Creación de animaciones para la visualización de la geometría en tercera dimensión usando el software GeoGebra

José Pablo Calderón Gairaud
Instituto Tecnológico de Costa Rica
jose03pcg@gmail.com

Steven Gabriel Sánchez Ramírez
Instituto Tecnológico de Costa Rica
stevengabriel26@gmail.com

Resumen: En este artículo se describe el proceso para realizar animaciones en tercera dimensión con el software GeoGebra. Dichos modelos consisten en la visualización de las figuras, proporciones y cortes consecuentes de la intersección de un sólido con un plano transversal. Para realizar las construcciones, se utilizarán las herramientas que brinda GeoGebra, como también conceptos básicos relacionados con la parametrización de superficies. Además, se hace hincapié en la importancia de la creación de recursos didácticos con el uso de la tecnología para la comprensión de la visualización espacial para los estudiantes en el aprendizaje de conceptos geométricos y cómo GeoGebra permite facilitar la transición de una visualización en segunda dimensión a tercera dimensión.

Palabras clave: tercera dimensión, parametrizar, curvas, superficies, visualizar, geometría

1. Introducción

El uso de la geometría siempre ha sido indispensable para el desarrollo científico del ser humano, con solo volver al pasado, se puede apreciar las sin fin de pirámides y diferentes esculturas creadas gracias a los diversos conceptos básicos geométricos que manejaban nuestros antepasados. Por esa razón es fundamental el estudio de la geometría en nuestras a aulas. Es deber de cada país velar en que su malla curricular esté lo más actualizada posible según el grado académico que se imparta, relacionándolo con las capacidades cognitivas de los estudiantes según su edad.

Por otro lado, es importante tener los insumos suficientes para que la enseñanza de la geometría se dé en las mejores condiciones, con el fin de obtener un aprendizaje significativo. En el caso de la geometría espacial, como lo indica Ballestero y Gamboa (2010), su estudio contribuye significativamente al desarrollo de las necesidades espaciales de visualización, por lo que es importante vincular la capacidad matemática con la espacial.

En este trabajo se expondrá sobre la importancia de la enseñanza de la visualización en tres dimensiones (3D), utilizando modelización y animación geométrica, teniendo como objetivo el dar una interacción básica del uso del software GeoGebra.

2. Geometría en tercer dimensión y plan de estudios del MEP

En el año 2012, el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), decidió realizar un cambio drástico en el plan de estudios de matemáticas, poniendo como eje central la resolución de problemas, también incorporando, eliminando y modificando distintos tópicos estudiados en primaria y secundaria. Dentro de los cambios se resaltan modificaciones en los temas de geometría espacial. La nueva malla curricular del MEP (2012), propone que:

1. La visualización espacial se introduzca con una manipulación dinámica de los objetos.
2. Los temas de geometría se observen de forma espacial usando modelización geométrica.
3. Exista más presencia en el "sentido espacial".
4. Se debe enfatizar más en la visualización de formas en el espacio y no solo en sus fórmulas.

Anterior al cambio, se debía ahondar solo en el cálculo de áreas y volúmenes de los sólidos, dejando por fuera el análisis de su manipulación y visualización. Con la nueva modificación, los estudiantes deben realizar dichos cálculos, excluyendo el volumen, como también desarrollar habilidades de ubicación espacial, identificar los distintos cortes transversales que se generan en cada uno de los cuerpos redondos, entre otros.

Por lo tanto, en la formación general básica y diversificada costarricense, se desarrollan tópicos con relación a la geometría espacial, siendo los grados de décimo y undécimo donde se enfatiza más. La importancia de desarrollar una visualización espacial en los estudiantes va más allá del concepto matemático, según Guzmán (1996, citado en Gonzato et al., 2011):

> Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos. También este tema ha recibido atención desde un punto de vista del propio trabajo del matemático, en los momentos de abordar la resolución de problemas, formulación de conjeturas, así como en otras áreas diferentes de la geometría (p.2).

Como se indica anteriormente, el estudio de la tercera dimensión favorece a la imaginación y abstracción del alumnado y agudiza de cierta forma las habilidades interdisciplinarias para generar pensamientos óptimos que favorezcan la resolución de problemas, siendo este último, el eje central del MEP para la formación matemática.

3. Visualización de la tercera dimensión

La geometría es un área de las matemáticas que actualmente es considerada fundamental para la formación académica y cultural de la persona; esto debido a su facilidad para estimular un razonamiento lógico y desarrollar otras habilidades para visualizar, intuir, conjeturar, etc. Sin embargo, en la práctica, algunos docentes deciden dejar los contenidos de geometría para el final del periodo lectivo y no profundizar en estos (Gamboa y Ballestero, 2010).

Según Gamboa y Ballestero (2010), esta situación desencadena en el estudiante la sensación de ser una rama difícil y de poca utilidad, por lo que no hay motivación para aprenderla. Al no profundizar en las habilidades y contenidos geométricos, no se desarrolla en el estudiante la capacidad de visualizar u orientar y, por consiguiente, un déficit en la visualización de la tercera dimensión. Dicha deficiencia en la capacidad de visualizar afecta directamente el enfoque del MEP, que es la resolución de problemas.

Para desarrollar la capacidad de visualizar en tercera dimensión de los estudiantes, es importante promover su sentido espacial. El sentido espacial es un sentido intuitivo de la forma y el espacio en el cual están implicados los conceptos geométricos y las habilidades de reconocer, visualizar, representar y transformar las formas (Rosenstein et al., 1996). Para desarrollar este sentido espacial es necesario abarcar sus tres componentes: conocer las propiedades de figuras y formas, reconocer y establecer relaciones geométricas y la ubicación y los movimientos (Ramírez, 2014).

Ante la deficiencia y dificultad de desarrollar la visualización en tercera dimensión de los estudiantes sin el material concreto adecuado, se han creado distintos softwares o aplicaciones que permiten una manipulación ideal de los elementos geométricos. El uso de estas Tecnologías de Información y Comunicación (TIC 's) para la visualización en tercera dimensión facilitan al docente la tarea de desarrollar estas habilidades y además permiten al estudiante generar su propio conocimiento.

4. Curvas, superficies y parametrización

Para la construcción de diferentes animaciones interactivas para visualizar y modelar las diferentes curvas y superficies, es importante conocer de forma básica el desarrollo matemático de estas, asimismo el trabajo que lleva su representación paramétrica, sin entrar en gran detalle se definen estos dos conceptos, los cuales serán de suma importancia conocerlos para el uso óptimo del software GeoGebra a la hora de generar dichas construcciones.

4.1. Curvas

Según Pérez (2014), indica que una idea intuitiva de curva es la de una trayectoria en el espacio de una partícula en movimiento, en cada instante esta estará en un lugar concreto, lugar que depende de un parámetro (que se puede ver como la variable tiempo), esta trayectoria debe ser suave. Imagínese entonces a un motorizado siguiendo una carretera (que no tiene huecos, ni picos), el cual anda repartiendo la correspondencia a una casa.

Si se quiere definir una curva de forma más elaborada entonces se podría indicar que, una curva parametrizada es una aplicación diferenciable tal que:

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (x(t), y(t). z(t)), \;\; t \in \mathbb{R}$$

4.2. Superficies

Pérez (2014), explica que una superficie es un subconjunto en $\mathbb{R}^3$ donde cada punto tiene un entorno similar a un trozo de plano que ha sido suavemente curvado. Imagínese entonces, un mantel, el cual se coloca en una mesa redonda, este mantel, es suavemente combado tal que toma la forma de dicha mesa.

De forma un poco más formal, una superficie se puede definir parametrizadamente como:

$$X : U \to \mathbb{R}^3 / \, X = X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \; con, U \subset \mathbb{R}^2$$

Cabe destacar, que ambos conceptos son fundamentales para generar diferentes animaciones con el software GeoGebra, se recomienda no solo quedarse con estas dos nociones, sino más bien indagar de forma exhaustiva estas definiciones, ya que ayudará al buen manejo del programa mencionado anteriormente.

5. El software GeoGebra y la visualización 3D

El software GeoGebra es un programa diseñado específicamente para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Dentro de las herramientas y funciones que tiene GeoGebra está la manipulación, tanto de figuras planas (recta, circunferencia, polígonos, etc), como de cuerpos sólidos y figuras en tercera dimensión (esfera, cilindro, cono, etc).

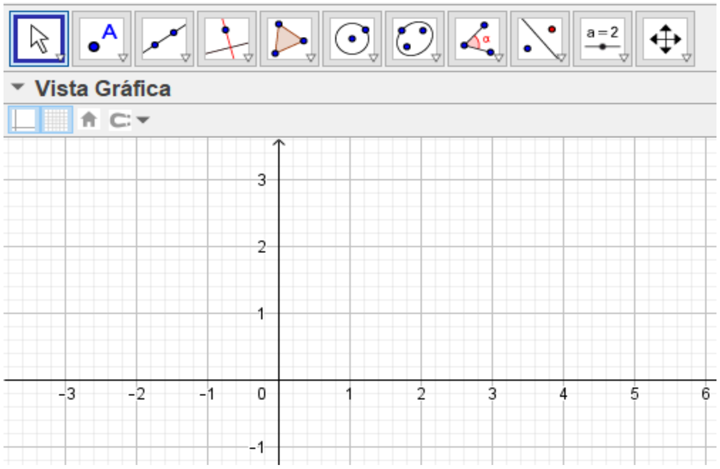
GeoGebra categoriza las diferentes figuras o elementos geométricos que se pueden construir dependiendo de si se encuentra el usuario en la "Vista Gráfica 3D" (tercera dimensión) o "Vista Gráfica" (dos dimensiones).

Dentro de la "Vista Gráfica", GeoGebra permite crear:

- Puntos
- Rectas o segmentos
- Polígonos
- Circunferencias
- Elipses
- Ángulos

Figura 1

Vista Gráfica – GeoGebra



Nota. Elaboración Propia.

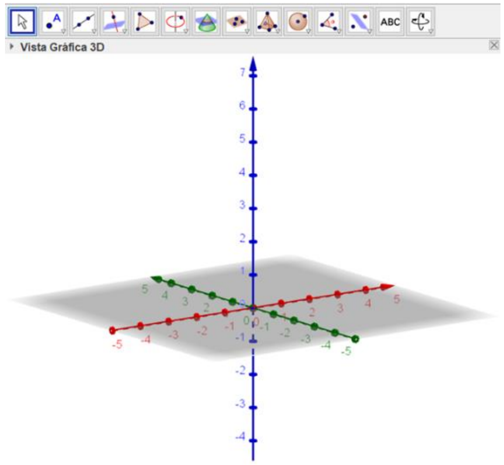
Dentro de la "Vista Gráfica 3D", GeoGebra permite crear:

- Puntos
- Rectas o segmentos
- Polígonos
- Planos
- Cuerpos sólidos (pirámide, cono, cilindro, prisma y esferas)
- Ángulos
- Deslizadores, imágenes, botones, etc

Además, permite interactuar entre las distintas construcciones y manipularlas de diversas maneras (transformaciones en el plano).

Figura 2

Vista 3D - GeoGebra



Nota. Elaboración Propia.

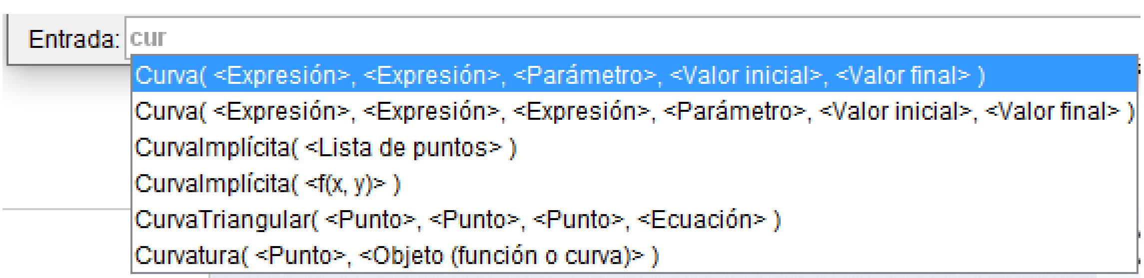
El software permite que haya una relación directa entre los elementos creados en la “Vista Gráfica”, “Vista Gráfica 3D” y su representación algebraica en la “Vista Algebraica”.

6. El software GeoGebra y parametrización

GeoGebra utiliza distintos mecanismos para ingresar las curvas que se quieren graficar, recordemos que nuestro objetivo, es el de visualizar la tercera dimensión, por lo que la vista que se utilizará en todo momento será “Gráficos 3D”. Como se vio en la sección pasada, el programa posee herramientas predeterminadas y una barra de entrada que será en donde ingresemos los comandos para generar las curvas y superficies. Para un efecto de calidad, estas deben ser ingresadas en su forma paramétrica, en el caso de las curvas se dispone de los comandos que pueden ser observados en la Figura 3.

Figura 3

Comandos de curvas

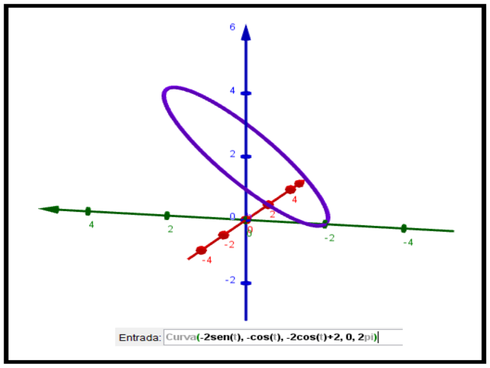


Nota. Elaboración Propia.

De estas, la que se apega a nuestras necesidades será la segunda, ya que con ella se grafican las curvas en la tercera dimensión. Observemos en la Figura 4, el cómo se ingresa la curva parametrizada y su visualización en la tercera dimensión:

Figura 4

Visualización de curva

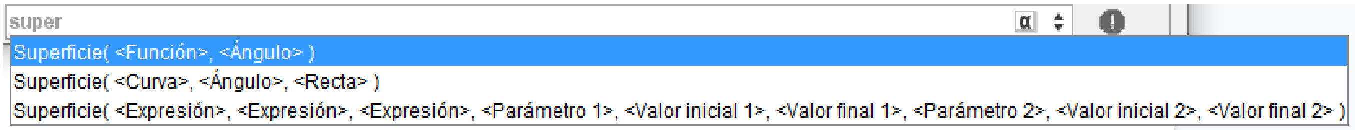


Nota. Elaboración propia.

Por otro lado, las superficies tienen también sus distintas entradas, las cuales pueden verse en la Figura 5.

Figura 5

Comandos de superficies

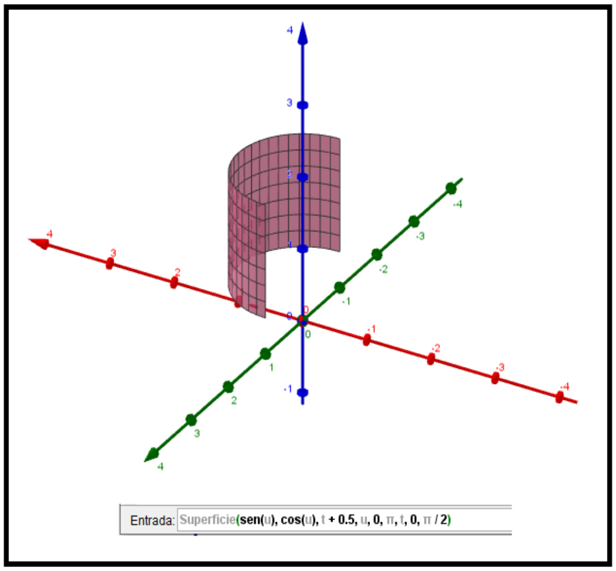


Nota. Elaboración propia.

En este caso, será la tercera opción la que se debe utilizar para generar superficies en donde sus valores se ingresan de forma paramétrica, es importante observar que para las superficies se necesitan dos parámetros. Observemos en la Figura 6, el cómo se ingresa una superficie parametrizada y su visualización en la tercera dimensión:

Figura 6

Visualización de superficie



Nota. Elaboración propia.

Ejemplo: Cono truncado

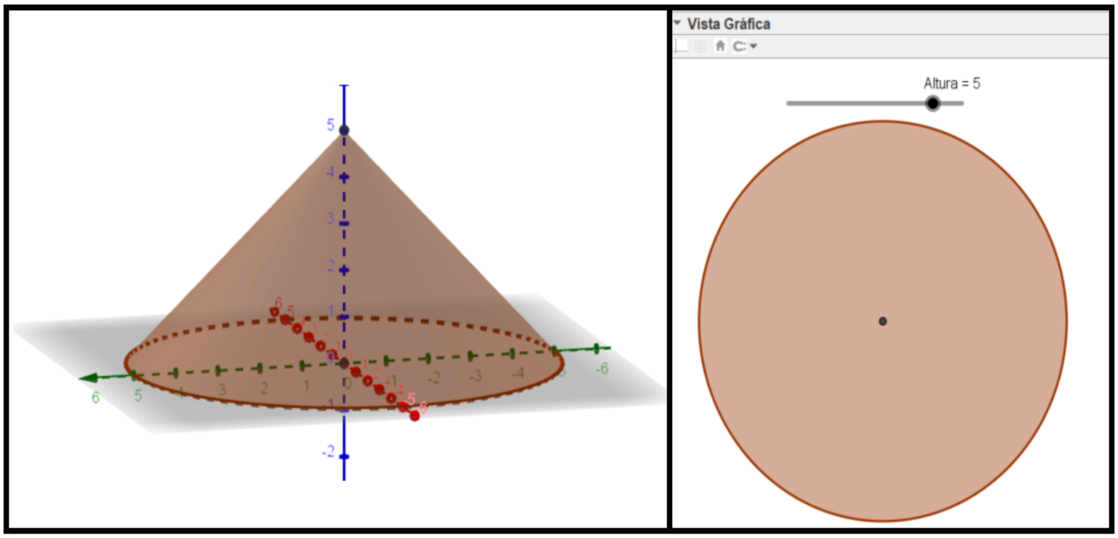
Para fines de este artículo, se creará una animación de un cono truncado en la cual se utilizarán varias herramientas del software GeoGebra, así como la parametrización del cono. Al finalizar esta animación, el estudiante podrá interactuar con la construcción y visualizar los cortes paralelos a la base, las dos circunferencias que se generan por el corte, la razón de los dos triángulos rectángulos (que se forman con la altura, radio y generatriz), además será capaz de modificar el tamaño del cono, la distancia del corte del cono y generar el cono truncado por sí mismo.

Para la construcción de esta animación, se necesita crear dos conos; el primero se crea con la herramienta "Cono" que ya ofrece GeoGebra y el segundo se creará por medio de parametrización, este último será el cono truncado.

1. Para generar el primer cono, se necesita de un deslizador "Altura" que modifique la altura y el radio de la circunferencia. Una vez creado el deslizador, se necesita un punto en el eje Z que represente la altura. Posteriormente, crea el cono con la herramienta "Cono".

Figura 7

Cono dependiente del deslizador

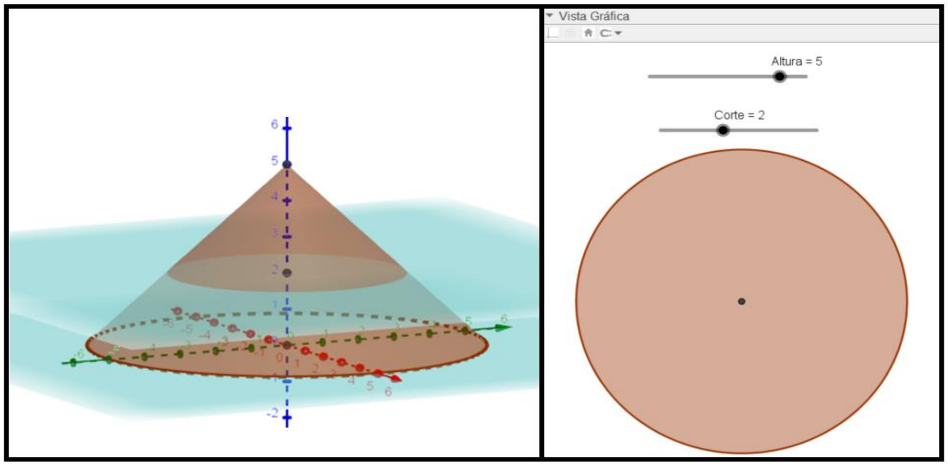


Nota. Elaboración propia.

2. Ahora, genere un deslizador “Corte” cuyo valor máximo sea el deslizador anterior. Este deslizador representa la altura del corte. Construya un punto en el eje Z que dependa del deslizador “Corte” y con la herramienta “Plano paralelo” (dando clic al punto en el eje Z y al plano de la base) construya el plano que simula el corte. (Si considera necesario, con la misma herramienta puede sustituir el plano base que trae la “Vista Gráfica 3D”).

Figura 8

Cortes en el cono

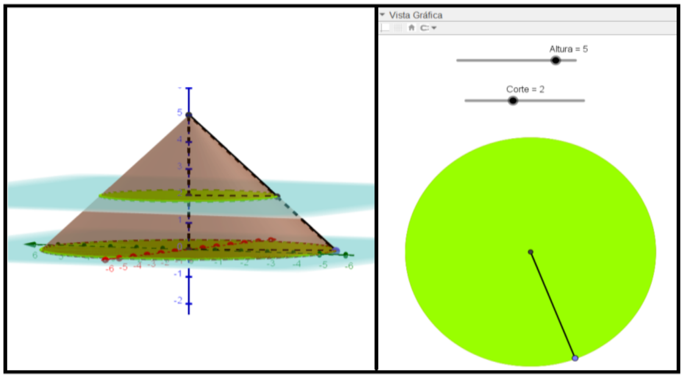


Nota. Elaboración propia.

3. Con la herramienta “Intersección de dos superficies”, construya la circunferencia de la base y la generada entre el cono y el corte. Además, con la herramienta “Punto” genere un punto que pertenezca a la circunferencia de la base. Ahora, con la herramienta “Segmento” construya el triángulo rectángulo formado por el centro de la base, el vértice y el punto en la circunferencia de la base. Por último, con la herramienta “intersección” marque el punto entre la hipotenusa y el plano del corte y construya el segmento entre ese punto y el centro de la segunda circunferencia. De esta forma se visualiza la semejanza entre los triángulos.

Figura 9

Semejanza de triángulos



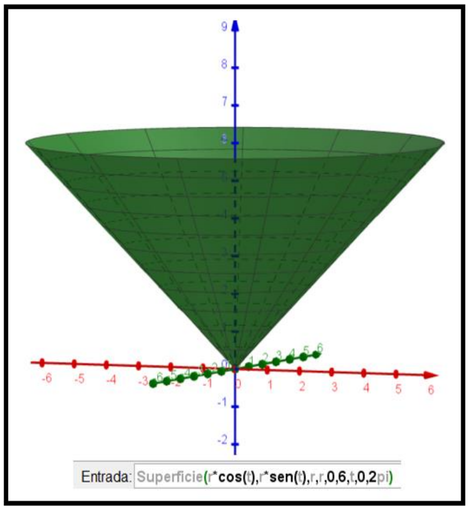
Nota. Elaboración propia.

4. Genere una casilla de control para ocultar el cono, otra para los planos, otra para las circunferencias y otra para los lados del triángulo. De esta forma, si las cuatro casillas están desactivadas, solo se visualizan las casillas y los deslizadores.
5. Ahora debe crear un cono por medio de parametrización. Para ello debe ingresar el siguiente comando en la barra de entrada:

(Superficie(r*cos(t), r*sen(t), r, r,0,6, t,0,2pi))

Figura 10

Cono generado con parametrización

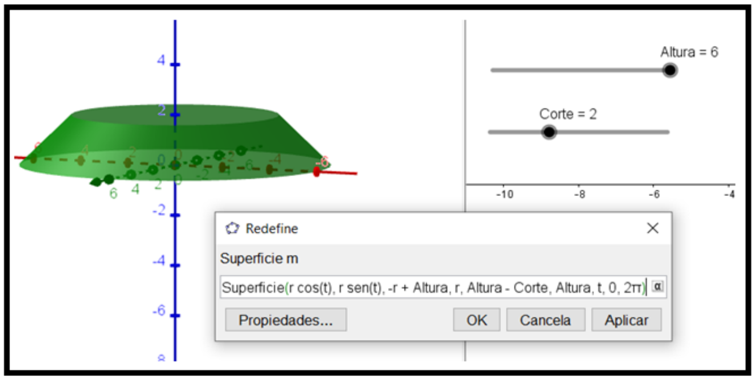


Nota. Elaboración propia.

6. Modifique los parámetros para que el cono se oriente correctamente y la altura dependa del deslizador "Altura". Además, modifique los parámetros para generar el efecto de cono truncado y que dependa del deslizador "Corte". Modifique, en "Propiedades", el grosor del trazo para que tenga una apariencia más nítida. El comando quedaría de la siguiente manera: Superficie (r cos(t), r sen(t), -r + Altura, r, Altura - Corte, Altura, t, 0, 2π)

Figura 11

Cono parametrizado con deslizadores



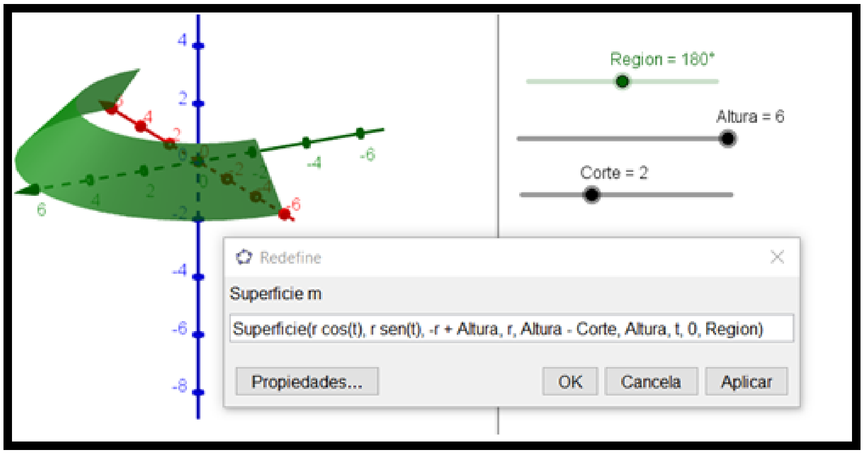
Nota. Elaboración propia

7. Por último, construya un deslizador "Region" de tipo ángulo (que vaya de 0 a 360), con el que se pueda ir generando el cono truncado. Modifique los parámetros para que el cono dependa del deslizador "Region". Elabore una casilla de control con la que pueda ocultar la región del cono truncado. El comando quedaría de la siguiente manera:

Superficie (r cos(t), r sen(t), -r + Altura, r, Altura - Corte, Altura, t, 0, Region)

Figura 12

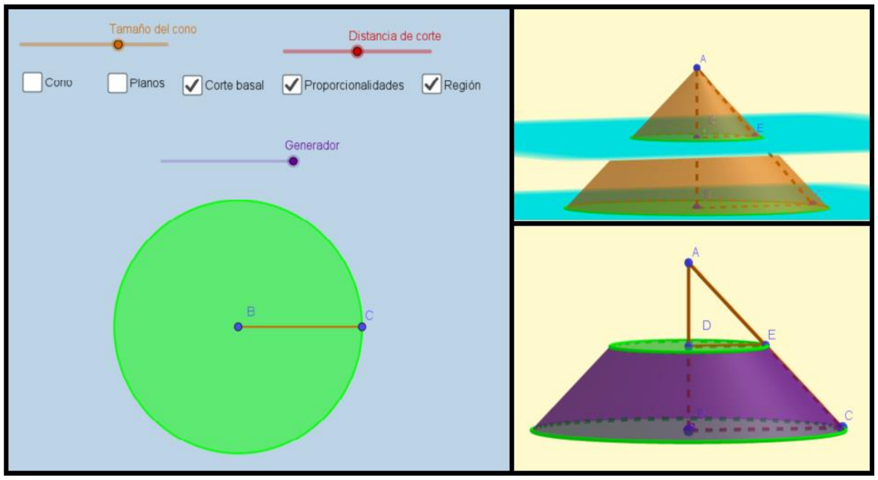
Cono parametrizado



Una vez concluida la construcción, proceda a personalizarla. Debe quedarle de la siguiente la misma manera que en la Figura 13.

Figura 13

Construcción del cono truncado finalizada



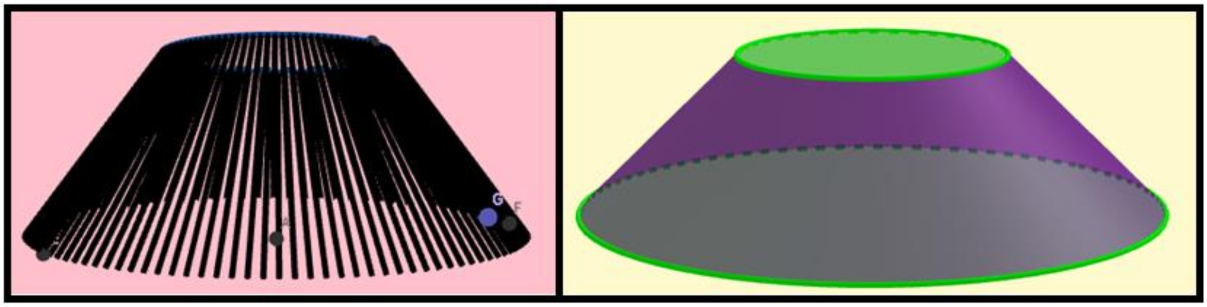
Nota. Elaboración propia.

7. Importancia de la parametrización en construcciones interactivas

El rol de la parametrización en las construcciones es lograr un acabado continuo y que permita al estudiante visualizar de mejor manera la animación; pues sin la parametrización, se trabaja con un espacio discreto de puntos y baja considerablemente la calidad de esta.

Figura 14

Diferencias entre construcciones parametrizadas y no parametrizadas



Nota. Elaboración propia.

8. Conclusiones

Se puede observar, con lo desarrollado en este escrito, la importancia que tiene el uso del software GeoGebra para generar materiales que ayuden y potencialicen la visualización y modelación de la geometría en la tercera dimensión, esto para propiciar espacios que favorezcan que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea exitoso.

Cabe destacar que el uso de curvas y superficies paramétricas en estas construcciones es fundamental para el buen desarrollo de las animaciones que se desean realizar. Como se vio en anteriormente, al no hacerlo con estos comandos, es imposible que el applet interactivo ayude a la visualización y más bien puede generar problemas con los objetivos planteados en este trabajo.

Se insta al lector a seguir indagando en el tema, ya que lo visto acá es una introducción de las aplicaciones que se pueden realizar, tanto para secundaria como para temas con más abstracción matemática como, por ejemplo, cuádricas y sólidos simples.

Referencias Bibliográficas

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Educare, 17*(2), 125-142. https://www.redalyc.org/pdf/1941/194115606010.pdf

Gonzato, J., Cajaraville, J. y Godino, J. (2011). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 109-130. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/254506

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programa de Estudios de Matemáticas*. San José: Costa Rica.

Ramírez, R. (3-5 de julio de 2014). *En geometría hablemos de-espacio* [Sesión de conferencia]. XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: El sentido de las matemáticas con sentido, Baeza, España. https://thales.cica.es/xvceam/actas/pdf/con02.pdf

Rosenstein, J., Caldwell, J. y Crown, W. (1996). *New Jersey Mathematics Curriculum Framework*. New Jersey Mathematics Coalition and New Jersey Department of Education.

Pérez, J. (2014). *Curso: Curvas y Superficies.* Universidad de Granada. http://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/raizCyS.pdf