’, y ‘auténtica’, así como también un ‘problema’ que sea ‘solucionable mediante un ciclo de modelización’.
11. El trabajo con modelización se suele desarrollar en pequeños grupos de estudiantes, a quienes se les plantea una situación-problema del mundo real.
12. El trabajo con modelización involucra un proceso cíclico, con diversos caminos para obtener una solución plausible y coherente con el contexto de la situación-problema planteada, en que se promueva una estrategia de cuatro pasos (entender la tarea; buscar la matemática en juego; utilizar la matemática; explicar los resultados) para el desarrollo de tareas.
13. Se debe lograr un balance entre la mínima guía del docente y la máxima independencia de los estudiantes, así como un balance entre el trabajo independiente en grupos y las actividades con el grupo curso, promoviendo la enseñanza de la autonomía dirigida.

La tabla 2 se puede considerar como un conjunto de justificaciones (*argumentos* y *principios*) sobre la incorporación de la modelización matemática en los procesos instruccionales, bajo el *principio* general «Se debe incorporar la modelización matemática», entre otras razones, porque es un proceso que permite la realización de otros procesos relevantes de la actividad matemática.

Resultados del OE2

Con relación al OE2, en el *cuarto paso* de la metodología – dada la amplitud de *argumentos* y *principios* obtenidos – se agruparon los ítems de la tabla 2 en *principios* más generales. Para ello, se distinguió entre los ítems con una estructura *argumentativa* de aquéllos con una estructura de *principios*. Por

ejemplo, el ítem 09 de la tabla 2, tal como está formulado, es un *argumento* para que se incorpore la modelización, basado en un el presupuesto de que «es bueno motivar a los estudiantes» y, por tanto, implementando la modelización hay más posibilidades de motivarlos. En esencia, el *principio* que se extrae de este ítem es uno de tipo motivacional. Por otra parte, cuando el ítem está formulado como un *principio* como, por ejemplo, el ítem 10 de la tabla 2, se puede concluir que se debe procurar que los estudiantes realicen una actividad matemática con: a) una alta demanda cognitiva (Aprendizaje); b) una riqueza de procesos; y c) con problemas relacionados al contexto extra-matemático. De este modo, partir de la agrupación de los ítems de la tabla 2, se obtuvo como un tercer resultado la tabla 3.

Tabla 3. Principios generales de la modelización matemática. Elaboración de los autores.

Principios	Ítems
Aprendizaje	07, 08, 09, 10
Competencial	01, 05
Curricular	01, 06, 07
Extra-matemático	04, 10, 12
Formación ciudadana	03
Interaccional	11, 13
Motivacional	01, 02, 09
Riqueza de procesos	01, 02, 04, 05, 09, 10, 12

A continuación, en el *quinto paso* de la metodología se relacionaron los resultados de la tabla 3 con los criterios, componentes, e indicadores de los CID. Para ello, se tuvo en cuenta cuál fue el proceso de generación de los CID (como se ha declarado en la sección teórica, son una propuesta de *principios* basados en consensos de la comunidad educativa) y el papel relevante de la investigación en modelización matemática para su construcción. De este modo, fue posible relacionar los *principios* e ítems de la tabla 3 con los criterios, componentes, e indicadores de los CID (ver tabla 1).

Así como en la Educación Matemática hay una tendencia a la incorporación de la modelización en los procesos instruccionales, del mismo modo la hay por la resolución de problemas, las conexiones, la argumentación, la creatividad, etc. Este consenso, en términos de los CID, se ha recogido por el criterio epistémico, específicamente, por el componente ‘Riqueza de procesos’, mediante el indicador «La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática». En la tabla 2 se pueden encontrar, por una parte, algunos ítems que no aportan demasiada concreción a los criterios, componentes, e indicadores de los CID. Por ejemplo, el ítem 13 sugiere, en síntesis, que se debe desarrollar la autonomía de los estudiantes; sin embargo, este aspecto ya ha sido recogido por el criterio interaccional, específicamente, por el componente ‘Autonomía’. Por otra parte, sí se encuentran otros que aportan una concreción relevante cuando se está implementando el proceso de modelización, en particular, el ítem 10, ya que permite caracterizar una tarea de este tipo y, como indicador específico, no ha sido recogido por los CID. Esto se debe a que gran parte de los *argumentos* y *principios* propuestos desde la perspectiva de la modelización matemática han sido tomados en cuenta y, por lo tanto, se han asimilado como parte de los criterios, componentes, e indicadores de los CID. De este modo, a partir de la relación establecida entre la tabla 3 con los CID, se obtuvo como un cuarto resultado la tabla 4.

Tabla 4. Relación entre los principios de la modelización matemática con los CID.

Criterio	Componente	Indicador	Indicador específico para la modelización
Epistémico	Riqueza de procesos	Se debe incorporar el proceso de modelización matemática.	10. Una tarea de modelización debe ser ‘abierta’, ‘compleja’, ‘realista’, y ‘auténtica’, así como también un ‘problema’ que sea ‘solucionable’ mediante un ciclo de modelización.

Por una parte, este indicador específico se puede utilizar como retroalimentación. Concretamente, los estudiantes del Máster en Formación de Profesores de Educación Secundaria y Bachillerato (impartido por las universidades públicas de Cataluña) utilizan los CID para valorar la unidad didáctica implementada durante sus prácticas educativas. En este contexto, se han encontrado trabajos finales de máster en que los futuros profesores declaran haber trabajado la modelización en su unidad didáctica, aspecto que mejora la idoneidad epistémica del proceso instruccional. Con este indicador específico, un tutor puede retroalimentar a su estudiante para hacerle notar si, realmente, la actividad que propuso en su unidad didáctica es de modelización o es un problema matemático común.

Por otra parte, los resultados obtenidos de la tabla 4 permitieron sentar las bases para concretar el diseño de una pauta de CID específicos para los procesos instruccionales que incluyan la modelización matemática.

DISCUSIÓN Y REFLEXIONES FINALES

La construcción de la tabla 4 tuvo en consideración, como se declaró anteriormente, el proceso de generación de los CID. En particular, para el CID epistémico se ha tenido en cuenta un *principio* fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es – o puede ser – asumido por otros marcos teóricos del área. Este *principio* se puede formular como «Los *objetos matemáticos* emergen de las *prácticas matemáticas*, lo cual conlleva su complejidad» (Font et al., 2013; Rondero y Font, 2015). A partir de este *principio* es que se deriva el componente ‘Representatividad de la complejidad del objeto matemático’, cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas. Este componente, a su vez, se concreta en diferentes indicadores (véase Breda et al., 2017, p. 1903), cada uno de los cuales se puede considerar como un criterio específico. En otros términos, los componentes tienen un papel clasificatorio de indicadores, es decir, cada componente es un conjunto de indicadores (los cuales se pueden entender como criterios específicos de cada CID) que, globalmente, permiten conseguir el objetivo de, en el caso del componente ‘Representatividad...’, que en el proceso instruccional de un determinado objeto matemático se deba tener en cuenta su complejidad.

En el CID epistémico también se tiene en cuenta el componente ‘Riqueza de procesos’, el cual resulta de un cierto consenso en la Educación Matemática que considera que «enseñar matemática» no es simplemente enseñar resultados, sino que, también, es «enseñar a hacer matemática». En esta línea, una de las tendencias actuales es la importancia que se le da a la enseñanza de los procesos de pensamiento propios de la matemática, pues ya no se considera que la enseñanza sea una mera transferencia de contenidos. Dado que se considera que la matemática es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido, se concede una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos y, como el caso de esta comunicación, al proceso de modelización matemática.

Como se mencionó con anterioridad, los resultados que aquí se reportan no pretenden abarcar la totalidad de *argumentos* y *principios* existentes, sino que se consideran aquéllos con más amplio consenso en la comunidad de investigación en modelización matemática. Es por esta razón que, a partir

de los resultados aquí reportados, se sientan las bases para concretar el diseño de una pauta de CID específicos para los procesos instruccionales que incluyan la modelización matemática en sus secuencias didácticas, y no representan un trabajo –hasta el momento– totalmente finalizado. Dicho esto, la ampliación de esta pauta dependerá, por una parte, de la continuación de la revisión de literatura que se realice y, por otra parte, de la consiguiente depuración de los *argumentos y principios* que se encuentren en dicha literatura.

Agradecimientos

Este estudio fue realizado en el marco del Proyecto ANID/PFCHA nro. 72200458 (Chile), y del Proyecto de Investigación en Formación del Profesorado PID2021-127104NB-I00 (MINECO/FEDER, UE).

Referencias

- Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(1), 53-65. <https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360>
- Aroza, C. J., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES: Avances en Innovación e Investigación – Revista de Educación Secundaria*, 6(1).
- Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 45-56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_3
- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA 14* (pp. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68. <https://doi.org/10.1007/bf00302716>
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/bf02655883>
- Borromeo, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 4(2), 18-24.
- Borromeo, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal*, 9(2), 27-40. <https://doi.org/10.3316/QRJ0902027>
- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA: Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>

- Doerr, H. M. y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136. <https://doi.org/10.2307/30034902>
- English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. En S. J. Lamon, W. A. Parker y K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life – ICTMA 11* (pp. 3-17). Horwood.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 39(1), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed.) (pp. 553-561). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101
- Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367-375). SEIEM.
- Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2022). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*. Artículo individual. <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3>
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3-33). Lawrence Erlbaum.
- Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>
- Posadas, P. y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae: Revista de Investigación en Didácticas Específicas*, 1, 77-96. <https://doi.org/10.1344/did.2017.1.77-96>
- Praetorius, A. K. y Charalambous, C. Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: Looking back and looking forwards. *ZDM – Mathematics Education*, 50(3), 535-553. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0>
- Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 29-49. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386>
- Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 325-335). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_28

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2021). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. *Mathematics Education Research Journal*. Artículo individual. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w>