Desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la geometría en un curso e-learning

Daniela **Rojas** Bastías
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Chile
daniela.rojas.b@uchile.cl
Paulina **Araya** Erices
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Chile
pauaraya@dim.uchile.cl
Salomé **Martínez** Salazar
Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Chile
samartin@dim.uchile.cl

Resumen

El desarrollo profesional docente (DP) en formato e-learning presenta distintas ventajas, como permitir el acceso a docentes de distintas zonas geográficas. Resulta relevante conocer en qué medida este tipo de capacitaciones puede contribuir a fortalecer el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) del profesorado. El presente estudio se propuso describir cómo se movilizó el MKT asociado al eje de geometría de los profesores participantes de un curso de DP online. Se aplicó un pre y post test a los 24 profesores participantes del curso, el que evaluó 3 dimensiones asociadas a las distintas partes que componían el curso. Se calculó el promedio obtenido en pre y post para cada una de las dimensiones evaluadas y para la prueba total, examinando su significancia mediante prueba t. Si bien todas las dimensiones mostraron avances, estos fueron estadísticamente significativos solo para la dimensión asociada a la construcción de definiciones.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Aprendizaje en línea; Desarrollo profesional; Investigación cuantitativa; Enseñanza de la geometría.

Introducción y antecedentes

Mejorar los conocimientos matemáticos de los profesores de Educación Básica es un desafío compartido en muchos países. Si bien desde la investigación educativa se ha avanzado en la identificación y conceptualización de los conocimientos que los profesores movilizan en la

tarea de enseñar matemática (Hill, 2010), como el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball et al., 2008), no es evidente cómo los docentes pueden desarrollar este tipo de conocimiento. Según algunos autores, los programas de formación inicial suelen ofrecer pocas oportunidades para que los futuros profesores desarrollen las capacidades requeridas en el ejercicio docente (Blömeke, Suhl & Döhrmann, 2013; Ingvarson et al., 2013), por lo que el desarrollo profesional (DP) es una estrategia clave para ofrecer a los profesores que se desempeñan en el sistema educativo espacios de formación donde puedan fortalecer sus conocimientos y habilidades.

Dentro de los distintos formatos de DP, los programas de formación docente en línea presentan algunas ventajas considerables: por un lado, permiten llegar a un gran número de docentes con un costo menor a un programa presencial; además, pueden participar profesores de distintos lugares, incluyendo zonas remotas y sectores rurales, siempre que cuenten con conexión a internet; por último, conllevan un mayor nivel de flexibilidad horaria y los profesores pueden organizar sus tiempos (Martínez et al., 2020; UNESCO, 2005). A lo anterior, se añade una consecuencia positiva dejada por la pandemia, gran parte de los profesores ha debido adaptar sus clases al formato online por lo que sus capacidades para manejar dispositivos electrónicos son probablemente mayores que hace tres años, lo que mejora su disposición y competencias de usuario para el aprendizaje en entornos virtuales.

Dentro de las distintas áreas que los profesores deben enseñar, la geometría es considerada un tema especialmente crítico. En Chile, las evaluaciones realizadas a quienes finalizan sus carreras de pedagogía han mostrado resultados muy deficientes en esta área tanto para las carreras de Enseñanza Básica como para Enseñanza de la matemática en Educación Secundaria (CPEIP, 2020). Considerando lo anterior, resulta relevante proveer a los profesores formación continua de calidad orientada a fortalecer el MKT relacionado con la enseñanza de la geometría. Intentando aportar en esta línea, el propósito de este trabajo fue describir los avances en el conocimiento matemático para la enseñanza de la geometría de los participantes de un curso de DP en formato online.

Programa de desarrollo profesional "Suma y Sigue"

Este estudio se inserta en el contexto del programa de DP Suma y Sigue (Martínez et al, 2020), un programa en formato e-learning para profesores que enseñan matemáticas en Educación Básica y Media, diseñado para fortalecer el MKT de los docentes (Ball et al., 2008), a través de una experiencia de aprendizaje activa con un enfoque basado en problemas. El programa ofrece a los docentes cursos de capacitación en distintos temas asociados a los ejes del currículo escolar y niveles de enseñanza. Estos cursos tienen una duración de 40 horas, y el trabajo sincrónico a distancia se organiza en tres sesiones de dos horas dirigidas por un instructor. El modelo de instrucción de Suma y Sigue busca favorecer el aprendizaje en línea autónomo y autodirigido, lo que ha hecho posible su masificación. Este se sustenta en un modelo formativo basado en tecnologías, que integran talleres virtuales asincrónicos, con sesiones de trabajo grupal sincrónicas. Los talleres asincrónicos están compuestos de actividades matemáticas contextualizadas, las que incorporan recursos tecnológicos para facilitar una alta interacción con el contenido matemático. El diseño de estas actividades recoge principios identificados en la literatura como relevantes para el desarrollo del MKT, como permitir desempaquetar y analizar las matemáticas elementales desde una perspectiva de la enseñanza (Yackel et al., 2007; Suzuka et al., 2009). Las sesiones sincrónicas del programa brindan

oportunidades a los docentes para reflexionar sobre el conocimiento adquirido durante el desarrollo de los talleres virtuales y conectarlos con sus prácticas de aula. También, tienen el propósito de ilustrar prácticas efectivas de aula para la enseñanza de un contenido nuclear abordado en el curso, utilizando el enfoque de discusión matemática (Chapin et al., 2003) como metodología de interacción. Este estudio se enfoca en el curso "Desarrollando el pensamiento geométrico" dirigido a profesores de 3º a 6º año básico.

Curso Desarrollando el Pensamiento Geométrico

Este curso tuvo por propósito fortalecer en los docentes el MKT de geometría centrándose en 3 temas; construcción de definiciones, visualización de figuras 3D y 2D, y construcciones geométricas.

La construcción de definiciones es un proceso fundamental para el aprendizaje de la matemática, particularmente en geometría (Brunheira & da Ponte, 2018.; Ouvrier-Buffet, 2011; Zaskis & Leikin, 2008). Según Ouvrier-Buffet (2011), para que los estudiantes aprecien la importancia de definir en matemáticas, se les debe permitir formular sus propias definiciones y ponerlas a prueba, de modo que se hagan visibles las ambigüedades y surja la necesidad de modificarlas, mejorando sus enunciados iniciales. Sin embargo, los docentes suelen haber aprendido definiciones de un modo estático y despersonalizado (Morgan et al., 2014). En este curso se incorporan actividades que otorgan a los docentes la oportunidad de reflexionar profundamente acerca del trabajo con definiciones en geometría, de modo que puedan abordar estos aspectos con sus estudiantes.

Respecto a la visualización, esta consiste en la capacidad de reflexionar sobre objetos geométricos y sus representaciones, anticipar transformaciones y formular argumentos sobre relaciones geométricas (Battista, 2007). Pese a que es una habilidad central en geometría, se sabe que los docentes muestran un bajo nivel de logro en tareas que requieren visualizar (Godino et al., 2016). En el curso, se incorporan actividades que requieren que los profesores visualicen cuerpos 3D relacionándolos con sus representaciones en 2D, analicen cortes en figuras 3D anticipando los resultados y realicen inferencias acerca de las vistas de un cuerpo.

Por último, el curso incorpora actividades para que los profesores realicen construcciones geométricas, por medio del plegado de papel y el uso de instrumentos como regla y compás, comprendiendo las razones que sustentan estos procedimientos. Mediante este tipo de actividades se espera contribuir a que los profesores sean competentes en la realización de construcciones geométricas, y que puedan abordar su enseñanza de manera conectada al razonamiento geométrico.

A continuación, se muestra parte de una de las actividades del curso, cuyo propósito era poner a prueba distintas definiciones. En ella se utiliza un diálogo de dos estudiantes quienes discuten las consecuencias de variar la manera en que se define un rombo. En la Figura 1, se presenta una definición inicial de rombo, según la cual el aprendiz debe clasificar figuras. Luego, se presenta una definición alternativa (ver Figura 2) y se espera que los docentes identifiquen si un cuadrado es un rombo a partir de dicha definición. Finalmente, se presenta una tercera definición (ver Figura 3) que involucra conceptos distintos a las dos anteriores, pero que parece ser equivalente a una de ellas. Se espera que la actividad de clasificación permita evidenciar tal equivalencia.

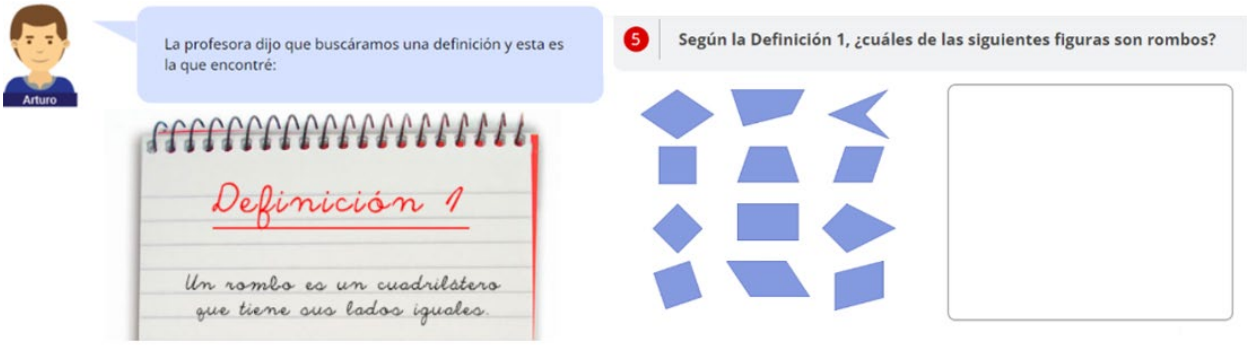


Figura 1. Primera definición de rombo y actividad de clasificación.

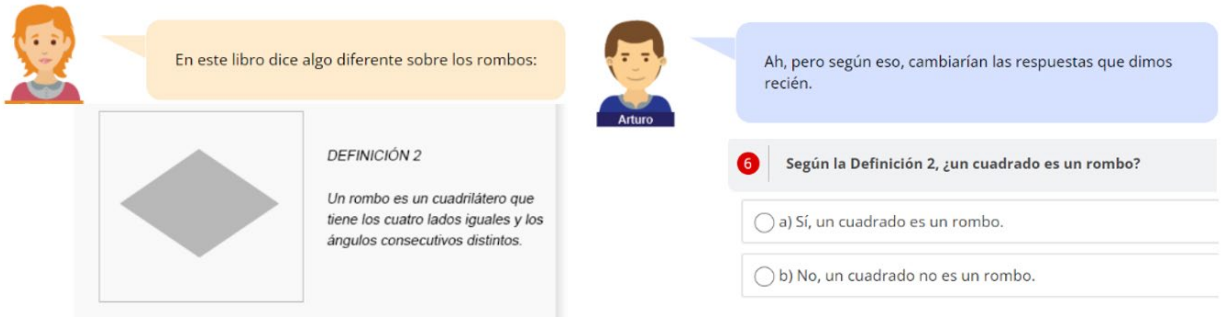


Figura 2. Definición alternativa de rombo y pregunta de aplicación.

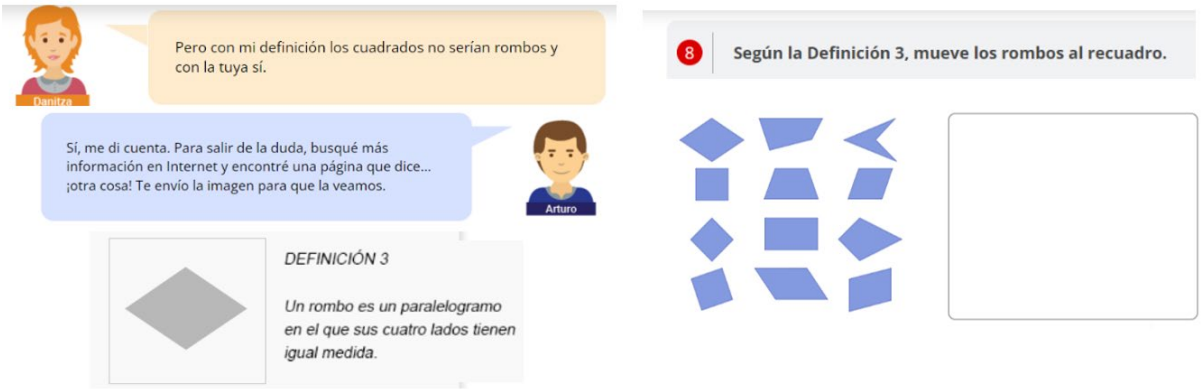


Figura 3. Tercera definición de rombo y actividad de clasificación.

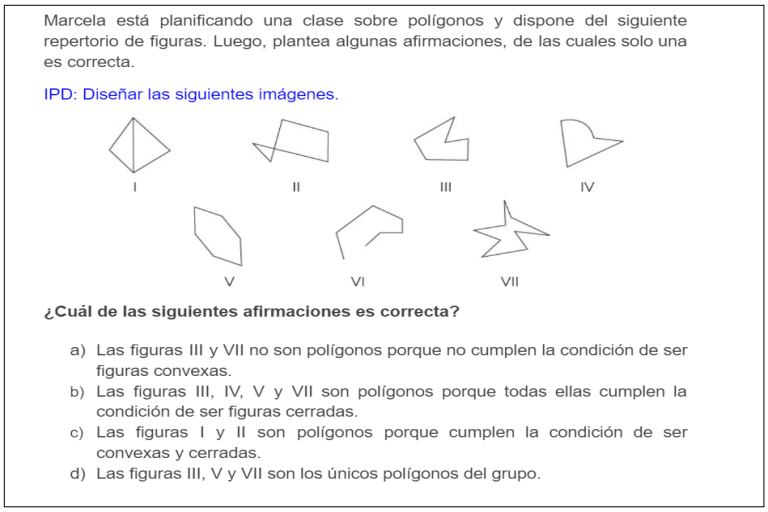
Metodología

Para describir cómo se movilizó el MKT de geometría de los participantes del curso se adoptó un diseño cuasiexperimental con pre y post test. En el estudio participaron 24 profesores de Educación Básica, quienes se inscribieron en el programa de manera voluntaria. Se aplicó el mismo pre y post test, el cual se rindió en la plataforma de los cursos. El test se compone de 12 ítems que evalúan 3 dimensiones. En la tabla 1 se describe cada una de las dimensiones evaluadas, la cantidad de ítem por dimensión y el formato de los ítems. La Figura 4 muestra un ejemplo de ítem asociado a la primera dimensión.

Tabla 1:
Descripción de las dimensiones

Dimensiones	Descripción	Ítems por dimensión
1. Definiciones y propiedades de figuras planas	Analizar definiciones en geometría plana, y deducir propiedades de figuras como ángulos y polígonos.	4 ítems (dos de selección múltiple, uno de Verdadero o Falso y uno de respuesta abierta)
2. Relaciones entre figuras 2D y 3D	Reconocer redes de poliedros, visualizar cortes y vistas de figuras 3D.	5 ítems (3 de selección múltiple y dos Verdadero o Falso)
3. Construcciones geométricas	Establecer deducciones derivadas de construcciones geométricas realizadas mediante pliegues de papel y con regla y compás.	3 ítems (dos de selección múltiple y uno de verdadero o falso)

Para analizar el avance de los profesores que participaron en el curso se calcularon las medias para cada una de las dimensiones evaluadas en el pre y el post test. Se realizaron pruebas t para muestras relacionadas con el fin de determinar si las diferencias observadas eran significativas. La prueba t fue calculada para cada una de las dimensiones evaluadas en el pre y post test y para el logro total definido como el porcentaje de la prueba respondida correctamente.


Marcela está planificando una clase sobre polígonos y dispone del siguiente repertorio de figuras. Luego, plantea algunas afirmaciones, de las cuales solo una es correcta.

IPD: Diseñar las siguientes imágenes.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) Las figuras III y VII no son polígonos porque no cumplen la condición de ser figuras convexas.
b) Las figuras III, IV, V y VII son polígonos porque todas ellas cumplen la condición de ser figuras cerradas.
c) Las figuras I y II son polígonos porque cumplen la condición de ser convexas y cerradas.
d) Las figuras III, V y VII son los únicos polígonos del grupo.

Figura 4. Ejemplo de ítem asociado a la dimensión 1.

Resultados

A continuación, se presentan las medias obtenidas en cada una de las dimensiones evaluadas y la prueba total, incluyendo la prueba t para examinar la significancia en las medias. Como se observa en la Tabla 2, los profesores que realizan en curso obtienen en el post test medias mayores a lo que obtuvieron en el pre test; sin embargo, esta diferencia es significativa únicamente para la dimensión 1, referida al trabajo con definiciones. Asimismo, se observa que la media asociada al porcentaje de logro en la prueba completa también muestra un avance significativo de 20 puntos porcentuales entre pre y post test.

Tabla 2:
Logro promedio en pre y post test por dimensión y prueba t.

Dimensión	n	Media pre test (%)	Media post test (%)	Diferencia medias	t	df	p	r
Dimensión 1: Definiciones y propiedades de figuras planas	24	43	82	39	-6.966	46	0.000	0.717***
Dimensión 2: Relaciones entre figuras 2D y 3D	24	65	73	8	-1.741	46	0.088	0.249
Dimensión 3: Construcciones geométricas	24	44	57	13	-1.589	46	0.119	0.228
Logro curso completo	24	52	72	20	-4.63	46	0.000	0.564***

Discusión

Los resultados reportados en este estudio son relevantes para conocer el potencial impacto en el aprendizaje docente que tienen los programas con las características de Suma y Sigue. Los programas de Desarrollo Profesional docente en formato e-learning son una alternativa atractiva por su potencial de masificación, particularmente en este escenario post-pandemia en el cual los docentes tuvieron que enfrentarse a un uso intenso de tecnología. Por esto, avanzar en caracterizar el tipo de aprendizajes que se pueden lograr en este tipo de programas cobra gran relevancia.

De acuerdo al estudio realizado, los profesores que participaron del curso aumentaron su MKT de geometría, siendo este logro significativo en la dimensión asociada al trabajo con definiciones y al logro total. Otras dimensiones como las relaciones entre figuras 2D y 3D mostraron un avance pero este no fue significativo. Este resultado puede explicarse en parte por el gran énfasis que se da en el curso al trabajo con definiciones, intencionando este tipo de razonamientos en los profesores de manera transversal. Consideramos esto como un importante logro si se tiene en cuenta la relevancia que tiene este tema para su labor docente (Ouvrier-Buffet, 2011;). En cuanto a las dimensiones que no mostraron diferencias significativas, esto puede deberse a la complejidad de las tareas involucradas y la necesidad de mayores oportunidades de práctica. Respecto de la visualización geométrica, cabe destacar que la variedad de representaciones posibles de usar en este tipo de curso es limitada al no contar con instancias presenciales, en donde la experimentación con material concreto sea posible. Por otra parte, en los programas de formación docente de profesores de Educación Básica sin especialización en matemática, las construcciones geométricas son escasamente tratadas (MINEDUC, 2016).

Una limitación de este estudio es que sólo consideró el progreso de los profesores en un pre y post test, sin incorporar en los análisis los resultados de las evaluaciones realizadas a lo largo del curso. Para investigaciones futuras es deseable conocer cómo se moviliza el MKT de los docentes considerando los resultados de evaluaciones intermedias.

Agradecimientos

Este estudio es posible gracias al proyecto Fondef ID21I10067, proyecto FONDECYT de Postdoctorado Nº 3220465 y el Fondo Basal FB210005, financiados por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID); y la Cátedra UNESCO "Formación de docentes para enseñar matemática en el siglo XXI".

Referencias y bibliografía

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blömeke, S., Suhl, U., & Döhrmann, M. (2013). Assessing strengths and weaknesses of teacher knowledge in Asia, Eastern Europe, and Western countries: Differential item functioning in TEDS-M. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*(4), 795–817.

Brunheira, L., & da Ponte, J. P. (2018). Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos. *Zetetike, 26*(3).

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas CPEIP (2020) *Informe Resultados Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente*. Recuperado de: https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2020/08/Informe-Nacional-END-2019_rect.pdf

Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2003). Classroom discussions using math talk in elementary classrooms. *Math Solutions, 11*, 1-3.

Godino, J. D., Gonzato, M., Contreras, Á., Estepa, A., & Díaz-Batanero, C. (2016). Assessing didactic-mathematical knowledge of prospective primary school teachers on visualization of three-dimensional objects. *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, 5*(3), 190-235.

Hill, H. C. (2010). The nature and predictors of elementary teachers' mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(5), 513–545.

Ingvarson, L., Schwille, J., Tatto, M. T., Rowley, G., Peck, R., & Senk, S. L. (2013). *An analysis of teacher education context, structure, and quality-assurance arrangements in TEDS-M countries*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

López, A., Martínez, S., Ramírez, A. & Salinas, R. (2020). Design of a learning unit for pre-service elementary school teachers: Definition of the boundary of a 2D. *The 14 th International Congress on Mathematical Education*. Shanghai, China.

Martínez, S., Guíñez, F., Zamora, R., Bustos, S., & Rodríguez, B. (2020). On the instructional model of a blended learning program for developing mathematical knowledge for teaching. *ZDM, 52*(5), 877-891.

MINEDUC. (2016). *Identificación de elementos críticos para fortalecer la formación de profesores en el área de matemática de Pedagogía en Educación Básica en Chile*. Recuperado de: https://biblioteca.digital.gob.cl/handle/123456789/711

Morgan, C., Craig, T., Schütte, M., & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: An overview of research in the field. *ZDM, 46*(6), 843-853.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics, 76*(2), 165-182.

Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D. L., Bass, H., Lewis, J., & Thames, M. (2009). Designing and using tasks to teach mathematical knowledge for teaching. *Scholarly practices and inquiry in the preparation of mathematics teachers*, *6*, 7-24.

UNESCO. (2005). *Formación docente y TIC: Logros, tensiones y desafíos. Estudios realizados en Bolivia, Chile, Colombia, Ecuador, México, Panamá, Paraguay y Perú*. OREALC/UNESCO, Santiago. Chile. http://unesdoc.unesco.org/images/0014/00141 0/141010s.pdf.

Yackel, E., Underwood, D., & Elias, N. (2007). Mathematical tasks designed to foster a reconceptualized view of early arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4), 351-367.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.