SIGNIFICADOS Y SENTIDOS DE OBJETOS ALGEBRAICOS POR MEDIO DE TAREAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Meanings and senses of algebraic objects through mathematical modelling tasks

Peña, F., Solares, A. y Rojano, T.

CINVESTAV (México)

Resumen

En este documento presentamos el diseño de una secuencia de enseñanza para la introducción de un método algebraico para la solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas por medio de una tarea de modelización matemática. La aplicación de esta secuencia tiene por objetivo caracterizar momentos de producción de sentido y construcción de significados que estudiantes de primero de secundaria (entre 12 y 13 años) despliegan durante su solución, así como el rol que juega en esos procesos la modelización matemática. Entre los resultados se resalta que las primeras etapas del proceso de modelización matemática posibilitan la resignificación de las ideas de incógnita e igualdad, así como la apropiación de métodos exploratorios y algebraicos.

Palabras clave: *modelización matemática, álgebra, pensamiento algebraico.*

Abstract

In this document we present the design of a teaching sequence for the introduction of an algebraic method for the solution of two unknowns linear equations systems through a mathematical modelling task. The application of this sequence aims to characterize moments of sense production and construction of meanings that first high school students (between 12 and 13 years) deploy during their activity, as well as the role that mathematical modelling plays in those processes. Among the results, it is highlighted that the early stages of the mathematical modelling process allow the resignification of unknown and equality ideas, as well as the appropriation of exploratory and algebraic methods.

Keywords: *Modelling, algebra, algebraic thinking.*

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Filloy et al. (2010), para los estudiantes que se acercan por primera vez a la solución de *sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas* es necesaria una reconceptualización de las nociones de *incógnita* e *igualdad*. Al llevar a cabo un estudio con alumnos de secundaria (13 a 14 años) en que se introdujeron los métodos tradicionales para la solución de estos sistemas, identificaron que la necesidad de expresar una de las incógnitas en términos de la otra (es decir despejar una de las incógnitas) implica reinterpretarla e involucrarse en nuevas maneras de operar con ella que no son naturalmente asimiladas por los estudiantes.

Peña, F., Solares, A. y Rojano, T. (2022). Significados y sentidos a objetos algebraicos por medio de tareas de modelización matemática. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 461-469). SEIEM.

Tomando en consideración el auge que desde las últimas décadas ha tenido la modelización matemática en el campo de la investigación y de la educación matemática (Socas et al., 2016), en el este escrito, presentamos un estudio en que se elige a la modelización matemática como una alternativa para el diseño de secuencias de enseñanza, que introduzcan a los estudiantes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Consideramos también que los procesos de modelización matemática proporcionan significados (Filloy et al., 2010) para los objetos algebraicos involucrados en la secuencia y sentido (Filloy et al., 2010) a las maneras en que se opera con ellos.

La pregunta de investigación que se aborda es *¿cuál es el rol de la actividad de modelización matemática en la construcción de significados y producción de sentidos durante la adquisición de métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas?*. Para contestarla, planteamos un modelo de enseñanza que fue aplicado a estudiantes de primer año de secundaria (12 a 13 años) y que presenta, por primera vez para ellos, una situación de modelización que implica dos valores desconocidos (incógnitas) y dos formas de relacionarlos (ecuaciones). En este documento presentamos los resultados principales del estudio.

REFERENTES TEÓRICOS

Filloy (1999) introduce la noción de Sistema Matemático de Signos (SMS) para referirse a los conjuntos de signos matemáticos socialmente establecidos, junto con sus significados y las formas en las que interactúan. Para Filloy, Rojano y Puig (2008) el SMS del álgebra, por ejemplo, incluye no sólo el conjunto de los signos que usa, también sus aspectos semánticos y sintácticos; así, es el sistema en su totalidad lo que se considera matemático y no sólo los signos de lo componen.

Hemos adoptado el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Filloy, 1999; Filloy et al., 2008), pues permiten el estudio del actuar de los estudiantes con SMS de distinto nivel de formalidad, a medida que se van acercando a un uso competente de niveles cada vez más formales de los mismos. Los MTL constituyen entonces una herramienta teórica, metodológica y analítica que embona con los intereses de este estudio en la medida que permite rastrear la evolución de los SMS intermedios con los que, estudiantes con un dominio básico en la solución de ecuaciones lineales, se apropian de métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Filloy et al. (2008) consideran cuatro componentes para enfocar el objeto de estudio, en nuestro caso los sistemas de ecuaciones lineales, estas componentes (o modelos) son: i) la de competencia formal, es decir, el conocimiento matemático formal del estudio; ii) la de enseñanza, que constituye la secuencia de enseñanza que se pone a prueba (de esta componente se ofrecen mayores detalles en el apartado de metodología); iii) la de procesos cognitivos: que permite describir las acciones de los sujetos al trabajar en el *modelo de enseñanza* y iv) la de comunicación, que caracteriza las interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante que surgen a lo largo del trabajo en el *modelo de enseñanza*.

Para efectos de responder a la pregunta de investigación que orienta este estudio, conviene precisar los términos de “significado” y “sentido”, así como el uso de éstos como categorías para el análisis de las producciones de los estudiantes.

Significados y sentidos: un marco analítico

El término “significado” es comúnmente usado en la investigación en educación matemática, por ejemplo, en el trabajo de Martín Fernández et al. (2016), se menciona que dotar de significado a un objeto matemático implica “disponer de una definición, representarlo, identificar sus operaciones, relaciones y propiedades, sus modos de uso, su interpretación y aplicación” (p. 9). La definición que estamos usando para nuestro estudio coincide con la de Martín Fernández en el hecho de que el sentido se confiere a los objetos matemáticos, pero, consideramos que el proceso mediante el cual estos significados se van construyendo se puede rastrear si se toman en cuenta los cuatro tipos de fuentes de significado propuestas por Filloy (1999), éstas son:

1. De transformaciones dentro de un SMS sin referencia a otro SMS;
2. De traducciones a través de SMS distintos;
3. De traducciones entre SMS y sistemas de signos no matemáticos;
4. Con la consolidación, simplificación, generalización y rectificación de acciones, procedimientos y conceptos de los SMS intermedios creados durante el desarrollo de las secuencias de enseñanza/aprendizaje.

Las fuentes de significado recién mencionadas se constituyen en categorías de análisis para esta investigación.

Respecto del término "sentido", si bien algunos estudios lo asocian a las habilidades numérica, espacial, de medida y estocástica (véase, por ejemplo, Flores y Rico, 2015), en nuestro caso, este término se lo conferimos a la apropiación, por parte de los estudiantes, de un proceso de naturaleza matemática que sea nuevo para ellos, en esta línea Filloy (1999) menciona que:

> El sentido es conferido, en el nuevo SMS, por la utilización de nuevos signos de las maneras que los requieren cada uno de los pasos del proceso de análisis y resolución, visto todo el sistema de signos ligado por la concatenación de acciones desencadenadas por el proceso de solución de las diversas situaciones problemáticas que, con anterioridad, se consideraban irreductibles unas a las otras y que, ahora, gracias al uso del nuevo SMS, se resuelven con procesos que se establecen como los mismos, esto es, se transfieren de la resolución de un problema a otro, convirtiendo lo que antes era una diversidad de problemas en lo que, ahora, se puede llamar una familia de problemas cuyos miembros todos se pueden resolver con el mismo proceso. (p. 77)

Tomando esto en cuenta, en nuestro análisis observamos los procesos de producción de sentido tomando como categorías de análisis cuando: i) las acciones de los estudiantes conllevan al uso de nueva simbología; ii) el análisis del problema conlleva a la concatenación de acciones y iii) existe transferencia de los procesos de solución de un problema a otro similar.

METODOLOGÍA

La metodología propia de los MTL propone dos fases para el desarrollo de las investigaciones, primero una fase de diseño de la experimentación y luego una de desarrollo empírico. Respecto de la fase de diseño, una vez definida una problemática (en nuestro caso la apropiación de métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2) se elabora un modelo teórico local que contempla las cuatro componentes previamente señaladas. Presentamos, a continuación, una descripción del modelo de enseñanza pues para este documento nos interesa presentar un análisis que siga el orden cronológico que marca la secuencia de actividades.

El modelo de enseñanza

Un modelo de enseñanza es definido por Filloy (1999) como:

> Un conjunto de secuencias de textos matemáticos T_{an} cuya elaboración y decodificación por el aprendiz le permite al fin interpretar todos los textos T_n en un SMS más abstracto cuyo código hace posible descodificar los textos T_n como mensajes con un código matemático socialmente bien establecido (p.78).

Tomando en cuenta lo anterior, entendemos que el modelo de enseñanza presume el conjunto de las tareas que llevan al estudiante a hacerse cada vez más competente en un SMS. En nuestro caso, el modelo de enseñanza consiste en una secuencia de actividades llevadas al aula cuyo interés era introducir problemas que se solucionaran con un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por primera vez para los estudiantes.

Para esta investigación usamos un contexto de mezcla de productos que permitiera a los estudiantes identificar de manera directa la presencia de dos valores desconocidos (cantidades a mezclar) así como dos formas de relacionar los datos y valores faltantes del problema (total de la mezcla y precio). En este artículo nos centraremos en la solución y el análisis de la siguiente tarea.

> El costo de un kilo de cacahuates al mayoreo es de $40 mientras que la nuez Wichita tiene un valor de $120 el kilo, un empresario desea crear 25 kilos de una mezcla de estos dos productos que tenga un costo aproximado de $60 por kilo ¿cuántos kilos de cada producto necesitará?

Usamos el ciclo de modelización matemática propuesto por Blum y Leiß (2007) (ver figura 1) para construir una secuencia de trabajo que permitiera a los estudiantes abordar progresivamente las distintas fases del proceso de modelización. Esta ruta de diseño para la secuencia nos permitió observar de manera separada las fases del ciclo de modelización y con esto identificar la relación que estas fases tienen con los procesos de producción de sentido y construcción de significados. Así, nuestro modelo de enseñanza se compone de 3 hojas de trabajo, cada una con distintos énfasis y cuyo objetivo final de enseñanza era la introducción del método de igualación como estrategia para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero con un objetivo para la investigación relacionado con los significados y sentidos que surgen a medida que los estudiantes la trabajan y el rol que la modelización matemática desempeña para ello.

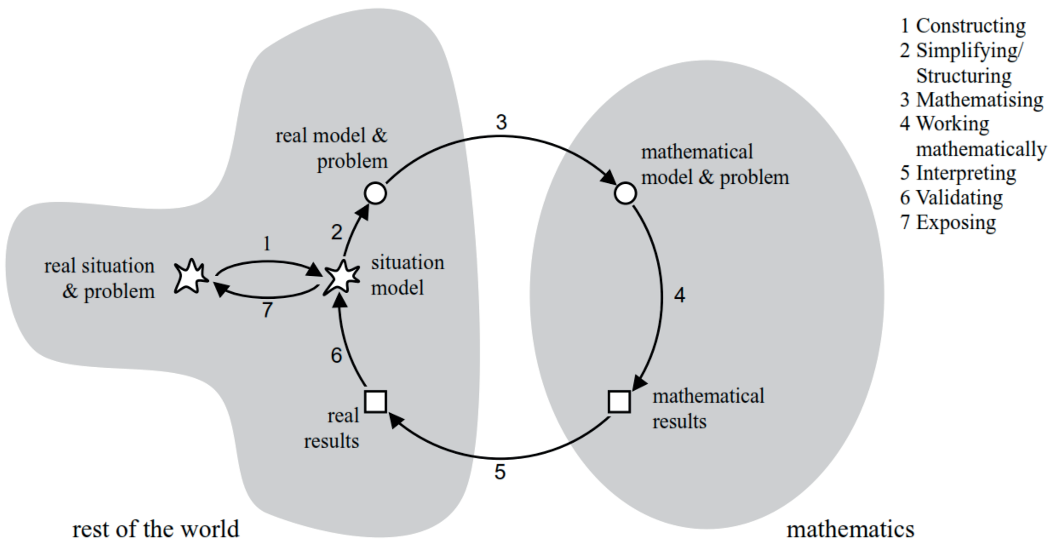


Figura 1. Ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007).

Hoja de trabajo 1 (Entender el problema): En la primera hoja de trabajo se sugiere a los estudiantes el uso de una hoja de cálculo en la que puedan hacer explícitos los datos y relaciones que el problema les presenta. Así, se espera que los estudiantes hagan uso de una hoja de cálculo previamente etiquetada, en la que puedan, libremente, relacionar los datos del problema según ellos los hayan interpretado. La hoja de cálculo ofrece una alternativa de solución para los sistemas de ecuaciones que no se rige por un método sintáctico, por lo que su uso, previo a la introducción de métodos algebraicos, nos pareció conveniente. Las relaciones que se espera que los estudiantes construyan en la hoja de cálculo se muestran en la figura 2:

	A	B	C	D	E	F
1	Cacahuates	Nuez	Costo total cacahuate	Costo total nuez	Costo total	Costo por kilo
2	N1	N2	=A2*40	=B2*120	=C2+D2	=E2/25

Figura 2. Relaciones esperadas en la hoja de cálculo.

Con esta hoja de cálculo, los estudiantes pueden explorar diferentes valores para N1 y N2 y verificar, de manera automática, si el costo de la mezcla se acerca a la que el problema solicita (en este caso $60). La elaboración de este mecanismo de comprobación presume que los estudiantes identifican dos datos desconocidos y las relaciones de precio que los rigen.

Hoja de trabajo 2 (Construir el modelo): La segunda hoja de trabajo pone énfasis primero en la matematización del modelo real a un modelo matemático y luego en trabajar matemáticamente sobre ese modelo para solucionar el sistema (fases 3 y 4 del ciclo de modelización, ver figura 1). En esta hoja se presentan otros tres problemas con similar estructura que el de la primera hoja, pero cuyas soluciones implicaban valores decimales periódicos.

Siguiendo las ideas de Rojano y Sutherland (2001) para la incorporación de literales en problemas trabajados con hoja de cálculo, se sugiere a los estudiantes asignar nombres (X y Y) a los conjuntos de datos de las dos primeras columnas. Con este cambio, se les solicita reescribir las demás fórmulas.

La escritura de las fórmulas haciendo uso de las literales X y Y se constituye en la representación algebraica del sistema de ecuaciones lineales. Así pues, la segunda parte de la hoja de trabajo se encarga de orientar a los estudiantes en la manipulación de este modelo para poder solucionar el sistema por medio del método de igualación.

Hoja de trabajo 3 (Aplicar el modelo): El trabajo que se propuso en la tercera hoja de trabajo busca que los estudiantes apliquen el modelo matemático en problemas similares para interpretar y validar los resultados en términos del contexto del problema (fases 5 y 6 del ciclo de modelización, ver figura 1). Así, la tercera hoja de trabajo se constituye en un compilado de 6 problemas que tienen la misma estructura que el original, pero con cambios en los datos para presentar situaciones "atípicas" en un contexto real, como, por ejemplo:

- *Que el costo de uno de los productos a mezclar coincida con el costo esperado*: Ello implica que el resultado para la cantidad del otro producto será cero.
- *Que el costo esperado y los costos de ambos productos sean iguales*: Con esta condición, el sistema se vuelve dependiente, lo que implica que cualquier distribución de cantidades es una respuesta válida para el problema.

El modelo de enseñanza recién descrito fue implementado durante la segunda de las fases de la metodología, correspondiente al desarrollo empírico. A continuación, se presenta una síntesis de los elementos más relevantes de esta fase.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

A continuación, se presenta, de manera cronológica, un resumen de las producciones de los estudiantes enfatizando tanto las fases del ciclo de modelización que estaban desarrollando, así como los procesos de construcción de significados y producción de sentido que identificamos. Acompañamos esta descripción con un análisis en términos teóricos que permita dilucidar cómo los procesos de modelización matemática, que enmarcan el diseño del modelo de enseñanza, apoyan la construcción de significados y producción de sentido de elementos propios de un nuevo SMS para los estudiantes, el de la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 por el método de igualación.

La hoja de cálculo para cristalizar relaciones y dependencias

La lectura inicial del problema suscitó que los estudiantes reconocieran los datos relevantes, así como el objetivo al que se deseaba llegar, esto se hace evidente en el siguiente fragmento de conversación del estudiante L, ocurrido justo después de que terminara de leer el problema.

> L: Estamos hablando de que los tendría que combinar para que saliera cada uno a $60, entonces tendría que haber más parte de los cacahuates, porque estamos hablando de que la nuez Wichita nada más va a agregar sus $20

El uso de la frase "los tendría que combinar", da cuenta de que L reconoce cuál es el propósito del problema (obtener una mezcla con un costo de $60 el kilo). Además, la frase "tendría que haber más parte de los cacahuates" también da cuenta de que reconoce los datos principales del problema (costos unitarios) y su relación con la respuesta que busca.

Es de suponer que L realizó una traducción del texto del problema a un SMS de tipo aritmético en el que se van construyendo los significados de: i) variación, en la medida en la que puede especular sobre la posibilidad de tener más de un producto que de otro y ii) dependencia al reconocer que estas cantidades se restringen por una condición de precio.

En el trabajo posterior de los estudiantes, las relaciones que reconocieron en los datos les permitieron la elaboración de una herramienta de validación de los resultados que suponían para el problema. La hoja de cálculo que crearon los estudiantes se corresponde con la esperada en el diseño de la secuencia, y los estudiantes usaron varias filas (17 en total) para aproximarse cada vez más a la respuesta del problema. La tabla 1 muestra la respuesta a la que llegaron.

El proceso de exploraciones sucesivas con diferentes datos, que los estudiantes llevaron a cabo para encontrar la respuesta del problema, ratifica la construcción de los significados de *variación* y *dependencia*, pero esta vez haciendo uso del SMS de la hoja de cálculo, el cual, en este caso, se considera intermedio entre el SMS aritmético en el que los estudiantes interpretan inicialmente el problema y el SMS algebraico al que se pretende llegar con el modelo de enseñanza.

Tabla 1. respuesta de los estudiantes en la hoja de cálculo.

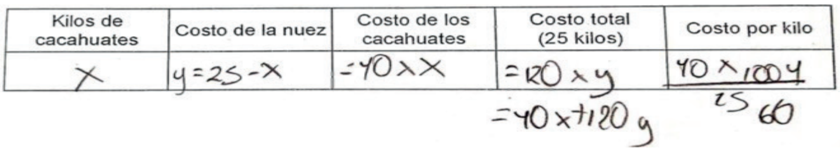
Kilos nuez	Kilos cacahuates	Costo nuez	Costo cacahuates	Costo total	Costo por kilo
6.25	18.75	750	750	1500	60

La necesidad de un método algebraico provisto de sentido

Cuando los estudiantes desarrollaron los problemas de la segunda hoja intentando replicar la estrategia del uso de la hoja de cálculo, no pudieron encontrar una respuesta exacta para estos, pues como se mencionó en la sección de metodología, las respuestas a los problemas implicaban expresiones decimales periódicas. No obstante, esta transferencia de procesos refleja producción de sentido sobre la estrategia de exploraciones sucesivas y fue clave para que los estudiantes reconocieran la necesidad de establecer un método de solución más directo para abordar esta familia de problemas.

La estrategia para introducir las literales X y Y que usó la hoja de trabajo 2 fue exitosa, dado que los estudiantes habían elaborado por su propia cuenta las fórmulas que regían la hoja de cálculo, y no tuvieron mayor inconveniente para reescribirlas en términos de X e Y. La figura 3 muestra la producción de los estudiantes para esta parte.

Una vez que los estudiantes tuvieron a su disposición una representación algebraica para el problema (nueva simbología) se introdujo el método de igualación como estrategia de manipulación de las expresiones algebraicas (trabajo matemático) con miras a obtener la solución del sistema. Sin embargo, reconociendo los resultados del estudio de Filloy et al. (2010), gran parte del trabajo tuvo que ser orientado por el investigador ya que los estudiantes tenían un dominio muy básico en la solución de ecuaciones lineales con una incógnita.



Kilos de cacahuates	Costo de la nuez	Costo de los cacahuates	Costo total (25 kilos)	Costo por kilo
x	y=25-x	=40xX	=120xy =40x+120y	40x100y / 25 60

Figura 3. Reescritura de las fórmulas de la hoja de cálculo.

Del trabajo de los estudiantes en esta segunda etapa del modelo de enseñanza deducimos que: i) las estrategias de trabajo del primer problema pueden ser transferidas a problemas con estructura similar; y ii) el sentido que los estudiantes habían producido sobre las interacciones que gobiernan el problema, permite traducir las relaciones de la hoja de cálculo al planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales escrito algebraicamente.

Los datos en contexto

Las situaciones "atípicas" que se presentaron en la tercera hoja de trabajo tenían la intención de detonar reflexiones sobre el modelo matemático y los resultados que ofrece versus la naturaleza misma de la situación en el "mundo real". No obstante, los estudiantes no lograron dar sentido al método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, aún cuando los problemas tenían la misma estructura. Este hecho se puede evidenciar con el uso progresivo de recursos alternativos a las herramientas sintácticas en los cuatro primeros problemas (ver figura 4).

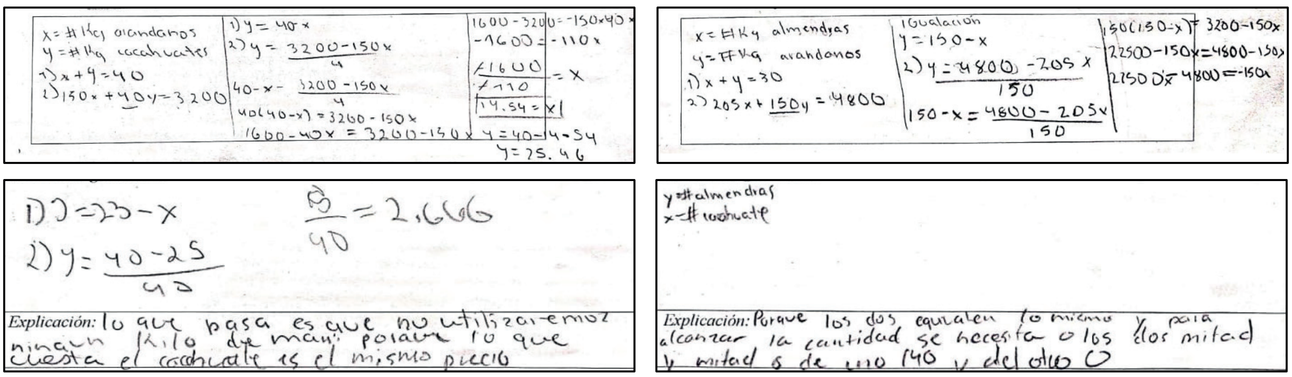


Figura 4. solución de los estudiantes a los 4 primeros problemas de la tercera hoja de trabajo.

La figura 4 muestra la aplicaron el método de igualación satisfactoriamente en el primero de los problemas. Esto se debe a que ese procedimiento fue realizado de manera plenaria en el tablero con la orientación por el investigador. No obstante, en los problemas siguientes, replicar los procedimientos no les fue suficiente para solucionarlos. De manera que en los problemas 3 y 4 la presencia de herramientas sintácticas fue prácticamente nula, lo que llevó a los estudiantes a recurrir a referentes semánticos provenientes del contexto del problema para encontrar las soluciones.

En resumen, las fases iniciales del ciclo de modelización de este estudio brindan a los estudiantes herramientas coherentes para dar respuestas a problemas particulares, aun cuando dispongan de recursos sintácticos para su solución. Además, el retorno a situaciones más concretas (la hoja de cálculo o el contexto del problema) generó algunas obstrucciones en la apropiación de los métodos algebraicos formales por su nivel más abstracto de representación.

DISCUSIÓN

Retomando la pregunta que orientó esta investigación, podemos afirmar que en este estudio las fases iniciales del proceso de modelización matemática juegan un rol importante para que los estudiantes reconstruyan los significados de variación y dependencia como parte de sus procesos de reconceptualización de las nociones de incógnita e igualdad. Además, estas primeras fases del ciclo de modelización y el uso de la hoja de cálculo permitieron a los estudiantes la producción de sentido del uso del método de exploraciones sucesivas. Sin embargo, encontramos también la necesidad de rediseñar el modelo de enseñanza propuesto para lograr que los estudiantes den mayor sentido al método de igualación.

Finalmente, consideramos que la elaboración de modelos de enseñanza que hagan uso de tareas de modelización matemática puede promover que los estudiantes (re)construyan y consoliden significados de las nociones de incógnita e igualdad, y que doten de sentido a los procedimientos que utilizan para la solución de los sistemas de ecuaciones.

Agradecimientos

Esta investigación se desarrolló en el marco del proyecto “Construcción de significados en procesos de modelación matemática. Una aproximación basada en el uso de herramientas de simulación computacional desde una perspectiva semiótica” (Conacyt, Mexico. A1-S-33505) en conjunto con el proyecto Exploring Mathematical Modeling Knowledge for Teaching Through Simulation and Coding (SSHRC, Canada. ref.: 430-2019-00382).

Referencias

Blum, W. y Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics - ICTMA 12* (pp. 222-231). Elsevier.

Filloy, E. Y. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach.* Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71254-3

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2010). Problems dealing with unknown quantities and two different levels of representing unknowns. *Journal of Research in Mathematics Education, 41*(1), 52-80. https://doi.org/10.2307/40539364

Flores, P. y Rico, L. (Coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Ediciones Pirámide.

Martín Fernández, E., Ruiz Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(3), 51-71.

Rojano, T. y Sutherland, R. (2001). Arithmetic world-algebraic world. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12 ICME Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 515-522). The University of Melbourne. http://hdl.handle.net/11343/35000

Socas, M., Ruano, M.R. y Hernández, J. (2016). Análisis Didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *AIEM*, 9, 21-41. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9