

ANÁLISIS DE UNA TAREA DE INVENCIÓN DE PROBLEMAS REALIZADA POR ALUMNOS CON TALENTO MATEMÁTICO

Analysis of a problem posing task proposed to mathematical talented students

Ruiz-Socolado, G. R. y Lupiáñez, J. L.

Universidad de Granada

Resumen

La invención de problemas es una actividad que permanece un segundo plano en las aulas y puede ser utilizada para fines diversos como la detección y el estímulo del talento matemático. En este trabajo fueron analizadas 15 respuestas a una tarea de invención de problemas propuesta a estudiantes con talento matemático de entre 13 y 15 años. Se hizo un análisis cualitativo atendiendo a la resolubilidad de los problemas planteados, el contexto usado en el enunciado y la complejidad sintáctica y matemática de estos. El objetivo fue encontrar algunas de las características de los problemas generados por este tipo de estudiantes. Se concluye que las producciones de los alumnos con talento son notablemente ricas y originales, muestran una actitud positiva hacia las matemáticas como herramienta para entender la realidad y generan problemas de elevada complejidad respecto a su nivel curricular.

Palabras clave: *análisis de tareas, invención de problemas, talento matemático.*

Abstract

Problem posing is an activity that stay in the background in the classroom and it can be useful for several purposes such as the identification and stimulation of mathematical talent. In this research we analysed 15 answers from gifted students between 13 and 15 years of age to a problem posing task. We did a qualitative analysis that studies the possibility of resolution, the context and syntactic and mathematical complexity. The purpose was to find some of the characteristics of the problems generated by this type of students. It can be conclude that the problems posed by mathematical gifted students are very rich and original, and they show a positive attitude toward maths as a tool to understand the reality and they generate problems with a high level of complexity in comparison with the curriculum.

Keywords: *gifted students, problem posing, task analysis.*

INTRODUCCIÓN

Los problemas son uno de los elementos vertebradores de los currículos de matemáticas pero suelen ser enfocados desde el punto de vista de la resolución, bien sea para poner en práctica los contenidos estudiados, o bien para basar el aprendizaje en los mismos. Uno de los tipos de tareas relacionadas con los problemas que suelen quedar en un segundo plano son las relacionadas con la creación de estos.

Las tareas de invención de problemas movilizan en los estudiantes procesos cognitivos complejos que deben concretarse en la formulación de un enunciado utilizando los contenidos y procesos matemáticos que conocen. Además de ser tareas ricas, son tareas accesibles y fácilmente adaptables a todo el

alumnado, y pueden poner de manifiesto los conocimientos que el alumno posee, las relaciones que es capaz de observar entre ellos, las representaciones que domina y la actitud hacia las matemáticas que tiene.

Este carácter accesible de las tareas de invención de problemas podría servir para atender a la diversidad presente en todas las aulas. En concreto, en nuestra investigación nos centraremos en alumnos con talento matemático.

La pregunta de investigación que abordamos en esta investigación es: ¿qué características poseen los problemas inventados por estudiantes con talento matemático del primer ciclo de secundaria? Para tratar de responder se analizaron problemas creados por este tipo de alumnos para conocer los rasgos que presentan, atendiendo a su resolubilidad y a su complejidad, tanto matemática como sintáctica.
Marco teórico

Talento matemático

Existe un problema conceptual en la investigación educativa respecto a los términos alta capacidad, superdotación y talento (Tourón, 2020). Aunque sí existe un alto grado de consenso respecto a la diferenciación entre dotación y talento

El término dotado corresponde a una capacidad claramente por encima de la media en uno o más dominios de la aptitud humana, en relación con su grupo de iguales (en edad o en capacidad). El término talento se concibe como una competencia especial para determinadas áreas de la actividad humana. (Tourón, 2020, p. 23)

Esta investigación se apoyó en la teoría de los tres anillos de Renzulli, que concibe la dotación como la interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos: capacidad por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea y creatividad (Renzulli, 2012). Además, esta teoría está enfocada a la productividad creativa, cuestión que es de especial relevancia en las tareas de invención de problemas. Este trabajo se centra en el talento en un área concreta del conocimiento, el talento matemático. Así, dentro del marco presentado se utilizó la siguiente definición que incluye una serie de características identificadas en investigaciones previas:

El alumno con talento matemático es aquel que pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone. (Ramírez, 2012, pp. 23-24)

Cabe destacar que la investigación centrada en el talento matemático y realizada desde el campo de la didáctica de las matemáticas en España es relativamente reciente y no muy abundante en número (Jaime y Gutiérrez, 2017).

Invención de problemas

El término invención de problemas se usa para referirse tanto a la reformulación de un problema dado como a la creación de un problema nuevo. En este trabajo se usará el segundo de los significados, creación de problemas nuevos.

Las tareas de creación de problemas pueden clasificarse en tres tipos atendiendo a las condiciones que se plantean, teniendo así situaciones libres, estructuradas y semiestructuradas. En las situaciones

libres no hay restricciones para inventar el problema, mientras que en las situaciones estructuradas y semiestructuradas se deben crear problemas partiendo de una información, contexto o experiencia siendo más restrictiva la situación estructurada que la semiestructurada (Stoyanova, 1998).

En la actualidad hay un interés creciente en la investigación sobre invención de problemas desde varios puntos de vista como la integración de esta actividad en la educación matemática de forma sistemática, su uso para explorar la comprensión de los estudiantes o la percepción que estos tienen sobre las matemáticas (Klaassen y Doorman, 2015)

Talento matemático e invención de problemas

Según Cai et al. (2015), una de las preguntas que debe responder la investigación en educación matemática respecto a la invención de problemas es su capacidad para medir la creatividad, pero ya ha habido autores que han utilizado este tipo de tareas en el trabajo con alumnado con talento matemático. Uno de los primeros estudios al respecto fue el de Ellerton (1986) donde los estudiantes más talentosos proponen problemas más complejos (más operaciones y de complejidad mayor y datos más elaborados) que los estudiantes con capacidad media. Jaime y Gutiérrez (2017) muestra varias investigaciones que ilustran que los problemas producidos por estudiantes con talento son ricos en la variedad de tipos de números usados y que necesitan varias operaciones para ser resueltos. También hay investigaciones que comparan las producciones de estudiantes con talento frente a las realizadas por grupos estándar, algunos de los elementos que caracterizan las producciones de los estudiantes con talento son la riqueza de los problemas y la flexibilidad exhibida durante el proceso de creación (Espinoza, 2018).

METODOLOGÍA

Este estudio, de carácter exploratorio, se enmarca dentro de un diseño mixto aunque predominantemente cualitativo. Además, es de tipo descriptivo transversal que busca ampliar información relacionada con los sujetos con talento matemático a través el análisis de los problemas que inventan. En nuestro caso, los estudiantes ya han sido identificados con talento pues forman parte del programa ESTALMAT. Para ingresar en este programa se requiere superar una serie de entrevistas que requerían la resolución de diferentes problemas matemáticos, que como muestra Fernández et al. (2008) son un buen método para identificar el talento matemático.

Descripción de la muestra

Los participantes en esta investigación fueron 15 alumnos con talento matemático con edades comprendidas entre los 13 y los 15 años.

Recogida de información

Se propuso una tarea de invención de problemas semiestructurada mediante un formulario en línea durante una sesión del programa ESTALMAT supervisada por dos profesores. El enunciado propuesto fue el siguiente: “Inventa un problema de matemáticas que te parezca difícil de resolver y que esté relacionado con el coronavirus”. Había dos opciones para resolver la tarea, bien utilizando el cuadro de texto del formulario en línea, o bien subiendo una imagen de un papel manuscrito indicando que de esta manera se podían añadir dibujos, gráficas o expresiones matemáticas. El tiempo disponible para realizar la tarea fue de diez minutos.

La tarea presenta dos condiciones, la referente al coronavirus puede condicionar la temática o contexto y la otra sobre la percepción de complejidad busca la producción de problemas elaborados a la

par que presenta un reto. Esta última condición ha sido usada en otras investigaciones en este campo (Espinoza, 2011, 2018).

Una vez recogida la información se asignó a cada problema una letra mayúscula para hacer referencia a el durante el proceso de análisis de respuestas. Los problemas fueron analizados por los dos autores de este trabajo.

Categorías de análisis

Uno de los principales problemas encontrados en la investigación sobre invención de problemas es la dificultad para valorar las producciones. Las categorías usadas en el análisis fueron seleccionadas de Espinoza (2018), adaptadas a las condiciones de la tarea y simplificadas para su uso en esta investigación. Las categorías elegidas se centran en la resolubilidad del problema, el contexto y la complejidad sintáctica y matemática del mismo.

Fueron catalogados como resolubles aquellos problemas que pueden ser resueltos usando exclusivamente los datos del enunciado, es decir, se consideraron no resolubles producciones que podrían ser resueltas como tareas de investigación. También se clasificaron como no resolubles enunciados que no contuvieran una cuestión y aquellos con datos contradictorios o incoherentes.

Respecto al contexto del problema se evaluó su vinculación directa con las matemáticas, el tipo y relevancia del contexto. Un problema se consideró con vinculación directa con las matemáticas si su contexto era exclusivamente matemático.

Para clasificar el tipo de contexto usamos la clasificación expuesta en Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2019) que distingue cuatro contextos: personal, ocupacional, social y científico. Un contexto es personal cuando atañe a la propia vida del individuo o a la de sus círculos cercanos (familia, amigos, escuela...). Un contexto es ocupacional se centran en el mundo del trabajo en cualquiera de sus niveles de complejidad. Un contexto es considerado social si hace referencia a la comunidad local, nacional o global del estudiante. Un contexto es científico si requiere que las matemáticas se apliquen al mundo natural o cuestiones de ciencia y tecnología.

Con la variable relevancia del contexto se valoró cuan importante era este en la resolución del problema. Se establecieron tres órdenes de relevancia. Un problema fue considerado de orden 0 si el contexto es accesorio a la resolución del problema, es decir, si el contexto es una excusa para proponer un ejercicio matemático. Los problemas catalogados como de orden 1 fueron aquellos que sí necesitaron del contexto para ser resueltos o para analizar los resultados obtenidos pero no requirieron una matematización profunda. Por último, aquellos problemas catalogados como de orden 2 requirieron un proceso elaborado de matematización para ser resueltos.

En la categoría complejidad sintáctica se estudió la capacidad de los estudiantes para proponer problemas con un discurso coherente, ordenados y con unas relaciones equilibradas entre palabras y símbolos matemáticos (Puig y Cerdán, 1990). Se estudió la longitud del enunciado y la coherencia del mismo, la flexibilidad numérica evidenciada (tipos de números que aparecen) y el tipo de pregunta empleada.

Los indicadores usados para valorar la coherencia del enunciado fueron: contiene todas las partes necesarias (información, contexto y pregunta), no hay contradicciones en la información proporcionada, existe relación entre la pregunta y la información del problema, las expresiones matemáticas utilizadas son coherentes, no contiene errores semánticos y contiene la información necesaria para resolver el problema.

Para estudiar el tipo de pregunta consideramos tres tipos de proposiciones interrogativas: de asignación, relacionales y condicionales. Las preguntas de asignación son aquellas que esperan ser respondidas

con una cantidad. Las cuestiones relacionales requieren la comparación dos variables. Las interrogativas condicionales son aquellas precedidas de una proposición condicional (antecedente). De acuerdo con Silver y Cai (2005), asumimos que las preguntas del tipo condicional o relacional son más complejas que las de asignación.

En la categoría de complejidad matemática se estudia la demanda cognitiva que presenta el problema propuesto a la hora de ser resuelto. Las variables consideradas fueron las siguientes: cantidad de pasos diferentes para ser resuelto, empleo de ideas complejas, nivel de complejidad PISA y campos del conocimiento matemático empleados. Consideramos que un problema requería de ideas complejas para ser resuelto si se han tenido que utilizar herramientas que no aparecen en el currículo del curso de los estudiantes. Los niveles de complejidad PISA considerados fueron: reproducción, conexión y reflexión y se definieron en base al documento de Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (2006).

RESULTADOS

Resolubilidad de los problemas

Todas las producciones de los estudiantes fueron problemas matemáticos, es decir, todas los enunciados se ajustan a cuestiones que podrían resolverse empleando las matemáticas. Aunque no todos los problemas planteados fueron resolubles, concretamente, 6 de los 15 fueron considerados no resolubles. Un ejemplo de ellos fue el problema D, “La situación está muy mal. Los infectados suben cada vez más rápido. Si el primer día hubo 10 infectados, se curaron 5, y cada día se infectan un 150% más de los que estaban el día anterior, y sólo se consiguen curar cada día 125% más personas que el día anterior, ¿Cuánto tardará en infectarse toda la humanidad teniendo en cuenta que la nueva cepa resiste toda posibilidad de vacuna?”; este problema sería resoluble si se pudiera acceder al dato de la población mundial.”

La proporción de no resolubles es similar a la documentada por Espinoza (2011) en el grupo de estudiantes con talento matemático, Espinoza apuntaba diversas causas para ello como no tener que resolver los problemas que proponían, no tener miedo a equivocarse o una buena disposición hacia las matemáticas.

Contexto del problema

Ninguno de los 15 problemas analizados posee una relación directa con las matemáticas, es decir, son problemas que van más allá del contexto matemático. Aunque se consideró que este resultado está muy influenciado por la restricción temática con la que se enunció la tarea.

Respecto a los contextos PISA se observó un predominio del contexto social (7) y científico (6), frente a la ausencia de problemas con contexto ocupacional y sólo 2 producciones enmarcadas en el contexto personal. Todas las producciones tenían un claro componente social pero se consideró el lenguaje utilizado para diferenciar las cuestiones meramente sociales de las científicas, por ejemplo el problema B (“En la Península Ibérica se han desarrollado dos vacunas la “Campo Arenosillo” española y la “Valira” andorrana. La vacuna española tiene un 80% de eficacia en menores, 85% en adultos de 18-65 años y un 75% en jubilados, con un 3% de margen de error. La vacuna andorrana tiene un 60% de eficacia en menores, un 80% de eficacia en adultos de 18-65 años y un 90% en jubilados, con un margen de error del 5%. La vacuna andorrana es ligeramente más cara que la española. ¿Cuál es más eficaz?”) se catalogó dentro del contexto científico porque atañe a la eficacia de las vacunas diferenciando rangos de edad.

El contexto fue especialmente relevante en la mayoría de los problemas puesto que solo 2 producciones se consideraron de orden 0 frente a 4 problemas de orden 1 y 9 problemas de orden 2. Uno de los

problemas de orden 0 fue el C “Si en España la sanidad pública cuenta con 112.219 camas y actualmente solo quedan el 40% de las camas libres. ¿Cuántos enfermos hay en las camas hospitalarias?”, en el que el contexto no es relevante en el proceso de resolución. En el extremo contrario, relevancia del contexto de orden 2, encontramos problemas como el G “En un pueblo de 150.000 habitantes, Hay una incidencia de 360 infectados por cada 1000 habitantes. Además, han vacunado al 30% de la población sana y van a un ritmo medio de 30 vacunas al día. Aunque el covid tampoco se queda atrás, ya que por cada habitante, 1.2 personas son infectadas al día. Suponiendo que la vacuna solo se le pondría a aquellos que no estuviesen ya infectados, y que los infectados tardarían un máximo de 30 días en curarse. ¿Cuántas vacunas necesitará el gobierno en total? ¿Cuánto tiempo pasará hasta que todo el mundo halla recibido la vacuna o se halla curado del covid?”, donde en cada proceso de la resolución debe acudir al contexto del problema.

Complejidad sintáctica

Atendiendo a la longitud del enunciado se obtuvieron 7 problemas cortos (tres proposiciones o menos) y 8 problemas largos (cuatro o más proposiciones). Es decir, se observó una tendencia a formular problemas breves pero que expresaban la cuestión de forma precisa o problemas largos con un gran número de condiciones a tener en cuenta.

Salvo uno de los problemas, todos cumplían alguna de las variables sobre la coherencia del enunciado. Además, el nivel general de coherencia de las producciones es elevado puesto que 13 de las 15 producciones cuenta de manera simultánea con los siguientes indicadores: la información no presenta contradicciones, existe relación entre la pregunta y la información del problema, las expresiones matemáticas utilizadas son coherentes y no contiene errores semánticos.

Respecto a la flexibilidad numérica encontramos 7 problemas que sólo emplean un tipo de número, números naturales, 7 de ellos que emplean dos o tres tipos de número destacando los racionales en distintas representaciones (tanto por ciento, tanto por mil, fracción y decimal) y 1 producción en la que no aparecen ningún número en el enunciado, el problema I (“¿Cuál es la sucesión que refleja el número de personas infectadas por COVID mensualmente desde que empezó la pandemia? (No tenemos datos reales a nuestra disposición)”). Este último problema muestra una ruptura con lo esperado, que aparezcan números en un problema de matemáticas, evidenciando creatividad y una visión de las matemáticas que va más allá de lo numérico. También es destacable la buena adecuación al contexto que poseen los números empleados, ejemplo de ello es el problema A (“Si la tasa de mortalidad en España fue de 8,83‰ en 2019, ¿cuánto porcentaje habrá subido en 2020?”) en el que el dato de la mortalidad aparece en la unidad oficial, el tanto por mil, que no es una representación de los racionales frecuente en la matemática escolar.

En cuanto al tipo de pregunta empleada se observan 7 problemas de asignación, 7 problemas condicionales y solo 1 enunciado de tipo relacional. Aunque debemos señalar que la mayoría de cuestiones de asignación fueron enunciadas tras describir una serie de condiciones, es decir, son cuestiones con un claro componente condicional.

Complejidad matemática

Para analizar esta variable se resolvieron también aquellos problemas que, aun siendo catalogados como no resolubles podrían resolverse como tarea de investigación consultando los datos que faltaban. Así, se analizaron en esta categoría 13 problemas. Hubo 8 problemas que requirieron tres o cuatro pasos diferentes para ser resueltos, mientras que los 5 restantes requirieron de cinco pasos o más. Además, 12 de los 13 analizados requirieron de ideas complejas para su resolución, como el problema

E “Teniendo en cuenta la cantidad de aire que una persona expulsa durante 10 segundos y la cantidad de virus, ¿cuánto puede tardar una persona en contraer el coronavirus estando sin mascarilla en un espacio cerrado?”, puesto que requiere una modelización profunda y una selección cuidada de las variables a tener en cuenta.

Si atendemos a los niveles de complejidad PISA, únicamente encontramos 1 tarea de reproducción, 3 enunciados de conexión y 9 problemas de reflexión. Un ejemplo de enunciado de conexión es el problema O “Una persona asintomática infecta a 2 personas cada 15min. Si está en una habitación con 30 personas durante 2 horas y de estas un tercio no va a ser infectadas, ¿cuál es la probabilidad de que los tres quintos de las personas no se infecten?”. Como enunciado de reflexión encontramos el problema N “Tenemos tres vacunas distintas contra el coronavirus: 200 dosis de la marca Pfizer, 400 dosis de la marca Moderna y 600 dosis de la marca Astrazeneca. Si tenemos que vacunar a 600 personas contra el coronavirus y para que la vacuna funcione hay que ponerse dos dosis, ¿de cuántas maneras distintas se pueden repartir? Si esas 600 personas están repartidas en tres grupos iguales en tres hospitales y teniendo en cuenta que cada hospital prefiere poner la misma vacuna a todos los pacientes (si es posible), ¿de cuántas maneras distintas se podría hacer la distribución ahora? Si los mayores de 80 solo pueden ser vacunados con la primera vacuna y suponen el 20% de los pacientes de cada hospital, ¿como deberíamos realizar el reparto ahora? ¿Habrá suficientes vacunas para vacunar a todos los mayores de 80?”. Comparando los enunciados O y N puede verse que el enunciado O requiere tener en cuenta menos condiciones y tomar menos decisiones en cuanto a la matematización que el problema N.

Entre los campos del conocimiento requeridos para resolver los problemas predominan la aritmética y la modelización (8), también aparecen la combinatoria, el análisis, la probabilidad y la demografía. Destaca que 9 de los problemas planteados abarcan al menos dos campos del conocimiento diferentes, frente a 4 que se restringen solo a uno.

Balance general

Uno de los problemas creados puede servirnos para hacer un pequeño resumen de los resultados obtenidos. El problema J dice lo siguiente: “En una reunión, hay un infectado de COVID-19. En la reunión, hay 10 personas, 5 a cada lado de la mesa. El infectado se ha sentado justo en el medio de uno de los lados de la mesa. Las 3 personas que están en frente del infectado tienen un 70% de infectarse transcurrido exactamente un minuto sin poderse contagiar antes. Las 2 personas que se sientan alrededor del enfermo tienen un 40% de probabilidad de enfermarse pasado también un minuto sin poderse contagiar antes de que pase el minuto entero. Una vez otra nueva persona se infecta, se le aplican las reglas como al primer infectado, es decir, tiene un 70% de probabilidad de contagiar a los 3 de en frente y un 40% a los de al lado. Si la reunión dura 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que todo el mundo se contagie en la reunión?”

Este es un problema resoluble enmarcado en un contexto social pero con rasgos científicos, además, el contexto es muy importante a la hora de resolver el problema. Su enunciado es largo, elemento que podría favorecer las contradicciones o dificultar su resolubilidad, sin embargo es coherente y completo. Los números que aparecen están usados de forma adaptada al tipo de dato que expresan y la pregunta está expresada de forma condicional. Para resolverlo, se requieren ideas complejas y se calificó dentro de la complejidad PISA de reflexión. Este problema evidencia una buena disposición hacia las matemáticas como herramienta para resolver problemas que aparecen en un contexto potencialmente real.

También cabe destacar la aparición de problemas inesperados que no tienen la relación esperada con la restricción temática establecida, como el problema H “Con el coronavirus, las conexiones interpersonales se han aumentado mucho, cada persona de Málaga en Estalmat habla con 9 personas de otras

provincias. Los de Almería hablan con 4 cada uno y los de Granada hablan con 2 personas de otras provincias cada uno. ¿Cuántas personas de Jaén hay?”. Esta características también era esperable pues ya había sido documentada en estudios cuya muestra era más numerosa (Espinoza, 2011, 2018).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en esta investigación son coherentes con otros estudios similares cuya muestra era mayor, es decir, los problemas inventados por alumnos con talento matemático tienen unas características que pueden ser reconocidas utilizando las categorías empleadas. La invención de problemas es un tipo de tarea que pone de manifiesto la capacidad del alumnado con talento para establecer relaciones entre la realidad en la que viven y las matemáticas, a la par que deja observar la visión positiva que tienen sobre ellas. Destaca el uso que se hace de los números que no se toman como elemento para añadir dificultad al problema, es decir, el alumnado con talento sugiere tener una visión de la complejidad en matemáticas alejada de que aparezcan números que no dominan con solvencia o que han trabajado con frecuencia en el aula. También, se observó la capacidad para formular problemas complejos y relevantes, sin miedo a no saber resolverlos o a que el proceso de resolución sea de un nivel más elevado del que dominan.

La tarea de inventar problemas supone un reto especialmente interesante para el alumnado con talento matemático y le presta un escenario para desplegar su potencial debido a que permite expresarse matemáticamente con bastante libertad al no haber un resultado concreto esperado. Quedan muchas preguntas por resolver en la investigación en invención de problemas y su potencial aplicación para la detección y estímulo del talento matemático, los resultados de esta investigación podrían servir de apoyo para, tras analizar las producciones de alumnos estándar, realizar una comparativa.

Referencias

- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. En F. Singer, F. Ellerton y J. Cai (Eds.) *Mathematical problem posing. Research in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1
- Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261-271.
- Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada.
- Espinoza, J. (2018). *Caracterización de estudiantes con talento en matemática mediante tareas de invención de problemas*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Fernández, O. D., Castaño, M. T. S., Tojo, C. M. P. y Barreiros, M. F. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faisca: Revista de Altas Capacidades*, 13(15), 30-39.
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2019). *Marco para pruebas de matemáticas PISA 2021*. Versión preliminar.
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). SEIEM.
- Klaassen, K. y Doorman, M. (2015). Problem posing as providing students with content-specific motives. En F. Singer, F. Ellerton y J. Cai (Eds.) *Mathematical problem posing. Research in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_10

- Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (2006). *El programa PISA de la OCDE. ¿Qué es y para qué sirve?*
- Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Actas de la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática*.
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Renzulli, J. (2012). Reexamining the role of gifted education and talent development for the 21st Century: A four-part theoretical approach. *Gifted Child Quarterly*, 56(3), 150-159. <https://doi.org/10.1177/0016986212444901>
- Silver, E. A. y Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing [Valoración de problemas inventados por estudiantes de matemáticas]. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 129-135. <https://doi.org/10.5951/TCM.12.3.0129>
- Stoyanova, E. (1998) Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: A contemporary perspective* (pp. 164-185). Edith Cowan University.
- Tourón, J. (2020). Las altas capacidades en el sistema educativo español: reflexiones sobre el concepto y la identificación. *Revista de Investigación Educativa*, 38(1), 15-32. <http://dx.doi.org/10.6018/rie.38.1.396781>