

RETOS DE ALUMNOS DE 11-15 AÑOS EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE ÁNGULO: UNA REVISIÓN DE LITERATURA PARA DISEÑAR TAREAS PROFESIONALES

11-15-year-old students' challenges in the learning of the angle concept: A literature review to design professional tasks

Rave-Agudelo, J. y Planas, N.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Este estudio se enmarca en una investigación más amplia orientada a diseñar, implementar y evaluar un taller con profesores de matemáticas de secundaria sobre el discurso en la enseñanza del ángulo. El objetivo preliminar es identificar retos comunes en el aprendizaje de este concepto documentados para alumnos en la transición de la primaria a la secundaria y en la secundaria, con edades aproximadas entre 11 y 15 años. Nuestra revisión de literatura empírica sobre el aprendizaje de ángulos indica la prevalencia de tres retos en el aprendizaje: la participación en el discurso del ángulo al resolver tareas matemáticas, la concepción estática del ángulo y la reducción del ángulo a su medida. Hemos iniciado el diseño de tareas profesionales para el trabajo con profesores sobre vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos en la enseñanza del ángulo con potencial para contribuir a minimizar o superar los retos identificados en la literatura.

Palabras clave: *alumnos en la transición de primaria a secundaria y en secundaria, concepto de ángulo, retos de aprendizaje, diseño de tareas profesionales, revisión de literatura.*

Abstract

This study is framed within a broader investigation aimed at designing, implementing and assessing a workshop with secondary school mathematics teachers on the angle discourse in teaching. The preparatory objective is to identify common challenges in the learning of this concept documented for learners in the transition from primary to secondary and in the secondary, whose ages tend to vary from 11 to 15 years old. Our review of empirical literature about the learning of angles shows the prevalence of three learning challenges: the participation in the angle discourse to solve mathematical tasks, the static conception of the angle, and the reduction of the angle to its measure. We have started the design of professional tasks for developmental work with teachers around vocabulary, explanations and graphical examples in the teaching of angles with potential to contribute to either minimizing or overcoming the challenges identified in the literature.

Keywords: *learners in the primary-secondary transition and in the secondary school, angle concept, learning challenges, design of professional tasks, literature review.*

CONTEXTO DEL ESTUDIO

Este estudio responde a la etapa inicial de una investigación sobre mirar profesionalmente el recurso del discurso en la enseñanza de ángulos en aulas de educación secundaria (ver, e.g., Boukafri y

Rave-Agudelo, J. y Planas, N. (2022). Retos de alumnos de 11-15 años en el aprendizaje del concepto de ángulo: una revisión de literatura para diseñar tareas profesionales. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 479-487). SEIEM.

Planas, 2018, para un estudio sobre el discurso en la enseñanza de matemáticas en aulas de secundaria con otros contenidos curriculares). En la siguiente etapa, que ya se ha iniciado, pretendemos diseñar tareas para trabajar con profesores este aspecto de su mirada profesional. El objetivo preparatorio ha sido identificar, en la literatura especializada, retos comunes en el aprendizaje escolar del concepto de ángulo que el profesor de matemáticas debe conocer y considerar en su práctica de enseñanza, y que están siendo el punto de partida en la elaboración de las tareas profesionales. Si bien la investigación sobre el aprendizaje del concepto de ángulo con alumnos de primaria es extensa, con alumnos de secundaria es en comparación escasa (Hardison, 2018). La decisión de realizar una revisión de la literatura ha de permitir que los retos de aprendizaje que explicaremos a los profesores puedan ser pensados como retos comunes en sus aulas de secundaria. Dicho esto, consideramos relevante incluir las últimas edades de las etapas de primaria, a pesar de variar ligeramente según el sistema educativo, por ser representativas de retos de aprendizaje que persisten en las primeras edades de las etapas de secundaria.

A fin de realizar una revisión de la literatura que permitiera resumir evidencias científicas sobre retos en el aprendizaje del concepto de ángulo en la etapa de secundaria y en la transición de la primaria a la secundaria (con edades aproximadas entre 11 y 15 años), hemos aplicado criterios y procedimientos recomendados por Siddaway et al. (2019), en torno a los procesos de identificación, cribado, elección e inclusión de estudios. Además, hemos consultado otros trabajos en educación matemática que han utilizado criterios y procedimientos similares en sus revisiones de literatura (e.g., Santagata et al., 2021). La pregunta que ha guiado nuestra revisión es la siguiente: *¿Con qué retos se acostumbran a enfrentar los alumnos ya sea en secundaria o en la transición de la primaria a la secundaria durante su aprendizaje del concepto de ángulo?* Tras explicar el proceso de revisión seguido y los resultados obtenidos, acabamos con comentarios sobre el diseño de las tareas profesionales, para lo cual nos preguntamos: *¿Qué vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos del discurso matemático pueden ser útiles en el trabajo con profesores orientado a una enseñanza que apoye a los alumnos en la minimización o superación de los retos identificados?*

PROCEDIMIENTOS PARA UNA REVISIÓN DE LITERATURA

En nuestra revisión hemos utilizado criterios de una guía para conducir y reportar revisiones de literatura narrativas, meta-análisis y meta-síntesis (Siddaway et al., 2019), especialmente los referidos a cómo decidir y documentar de manera transparente qué se hace, cómo y para qué, por un lado, y qué se encuentra y para qué se utiliza, por otro. Tras priorizar algunos criterios en la lista recomendada por la guía, hemos establecido procedimientos que no pretenden abarcar o rastrear ‘todos’ los estudios sobre el aprendizaje del concepto de ángulo con alumnos en la etapa de secundaria y en la transición de la primaria a la secundaria llevados a cabo en el contexto de distintos sistemas educativos. Dado el objetivo último de presentar, a los profesores de matemáticas con los que trabajaremos, retos comunes en alumnos de estas edades en distintos países, buscamos documentar retos que no parezcan ni sean específicos o únicos de un aula o de una pedagogía o propuesta didáctica en particular. De este modo, tendrá sentido discutir acerca de usos del discurso del profesor en la enseñanza de ángulos con base en las complejidades epistémicas, didácticas, semánticas, cognitivas... intrínsecas a la comprensión del concepto de ángulo.

Procedimiento de selección de publicaciones

Para la selección de publicaciones, donde indagar acerca de retos comunes en el aprendizaje del concepto de ángulo, nos inspiramos en las fases de Siddaway et al. (2019). Dado que queremos documentar retos hallados en distintos países y contextos pedagógicos y didácticos, tomamos como fuentes

dos bases internacionales de datos: *Web of Science (WoS)* y *Scopus*, consultadas entre enero y marzo de 2022. Generamos cadenas de búsqueda a partir de palabras en inglés para *ángulo*, *reto*, *alumno*, *matemáticas* y *aprendizaje*, en combinación con otras expresiones con significados no iguales pero similares en distintas tradiciones en educación matemática (e.g., *challenge*, *difficulty*, *obstacle*, *gap*). No distinguimos año de publicación para no perder posibles registros pertinentes a nivel de contenido. En WoS, por ejemplo, la búsqueda se realizó por TOPIC (tema) mediante la cadena ($TS=(angle^* OR "concept of angle" OR "angle concept") AND TS=(difficult^* OR challenge^* OR bias^* OR gap^* OR obstacle^* OR disabilit^* OR misconception^*) AND TS=(student^* OR learner^* OR pupil^* OR "high school" OR secondary OR young) AND TS=(mathematic^* OR geometr^*) AND TS=(learning)$). Se identificaron 120 registros, 55 en *WoS* y 65 en *Scopus*. Intencionadamente, no marcamos *primary* or *primary school*, a sabiendas de que podíamos perder algunos registros con datos de alumnos en las edades de la transición a la primaria, para no identificar cientos de artículos con alumnos en las edades más tempranas de la primaria.

La fase de cribado consistió en la lectura del título de cada registro a fin de descartar registros duplicados, y también las producciones que no estuvieran en castellano o en inglés porque con otras lenguas no habiéramos tenido acceso directo a la información. Así se excluyeron tres registros en portugués y ruso y hasta 25 registros duplicados. Esta fase terminó con 92 registros. Las fases de idoneidad y de inclusión supusieron la lectura del resumen de las publicaciones seleccionadas. Se excluyeron 71 publicaciones por no reportar estudios con datos sobre el aprendizaje del concepto de ángulo y 13 por no referirse a alumnos con edades en el intervalo 11-15. En algunos casos, fue necesaria la lectura completa de la publicación porque los resúmenes no aportaban el detalle de la situación empírica y de los participantes. Finalmente, llegamos a ocho registros indexados (marcados con asterisco en la lista de referencias de esta comunicación), con resultados de estudios empíricos en distintos países sobre el aprendizaje del concepto de ángulo de alumnos entre 11 y 15 años.

Métodos de análisis de las publicaciones

Las ocho publicaciones seleccionadas se leyeron y examinaron con métodos de análisis cualitativo y cuantitativo del contenido (Krippendorff, 1990). A nivel cualitativo, el análisis tuvo dos momentos y generó dos conjuntos de resultados en torno a unidades empíricas (sobre el aprendizaje del concepto de ángulo con alumnos de 11-15 años) y a unidades teóricas (sobre la naturaleza del concepto de ángulo y/o aspectos vinculados a su enseñanza). Las unidades de contenido empírico se crearon para que informaran sobre los participantes, la tarea asignada y resultados para cada estudio documentado. Estas unidades no corresponden necesariamente a un texto continuo en la publicación. Lo mismo ocurre con las unidades de contenido teórico, que se crearon para que informaran sobre fundamentos teóricos respecto al concepto de ángulo o a su enseñanza para cada estudio. La lectura de las publicaciones mostró resultados empíricos de carácter incremental ya que confirman resultados señalados por otros autores o por el mismo equipo en estudios previos que nuestro procedimiento no rastreó. A nivel cuantitativo, se contaron las frecuencias de aparición de los dos tipos de unidades y, más tarde, se examinó la distribución de frecuencias de acuerdo a subunidades de contenido para destacar temas conectados empírica o teóricamente. Siguen unidades de contenido para ambos tipos:

i) Ejemplos de unidades de contenido empírico (CE) (total 250):

- CE1. "In the playground, an opaque screen and a chair may be placed. While one student sits in the chair, the others stay on other side of the opaque screen with their school bags arranged in a way that the student in the chair cannot see any of them. One by one, students holding their bags may be asked to move sideways and put their bag on the ground

as soon as they can be observed by the student sitting in the chair ... students may be asked to identify the created geometric shape and its features ... students will be able to visualize the angle concept” (Bütüner y Filiz, 2017, pp. 550-551).

- CE2. “Nine girls and four boys in seventh grade constitute the ... informants, while the entire class consisted of 18 students ... the students’ drawn mathematising of climbing from the end of day two ... The angles in his explanation are categorised into angle as static shape. He applies angles as a tool in a climbing context” (Fyhn, 2008, pp. 24, 28).
- CE3. “The study was conducted with two volunteer students ... [student] was asked to measure an angle, he tried to measure it with his fingers ... but he did not continue, and said I forgot... doing so by having a length measurement in mind can lead to the opinion that he answered without thinking” (Güven-Akdeniz et al., 2022, pp. 108, 113).

ii) Ejemplos de unidades de contenido teórico (CT) (total 180):

- CT1. “By making students have high-level geometric thinking skills in the 2006 curriculum for junior high school units, geometry has a charge of about 42% of the entire content of mathematical material viewed according to competency standards” (Annisa et al., 2018, p. 1).
- CT2. “Static definition refers to an intersection of two rays at the same end point looking like the opening of a pair of scissors ... On the other hand, the dynamic definition specifies the angle as a rotation referring to change in direction” (Bütüner y Filiz, 2017, p. 534).
- CT3. “Other authors have preferred to base their classifications on physical properties of angle, noting in particular the difference between dynamic (involving movement) and static (configurational) aspects of the concept” (Mitchelmore y White, 2000, p. 209).
- CT4. “Since reflex angles ... are met and studied at the primary and secondary levels, the geometric figure ‘angle’ cannot be defined as the union of two half-lines sharing their endpoint, without facing the problem of a figure having two different measurement” (Tanguay y Venant, 2016, p. 876).

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LAS PUBLICACIONES

Aquí mostramos consideraciones empíricas y teóricas halladas en las publicaciones. Del total de unidades de contenidos teóricos y empíricos, presentamos a modo de temas las consideraciones que aparecen en más de una unidad y en más de una publicación. Estos temas se han delimitado de manera inductiva a partir de la comparación y asociación entre unidades. Por ejemplo, en varias unidades de contenido empírico se han detectado datos y resultados sobre las tareas matemáticas de aula diseñadas y experimentadas en la enseñanza de ángulos. En otras unidades de este tipo, se han detectado datos y resultados sobre procesos de aprendizaje del concepto de ángulo, ya sea relativos a la dificultad por comprender distintos significados de ángulos o a confusiones del concepto con alguna de sus partes. Dado el método de construcción de unidades con contenidos no excluyentes, en una unidad podemos encontrar el tema de las tareas matemáticas y uno o los dos temas sobre aprendizaje.

Consideraciones empíricas sobre el aprendizaje del concepto de ángulo

Para unidades de contenido empírico en más de una publicación, hemos hallado consideraciones explícitas sobre el aprendizaje del concepto de ángulo en las edades de secundaria o en la transición de la primaria a la secundaria, que apuntan a distintos niveles o perfiles de comprensión y de participación

en la construcción del discurso matemático asociado a este concepto. Esto nos ha llevado a generar subunidades de contenido empírico que agrupan consideraciones acerca de tres temas interrelacionados (se puede observar que la suma de frecuencias de las subunidades no coincide con la frecuencia del tipo de unidad de contenido empírico):

Participación en el discurso del ángulo al resolver tareas matemáticas

[CE1, total 89] La investigación especializada que hemos revisado señala la posibilidad de desarrollar distintos significados matemáticos para el concepto de ángulo al participar en la resolución de tareas con situaciones físicas que modelan configuraciones estáticas y en movimiento de ángulos (Mitchellmore, 1998; Mitchellmore y White, 2000). La relación con situaciones físicas permite reconocer y aplicar el concepto matemático de manera práctica, además de establecer similitudes entre situaciones y entre significados (Bütüner y Filiz, 2017). La resolución de algunas tareas de medida y de operaciones con ángulos favorece el reconocimiento y la manipulación del concepto (Özen-Ünal y Ürün, 2021; Tanguay y Venant, 2016).

Comprensión conceptual del ángulo como objeto estático y como giro

[CE2, total 101] La investigación revisada pone de relieve el sesgo hacia la concepción estática del ángulo, mientras que el ángulo como giro es un significado matemático que los alumnos no acostumbran a pensar de manera espontánea o que directamente no relacionan con otros significados matemáticos del concepto (Mitchellmore, 1998). Además, las definiciones comunes en libros de texto y en el discurso del profesor en la enseñanza de ángulos favorecen el desarrollo de una concepción estática (Özen-Ünal y Ürün, 2021). La dificultad para pensar el ángulo como giro parece a la vez generar dificultades para pensar medidas de ángulos que son superiores a 360° (Güven-Akdeniz et al., 2022) o con valores negativos (Fyhn, 2008), e incluso, para comprender el ángulo nulo y el ángulo llano (Bütüner y Filiz, 2017). Esta distinción entre aspectos estáticos y dinámicos del ángulo justifican el uso constante de definiciones y ejemplificaciones relacionadas con el concepto de ángulo como forma, figura, intersección, inclinación, área, giro o medida (Fyhn, 2008; Tanguay y Venant, 2016).

Confusión entre el ángulo, su valor de medida y su unidad de medida

[CE3, total 103] La investigación revisada muestra la prevalencia en alumnos de entre 11 y 15 años del sesgo hacia la definición y la caracterización del ángulo a partir de la medida (Fyhn, 2008). Se tiene dificultad para distinguir entre el ángulo como figura y el ángulo como número (Tanguay y Venant, 2016), o bien para distinguirlo de las unidades de medida, donde prevalece el uso de la unidad grado sobre la comprensión de la unidad radián (Tanguay y Venant, 2016). También, existe dificultad para referirse a los ángulos sin los valores numéricos de sus medidas (Fyhn, 2008). Esto lleva a reducir la clasificación de los tipos de ángulo a su medida por delante de otras cualidades y clases de equivalencia (Fyhn, 2008; Tanguay y Venant, 2016). Los alumnos no acostumbran a comprender cuál es la magnitud que se mide cuando se habla de la medida de un ángulo (Özen-Ünal y Ürün, 2021), por lo que algunos confunden la medida de la amplitud con la medida de la longitud de los lados (Tanguay y Venant, 2016), o incluso con la medida de la longitud del arco marcado en su representación (Bütüner y Filiz, 2017).

Consideraciones teóricas sobre el concepto de ángulo y/o su enseñanza

En unidades de contenido teórico en más de una publicación, hemos hallado consideraciones explícitas acerca del concepto de ángulo o de aspectos sobre su enseñanza, en el marco de distintas

tradiciones teóricas y con distintos énfasis. Una vez más, esto nos ha llevado a generar subunidades de contenido, que agrupan consideraciones acerca de cuatro temas nuevamente interrelacionados entre ellos tal como sugiere la suma de frecuencias de estas subunidades:

Relevancia curricular

[CT1, total 39] La investigación revisada señala que la presencia del concepto de ángulo se justifica en varios currículos de educación secundaria por su conexión con situaciones físicas, figuras planas y mediciones (Annisa et al., 2018), y por la contribución del trabajo en torno a ángulos al desarrollo del pensamiento geométrico y a la comprensión de conceptos matemáticos avanzados más allá del hecho de nombrar figuras (Fyhn, 2008). La presencia del concepto en los currículos institucionales se traduce en una presencia clara en los materiales de enseñanza habituales, en particular al presentar las definiciones, explicaciones, representaciones y ejemplos de naturaleza estandarizada proporcionados en los libros de texto (Bütüner y Filiz, 2017).

Complejidad epistémica

[CT2, total 79] La investigación revisada indaga formas de conocer y abstraer el concepto de ángulo a partir de situaciones estáticas y dinámicas (Mitchelmore y White, 2000) y de manera indirecta con situaciones de medición de rotaciones y de regiones en el plano o en el espacio (Annisa et al., 2018; Özen-Ünal y Ürün, 2021; Tanguay y Venant, 2016). Se destaca el papel problemático de las definiciones de ángulo en el acceso al conocimiento del concepto, atendiendo a su presentación en los libros de texto y otros materiales de enseñanza y a su representación en el discurso del profesor en clase. Ni histórica ni pedagógicamente se acostumbra a relacionar definiciones de ángulos, ni a discutirse o problematizarse estas definiciones (Özen-Ünal y Ürün, 2021), cuya utilización se decide según el contexto curricular y un conjunto estandarizado de representaciones (Fyhn, 2008).

Complejidad semántica

[CT3, total 48] La investigación revisada alude a la diversidad de significados matemáticos vinculados al nombre (en distintas lenguas) para el concepto de ángulo, con un campo semántico amplio en torno a situaciones físicas y abstractas (Mitchelmore y White, 2000; Özen-Ünal y Ürün, 2021), además de otros significados cotidianos externos al registro matemático (Fyhn, 2008). Varios autores han discutido la polisemia del nombre con respecto a los significados matemáticos, entre ellos: cantidad de giro alrededor de un punto desde una línea hasta otra, par de semirrectas con un punto en común, región formada por la intersección de dos semiplanos e inclinación de una línea en el plano con respecto de otra (Mitchelmore, 1998; Mitchelmore y White, 2000).

Complejidad cognitiva

[CT4, total 96] La investigación revisada muestra alumnos de entre 11 y 15 años que asocian el concepto de ángulo con representaciones gráficas estáticas en las que los lados del ángulo están dibujados, pero no reconocen el concepto en otras representaciones gráficas menos estandarizadas o en representaciones dinámicas, entre otras dificultades de naturaleza cognitiva (Mitchelmore, 1998). Los procesos de comprensión del concepto de ángulo requieren un desarrollo cognitivo que, por lo general, se prolonga hasta la etapa avanzada de secundaria, e incluso hasta la educación universitaria donde los alumnos deben enfrentarse a nuevas interpretaciones del ángulo y su medida para el estudio de la trigonometría, el cálculo vectorial o la física (Annisa et al., 2018; Fyhn, 2008).

DISCUSIÓN DE LOS TEMAS PARA EL DISEÑO DE TAREAS PROFESIONALES

Una vez identificados temas de naturaleza empírica y teórica en la literatura seleccionada sobre el aprendizaje del concepto de ángulo con alumnos de entre 11 y 15 años aproximadamente, nuestra discusión conjunta de estos temas ha estado guiada por la finalidad última del estudio preliminar: disponer de un conocimiento fundamentado en la literatura especializada sobre retos en el aprendizaje del concepto de ángulo en estas edades, que los profesores de matemáticas deben tener en cuenta en su enseñanza y que nosotros les presentaremos como punto de partida en el taller con ellos. Hemos decidido que los tres temas empíricos sobre la participación en el discurso del ángulo al resolver tareas matemáticas y sobre los sesgos en el aprendizaje son, por sí mismos, tres retos en el aprendizaje del concepto de ángulo que fundamentarán el diseño de las tareas profesionales a implementar en el trabajo con profesores de secundaria. Estos tres temas se relacionan de distintas maneras entre ellos y con los temas teóricos, los cuales, a su vez, también están sirviendo para diseñar las tareas profesionales. Ahora que sabemos tres retos importantes que los alumnos en la secundaria y en la transición de la primaria a la secundaria enfrentan en su aprendizaje del concepto de ángulo, nos planteamos qué vocabulario, qué explicaciones y qué ejemplos gráficos son útiles en el discurso del profesor cuando enseña ángulos en las clases de secundaria obligatoria.

Junto con los tres aspectos del discurso que priorizamos (vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos) y de acuerdo con los resultados de nuestra revisión, vemos importante diseñar tareas profesionales que relacionen estos aspectos del discurso en la enseñanza en el contexto de tareas matemáticas interesantes en el sentido de promover la comprensión del concepto de ángulo desde su complejidad epistémica, semántica y cognitiva. Por un lado, la superación del sesgo hacia la concepción estática del ángulo conlleva una demanda cognitiva importante asociada a las complejidades epistémica y semántica que son inherentes al concepto y que deben explicarse en la enseñanza. Por otro lado, la superación de la confusión entre el ángulo y la medida de su amplitud vuelve a conllevar una demanda cognitiva importante igualmente asociada a cuestiones de complejidad epistémica y semántica que deben nombrarse y explicarse mediante una diversidad de representaciones. Ambos sesgos pueden trabajarse desde la enseñanza mediante la resolución de tareas matemáticas que contribuyan a que los alumnos reconozcan los significados matemáticos para el concepto de ángulo y sus conexiones con otros conceptos matemáticos.

Así pues, una enseñanza del concepto de ángulo que apoye a los alumnos en el reconocimiento y la superación de los retos identificados en edades de 11 a 15 años, será una enseñanza que apoye el desarrollo de su participación en el discurso del ángulo mediante:

- i) La resolución de tareas específicas en torno a:
 - Significados no estáticos del concepto de ángulo.
 - Cualidades no mensurables del ángulo.
- ii) La exposición al discurso matemático del profesor con:
 - Explicaciones de significados y cualidades del concepto de ángulo.
 - Ejemplos gráficos no estandarizados de ángulos.

Con esta base, estamos diseñando los documentos teóricos y prácticos para el taller con un grupo de seis profesores de matemáticas en un centro público de secundaria. En otoño de 2022, el taller se iniciará con una presentación del reto general de lograr una enseñanza del concepto de ángulo en la que los alumnos participen por ellos mismos en la construcción del discurso matemático durante la resolución de tareas con el potencial de comunicar significados no estáticos para el concepto de ángulo y

cualidades distintas a la medida. En los documentos teóricos, se proporcionarán contextos con tareas matemáticas y se ilustrará vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos que se podrían dar en clase a fin de promover la minimización o superación de los dos sesgos específicos identificados en nuestra revisión. En los documentos prácticos, se proporcionarán otros contextos con tareas matemáticas y conversaciones de aulas de secundaria en torno al concepto de ángulo. Aquí, las tareas profesionales buscarán que los profesores:

- Identifiquen significados matemáticos de ángulo que se comunican mediante vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos proporcionados a los alumnos durante su participación en la resolución de tareas matemáticas.
- Interpreten riesgos potenciales, en el conjunto de vocabulario, explicaciones y ejemplos gráficos utilizados por el profesor, de fomentar el sesgo hacia la concepción estática del ángulo y la confusión entre el ángulo y su medida.
- Decidan, para vocabulario, explicaciones, ejemplos gráficos y eventualmente tareas matemáticas, modificaciones o ampliaciones que permitan comunicar también significados dinámicos y no métricos del ángulo.

Esperamos compartir las tareas profesionales y los resultados de su implementación en el taller con profesores en futuras ediciones más adelante. En Alfonso (2022) se pueden consultar tareas profesionales y resultados de un taller con profesores de matemáticas en torno al discurso en la enseñanza de la probabilidad, con atención a la facilitación de tareas matemáticas, vocabulario, explicaciones y ejemplos para la superación de los sesgos de equiprobabilidad y de representatividad (ver Planas et al., 2022, para el proyecto de referencia). Somos conscientes de que una revisión de la literatura con otros procedimientos, métodos y decisiones nos podría haber llevado a la identificación de retos distintos o de otros retos igualmente relevantes a los seleccionados para el trabajo con los profesores. Del mismo modo que en el aprendizaje de la probabilidad se ven involucrados otros retos además del sesgo de equiprobabilidad y el de representatividad. Ahora bien, creemos que los retos finalmente destacados y que están guiando el diseño de las tareas profesionales, si bien no son los únicos que se deben atender, son de suma importancia en las edades aquí consideradas, tal como revela la evidencia de la investigación revisada sobre el aprendizaje del concepto de ángulo.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del Programa de Doctorado en Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona.

PID2019-104964GB-100 y PRE2020-094574, MICINN. Grupo GIPEAM, Govern de Catalunya.

Referencias

- Alfonso, J. M. (2022). *Aprender a mirar profesionalment la llengua en l'ensenyament de la probabilitat*. Trabajo de Tesis de Maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Annisa, A. M., Suryadi, D. y Rosjanuardi, R. (2018). Design development of determinant lines materials and angles on math learning for junior high school. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, 160, 1-9. <https://doi.org/10.2991/incomed-17.2018.1>
- Boukafri, K. y Planas, N. (2018). *Métodos para el análisis de la lengua del profesor de matemáticas en clase*. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 171-180). SEIEM

- Bütüner, S. Ö. y Filiz, M. (2017). Exploring high-achieving sixth grade students' erroneous answers and misconceptions on the angle concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(4), 533-554. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1256444>
- Fyhn, A. B. (2008). A climbing class' reinvention of angles. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 19-35. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9087-z>
- Güven-Akdeniz, D., Gürefe, N. y Arikan, A. (2022). Angle conceptions of students with learning disabilities and hearing impairments. *Hacettepe University Journal of Education*, 37(1), 106-124. <http://doi.org/10.16986/huje.2020064476>
- Hardison, H. L. (2018). *Investigating high school students' understandings of angle measure*. Tesis Doctoral. University of Georgia.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica* (Trad. L. Wolfson). Paidós.
- Mitchelmore, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. *Cognition and Instruction*, 16(3), 265-284. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1603_2
- Mitchelmore, M. C. y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 209-238. <https://doi.org/10.1023/A:1003927811079>
- Özen-Ünal, D. y Ürün, O. (2021). Sixth grade students' some difficulties and misconceptions on angle concept. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 27, 125-154. <https://doi.org/10.14689/enad.27.7>
- Planas, N., Alfonso, J. M. y Rave-Agudelo, J. (2022). Initiating a project for language-and-learner responsiveness in mathematics content teaching. En C. Fernández, S. Llinares, Á. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of PME45* (Vol. 3). PME.
- Santagata, R., König, J., Scheiner, T., Nguyen, H., Adleff, A. K., Yang, X. y Kaiser, G. (2021). Mathematics teacher learning to notice: A systematic review of studies of video-based programs. *ZDM—Mathematics Education*, 53(1), 119-134. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01216-z>
- Siddaway, A. P., Wood, A. M. y Hedges, L. V. (2019). How to do a systematic review: A best practice guide for conducting and reporting narrative reviews, meta-analyses, and meta-syntheses. *Annual Review of Psychology*, 70, 747-770. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010418-102803>
- Tanguay, D. y Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM—Mathematics Education*, 48(6), 875-894. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0789-5>