Polinomios generadores de números primos

Ronald Cordero Méndez

Universidad San Isidro Labrador, Costa Rica

Ronald.come@gmail.com

Resumen: Se presenta el Teorema de la Multiplicación (Factorización) de Cordero en Z, si $n = (s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1)(k-1) + sx^2 - (s+1)x + p * s$ con $x, s, k \in \mathbb{Z}$ y $p \in \{3,5,11,17,41\}$, entonces $n^2 + n + p$ se puede expresar como la multiplicación de dos números de la forma: $P(s,x) = s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1$ y $P(s,x,k) = -P(s,x)(k-1)^2 + (2n+1)(k-1) + x^2 - x + p$. Algunos ejemplos de aplicación del Teorema. Utilidad de $n = (s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1)(k-1) + sx^2 - (s+1)x + p * s$, $x, s, k \in \mathbb{Z}$ y $p \in \{3,5,11,17,41\}$ en la construcciòn de La Criba de los "n" Cordero. Material de investigación útil en la construcción de programas informáticos necesarios en la criptografía.

Palabras clave: Polinomios, números primos, criba, números afortunados de Euler

1. Polinomios generadores de números primos y compuestos (Generador de números primos)

Los números primos han sido tema de muchas investigaciones, muchas repetitivas que contribuyen poco al tema, lo que verifica la frase del gran matemático Leonhard Euler que dice:"Los matemáticos han intentado en vano, hasta la actualidad descubrir algún orden en la secuencia de números primos, y tenemos razones para creer que se trata de un misterio que la mente humana nunca resolverá" (Leonard Euler, 1707-1783, mencionado por Camacho y Camacho, 2020, p.85). Hasta el momento en el año 2020 este misterio no ha sido resuelto, por lo que creo que Euler puede estar en lo cierto. Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza y murió el 18 de septiembre de 1782 en San Petersburgo, Rusia (Aznar, 2007). Extraordinario matemático del siglo XVIII.

Otra frase que lo afirma dice:

> El encanto de los números primos consistía quizás en la imposibilidad de explicar en qué orden aparecen. Cada uno se dispersa a su antojo, cumpliendo la condición de no tener más divisores que el uno y él mismo. Aunque no cabe duda de que cuanto más grandes son, más difícil resulta encontrarlos, y es imposible predecir su aparición siguiendo ninguna regla…"La fórmula preferida del profesor (Ogawa, 2003, mencionadado por Frases y Pensamientos, s.f., párr. 4)

Nuestra pregunta ahora es cómo encontrar números primos, si no es posible encontrar una fórmula polinomial o de otro tipo que nos genere todos y cada uno de los números primos, o por lo menos una fórmula que genere solamente números primos aunque no sean consecutivos.

En algún momento dado aparecen los números compuestos que se mezclan con los números primos, por lo que me lleva a suponer que el cribado es una buena opción para encontrar números primos grandes.

Con ayuda de los polinomios $P(n) = n^2 + n + p$, donde $p = 2, 3, 5, 11{,}17, 41$ que resulta ser polinomios que generan números primos cuando n toma valores desde 0 $hasta\ n = p - 2$, y luego generan números compuestos y primos mezclados, por lo que el problema de encontrar una fórmula que genere solamente números primos no lo resuelve este tipo de polinomios. Pero encontrar un fórmula que genere los números compuestos que son generados por estos polinomios es el tema de la investigación además de buscar un procedimiento que ayude a cribar los números primos.

2. Polinomios de la forma $\boldsymbol{P(n) = n^2 + n + p}$, donde $\boldsymbol{p = 2, 3, 5, 11, 17, 41}$

Los polinomios $P(n) = n^2 + n + p$, generan números primos, por ejemplo, se generan los números primos: $41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 181, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 707, 853, 911, 971, 1033,$

$$1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523{,}1601$$

cuando $P(n) = n^2 + n + 41$ y desde $n = 0\ hasta\ n = 41 - 2 = 39$, en total 40 números primos, pero a partir de $n = 40$ se generan números compuestos y números primos. A este poliomio se le llama polinomio de Euler.

Otra forma de escribir el polinomio de Euler es $P(n) = n^2 - n + 41$, pero éste genera los números primos anteriores cuando, n toma valores desde 1 hasta 40.

Otro polinomio de esta forma que genera números primos es $P(n) = n^2 + n + 17$ desde $n = 0\ hasta\ n = 17 - 2 = 15,\ el$ cual fue descubierto por el matemático Adrien Marie Legendre:

> Legendre nació en París en el año 1752 en una familia rica. Recibió educación en el Collage Mazarin en París, y defendió su tesis en física y matemática en 1770. Murió en París en el año 1833, después de una larga y penosa enfermedad. Su viuda conservó cuidadosamente las pertenencias del matemático para preservar su memoria. El último lugar donde vivió fue en el pueblo de Auteuil en París, Francia (Fernández y Tamaro, 2004, párr.1)

3. Los números afortunados de Euler

Primero dejemos claro que Goldbach y Legendre demostraron que no es posible encontrar un polinomo que dé números primos para todo número natural, el primero lo demóstro para coeficientes enteros y el segundo para funciones algebraicas racionales.

El matemático Rabinowitz demostró que $P(n) = n^2 + n + p$ da números primos para $n = 0, \dots, p-2$ si y solo si $1-4p$ es el negativo de un número de Heegner, que son los únicos números positivos k, que cumplen no ser cuadrados perfectos y que en el anillo de enteros del cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-k})$ es de factorización única.

Los números de Heegner son: 1,2,3,7,11,19,43, 67,163.

Además los números afortunados de Euler son los enteros positivos p, para los que $1-4p = -k$, siendo k un número de Heegner, y mediante comprobación obtenemos que los únicos posibles son $2, 3, 5, 11, 17, 41$ y el número de Heegner asociado al 41 es el 163.

4. Aplicaciones del teorema

4.1. El teorema de la multiplicación de Cordero en $\mathbb{Z}$

Si $n = (s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1)(k-1) + sx^2 - (s+1)x + p * s$, $x, s, k \in \mathbb{Z}$ y $p \in \{3,5,11,17,41\}$, entonces $n^2 + n + p$ se puede expresar como la multiplicación de dos números de la forma: $P(s,x) = s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s +$ y $P(s,x,k) = -P(s,x)(k-1)^2 + (2n+1)(k-1) + x^2 - x + p$

Las fórmulas anteriores nos permiten encontrar valores de "n" que al sustituir en los polinomios de la forma $p(n) = n^2 + n + p$ donde $p \in \{3,5,11,17,41\}$ obtenemos siempre un número compuesto así como encontrar una factorización en dos factores de la expresión $n^2 + n + p$. (La factorización no necesariamente es completa)

Aplicación 1

Sea $s = 12, x = 15, k = 8$ y $p = 41$

$$n = (s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1)(k-1) + sx^2 - (s+1)x + p * s$$

$$\Rightarrow n = (12^2(15)^2 - 12(12+2)(15) + 41 * 12^2 + 12 + 1)(8-1) + 12(15)^2 - (12+1)(15) + 41 * 12 = 253576$$

Ahora:

$P(s,x) = s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1$

$\Rightarrow P(12,15) = (12^2(15)^2 - 12(12+2)(15) + 41 * 12^2 + 12 + 1)$

$\Rightarrow P(12,15) = 35797$

Por otro lado:

$P(s,x,k) = -p(s,x)(k-1)^2 + (2n+1)(k-1) + x^2 - x + p$

$\Rightarrow P(8,-5,3) = -35797 * 49 + (2 * 253576 + 1) * 7 + (15)^2 - 15 + 41 = 1796269$

Por el teorema:

$P(n) = n^2 + n + p = \ P(s,x) * P(s,x,k)$

$\Rightarrow P(253531) = 253576^2 + 253576 + 41 = 35797 * 1796269$

Donde 35797 y 1796269 son números primos.

Aplicación 2

Sea $s = 1,\ x = 2^{77232917} - 1, k = 2\ y\ p = 41$. Entonces:
$\Rightarrow n = (s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1)(k-1) + sx^2 - (s+1)x + p * s$

$\Rightarrow n = ((2^{77232917} - 1)^2 - (1+2)(2^{77232917} - 1) + 41 + 1 + 1)(2-1)\ +$
$(2^{77232917} - 1)^2 - (1+1)(2^{77232917} - 1) + 41$

$\Rightarrow n = (2^{154465834} - 2 * 2^{77232917} - 3 * 2^{77232917} + 47) + 2^{154465834} - 2 * 2^{77232917} +$
$1 - 2 * 2^{77232917} + 2 + 41$

$\Rightarrow n = 2 * 2^{154465834} - 9 * 2^{77232917} + 91$

Ahora:

$P(s,x) = s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1$

$\Rightarrow P(1,\ 2^{77232917} - 1) = 2^{154465834} - 5 * 2^{77232917} + 47$

$\Rightarrow P(s,x,k) = -p(s,x)(k-1)^2 + (2n+1)(k-1) + x^2 - x + p$

Por otro lado:

$P(1, 2^{77232917} - 1, 2) \qquad = -2^{154465834} + 5 * 2^{77232917} - 47 + 4 * 2^{154465834} - 18 *$
$2^{77232917} + 183 + 2^{154465834} - 2 * 2^{77232917} + 1 - 2^{77232917} + 1 + 41$

$\Rightarrow P(1, 2^{77232917} - 1, 2) = 4 * 2^{154465834} - 16 * 2^{77232917} + 179$

Por el teorema

$P(n) = n^2 + n + p = \ P(s,x) * P(s,x,k)$

$\Rightarrow P(2^{154465835} - 9 * 2^{77232917} + 91) = (2^{154465835} - 9 * 2^{77232917} + 91)^2 +$
$(2^{154465835} - 9 * 2^{77232917} + 91) + 41$

$= (2^{154465834} - 5 * 2^{77232917} + 47) * (4 * 2^{154465834} - 16 * 2^{77232917} + 179)$

Se necesitaría un ordenador para probar que

$2^{154465834} - 5 * 2^{77232917} + 47$ y $4 * 2^{154465834} - 16 * 2^{77232917} + 179$ son números primos o compuestos cuyos factores son números primos muy grandes.

Aplicación 3

Sea $s = 1500$, $x = 800, k = 300$ y $p = 5$
$n = (s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1)(k-1) + sx^2 - (s+1)x + p * s$
$\Rightarrow n = ((1500)^2(800)^2 - 1500(1500+2)(800) + 5 * (1500)^2 + 1500 + 1)(300 - 1) + 1500(800)^2 - (1500+1)(800) + 11 * 1500 = 430025405405499$
Por otro lado:

$P(s, x) = s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1$

$\Rightarrow P(1500, 800) = 1438208851501$

Ahora:

$P(s, x, k) = -P(s, x)(k-1)^2 + (2n+1)(k-1) + x^2 - x + p$

$P(1500{,}800{,}300) = -1438208851501 * 299^2 + (2 * 430025405405499 + 1) * 299 + (800)^2 - 800 + 5 = 128577882900087005$

Por el teorema

$P(n) = n^2 + n + p = P(s, x) * P(s, x, k)$

$\Rightarrow P(430025405405499) = (430025405405499)^2 + 430025405405499 + 5 = 1438208851501 * 128577882900087005$

Donde 1438208851501 es primo y 128577882900087005 es compuesto.

Aplicación 4

$s = -453877$, $x = -8491$ y $p = 11$ tenemos que:

$P(-453877, -8491) = (-453877)\text{^}2 * (-8491)\text{^}2 - 453877 * 453875 * 8491 + 11 * (-453877)\text{^}2 - 453877 + 1 = 14850564038738095205 = 5 * 89 * 33372054019636169$ de donde 5, 89 y 33372054019636169 son números primos.

Aplicación 5

$s = 34567893426789$, $x = 0$ y $p = 41$ tenemos que:
$P(34567893426789{,}0) = (34567893426789)\text{^}2 * (0)\text{^}2 - 34567893426789 * 34567893426791 * 0 + 41 * (34567893426789)\text{^}2 + 34567893426789 + 1$

$= 48992509494599562853310298151$

$= 44059 * 104486463803 * 10642288263263$, donde $44059, 104486463803$ y 10642288263263 son números primos.

Aplicación 6

$s = 2349,\ \ x = -345\ \ y\ \ p = 41$ tenemos que:
$P(2349, -345) = 2349^2 * (-345)^2 - 2349 * 2351 * (-345) + 41 * 2349^2 + 2349 + 1$
$= 658887758371 = 41 * 16070433131$, donde 41 y 16070433131 son números primos.

Aplicación 7

$s = 453891,\ \ x = 849\ \ y\ \ p = 41$ tenemos que:
$P(453891\,, 849) = 453891^2 \cdot (849)^2 - 453891 \cdot 453893 \cdot 849 + 41 \cdot 453891^2 + 453891 + 1 = 14833082582478787807 = \underline{1699 * 8730478271029}$, donde 1699 y 8730478271029 son números primos.

Aplicación 8

Sea $s = 2349,\ \ x = -345$ y $p = 41$ tenemos que:
$P(2349, -345) = 41 * 16070433131$
Sea $k = 8$, entonces:
$n = (41 * 16070433131)(8 - 1) + 2349(-345)^2 - (2350) * (-345) + 41 * 2349$
$\Rightarrow\ n = 4612494805381$

Luego:

$P(s, x, k) = -41 * 16070433131 * (8 - 1)^2 + (2 * 4612494805381 + 1)(8 - 1) + (-345)^2 - (-345) + 41 = 32289427234573 = 15901 * 2030653873$ donde 15901 y 2030653873 son primos.
Observemos que:

$P(n) = n^2 + n + 41 = 41 * 16070433131 * 15901 * 2030653873$

con $n = 4612494805381$

Aplicación 9

Sea $s = 10, k = 4$ y $x = -5$ encontrar n, $P(n) = n^2 + n + 41$, $P(s, x)$ y $P(s, x, k)$

Solución:

$n = (100 * 25 + 120 * 5 + 4100 + 11) * 3 + 10 * 25 + 11 * 5 + 410 = 22348$

$P(n) = 22348^2 + 22348 + 41 = 499455493$

$P(s,x) = 100 * 25 + 120 * 5 + 4100 + 11 = 7211$

El otro factor se puede encontrar haciendo la división, $\frac{p(n)}{p(s,x)}$ o utilizando la fórmula.

$\frac{P(n)}{P(s,x)} = \frac{499455493}{7211} = 69263$ o $P(s,x,k) = -7211 * 9 + (2 * 22348 + 1) * 3 + 25 + 5 + 41 = 69263$

Además:

$P(n) = n^2 + n + 41 = 22348^2 + 22348 + 41 = 499455493 = 7211 \bullet 69263$

Aplicación 10

Sea $s = 30, k = 7$ y $x = 8$ encontrar n, $P(n) = n^2 + n + 11$, $P(s,x)$ y $P(s,x,k)$
Solución:

$n = (900 * 64 - 960 * 8 + 11 * 900 + 31) * 6 + 30 * 64 - 31 * 8 + 11 * 30 = 361108$

$P(n) = 361108^2 + 361108 + 11 = 130399348783$

$P(s,x) = 900 * 64 - 960 * 8 + 11 * 900 + 31 = 59851$

El otro factor se puede encontrar haciendo la división, $\frac{p(n)}{p(s,x)}$ o utilizando la fórmula.

$$\frac{P(n)}{P(s,x)} = \frac{130399348783}{59851} = 2178733$$

$P(s,x,k) = -59851 * 36 + (2 * 361108 + 1) * 6 + 64 - 8 + 11 = 2178733$

Así:

$P(n) = 361108^2 + 361108 + 11 = 130399348783 = 59851 \bullet 2178733$

Aplicación 11

Sea $s = 15, k = 100$ y $x = -2$ encontrar n, $P(n) = n^2 + n + 41$, $P(s,x)$ y $P(s,x,k)$

Solución:

$n = (225 * 4 + 255 * 2 + 41 * 225 + 16) * 99 + 15 * 4 + 16 * 2 + 615 = 1055156$

$P(n) = 1055156^2 + 1055156 + 41 = 1113355239533$

Entonces:

$P(s, x) = 225 * 4 + 255 * 2 + 41 * 225 + 16 = 10651$

El otro factor se puede encontrar haciendo la división, $\frac{P(n)}{P(s,x)}$ o utilizando la fórmula.

$$\frac{P(n)}{P(s,x)} = \frac{1113355239533}{10651} = 104530583$$

O también:

$P(s, x, k) = 4 + 2 + 41 - 10651 * 99^2 + (2 * 1055156 + 1) * 99 = 104530583$
Luego:

$P(n) = 1055156^2 + 1055156 + 41 = 1113355239533 = 10651 \bullet 104530583$

5. La Criba de los n Cordero

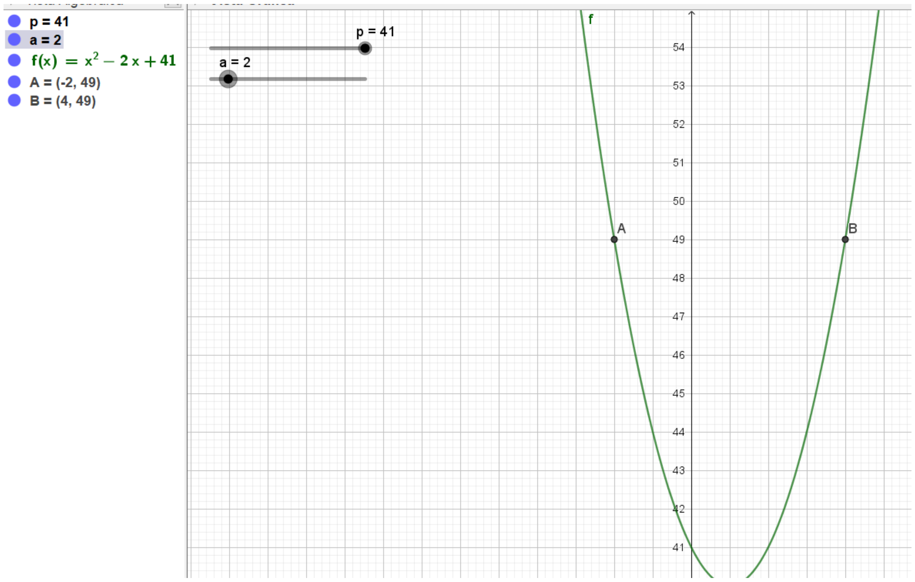
Tenemos que:

$n = (s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1)(k-1) + sx^2 - (s+1)x + p * s$
donde $x, s, k \in Z$, con $p \in \{3,5,11,17,41\}$ $-a \leq x \leq a+2$, $a \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{Z}$

Si $s = 1$ y $k = 1$ obtenemos $n = x^2 - 2x + p$ donde $f(x) = x^2 - 2x + p$ es la parábola que está por "fuera" de las demás parábolas (Figura 1).

Figura 1

Parábola



Si evaluamos $f(x) = x^2 - 2x + p$ en los extremos del intervalo, obtenemos:

$f(-a) = (-a)^2 - 2 \bullet (-a) + p = a^2 + 2a + p$

$f(a+2) = (a+2)^2 - 2(a+2) + p = a^2 + 4a + 4 - 2a - 4 + p = a^2 + 2a + p$

O sea da el mismo valor.

El vértice de la parábola que está "por fuera" $f(x) = x^2 - 2x + p$ es $(1,\ p-1)$

Si estudiamos el codomino $[0,\ a^2 + 2a + p\ [$ para la función parabólica: $f(x) = x^2 - 2x + p$

Definimos el conjunto de funciones:

$f(x) = (s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1\ ) * (k-1) + s * x^2 - (s+1)x + p * s$

Con $1 \leq s \leq \frac{a^2+2a+p}{p}$, $\quad s, k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} s \geq 1\ si\ k = 1 \\ s \geq 2\ si\ k \neq 1 \end{cases}$ y codomino $0 \leq n < a^2 + 2a + p$

Resolver la inecuación:

$n = (s^2x^2 - s(s+2)x + p * s^2 + s + 1\ ) * (k-1) + s * x^2 - (s+1)x + p * s \leq a^2 + 2a + p$

Con $1 \leq s \leq \frac{a^2+2a+p}{p}$, $\quad s, k \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} s \geq 1\ si\ k = 1 \\ s \geq 2\ si\ k \neq 1 \end{cases}$ y codomino $[0,\ a^2 + 2a + p\ [$

O también:

$\left[\frac{2ta^2+(4t-2)a+2tp-1}{2t},\ a^2 + 2a + p\right[,\quad t \in \mathbb{N}$

Luego se eliminan todos los valores de n obtenidos en las inecuaciones y que están en el intervalo $[0,\ a^2 + 2a + p\ [$. Los valores de n que quedan en el intervalo se evalúan en $P(n) = n^2 + n + p$ obteniéndose solamente números primos

5.1. Aplicaciones

Utilicemos la Criba para un $a = 20,\ p = 41\ \ tenemos\ que\ a^2 + 2a + 41 = 481$ con $s = 1,\ \ k = 1\ \ y\ \ p = 41.$

$n = x^2 - 2x + 41 \leq 481$

$-20 \leq x \leq 22$

Obtenemos:

$n = 40{,}41{,}44{,}49{,}56{,}65{,}76{,}89{,}104{,}121{,}140{,}161{,}184{,}209{,}236{,}265{,}296{,}329{,}364{,}401{,}440{,}481$

Nota: Se toma solo una vez los valores de n que se repiten.

Ahora damos valores a $s = 2$, $k = 1$, $n = 2x^2 - 3x + 82 < 481$

$$-13 \leq x \leq 14$$

Obtenemos:

$n = 81, 82, 84, 87, 91,96, 102, 109, 117, 126, 136, 147,159, 172, 186,201, 217, 234, 252, 271,$

$$291,312, 334,357, 381, 406, 432, 459$$

Continuamos con $s = 3$, $k = 1$ $n = 3x^2 - 4x + 123 < 481$

$$-10 \leq x \leq 11$$

Obtenemos: $n = 122,123,127,130, 138,143,155,162,178,187, 207,218, 242,$ $255, 283, 298, 330, 347, 383, 402, 442, 463.$

Continuamos con $s = 4$, $k = 1$, $n = 4x^2 - 5x + 164 < 481$

$$-8 \leq x \leq 9$$

$n = 163,164, 170,173, 185, 190, 208, 215, 239, 248, ,278, 289, 325, 338, 380, 395, 443, 460.$

Continuamos con $s = 5$, $k = 1$, $n = 5x^2 - 6x + 205 < 481$

$$-6 \leq x \leq 8$$

$n = 204, 205, 213, 216, 232, 237, 261, 268, 300, 309, 349, 360, 408, 421, 477.$

Continuamos con $s = 6$, $k = 1$, $n = 6x^2 - 7x + 246 < 481$

$$-5 \leq x \leq 6$$

$n = 245, 246,256,259, 279,284,314, 321, 361,370, 420, 431.$

Continuamos con $s = 7$, $k = 1$, $n = 7x^2 - 8x + 287 < 481$

$n = 286, 287, 299, 302, 326, 331, 367, 374, 422, 431.$

$$-4 \leq x \leq 5$$

Continuamos con $s = 8$, $k = 1$, $n = 8x^2 - 9x + 328 < 481$

$$-3 \leq x \leq 4$$

$n = 327, 328, 342, 345, 373, 378, 420, 427$

Continuamos con $s = 9$, $k = 1$, $n = 9x^2 - 10x + 369 < 481$

$$-3 \leq x \leq 4$$

$n = 368, 369, 385, 388, 420, 425, 473, 480$

Continuamos con $s = 10,\ k = 1,\ \ n = 10x^2 - 11x + 410 < 481$

$$-2 \leq x \leq 3$$

$n = 409,410, 428, 431, 467, 472$

Continuamos con $s = 11,\ k = 1,\ \ n = 11x^2 - 12x + 451 < 481$

$$-1 \leq x \leq 2$$

$n = 450, 451, 471,474$

Continuamos con $s = 2,\ k = 2,\ \ n = 6x^2 - 11x + 249 < 481$

$$-5 \leq x \leq 7$$

$n = 244, 249, 251,266,270,295, 301,336, 344,389,399,454, 466.$

Continuamos con $s = 2,\ k = 3,\ n = 10x^2 - 19x + 416 < 481$

$$-1 \leq x \leq 3$$

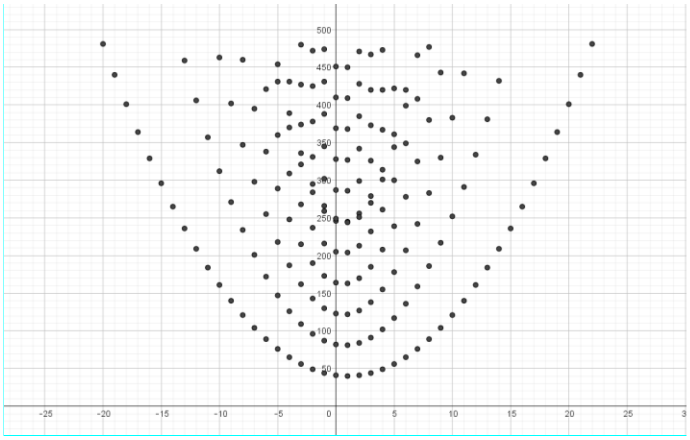
$n = 407, 416,418, 445, 449.$

Para otros casos se obtiene números repetidos y para valores más grandes se pasa de 481.

La gráfica de los n que generan números primos compuestos en $P(n) = n^2 + n + 41$ se puede observar en la Figura 2.

Figura 2

Gráfica de los n que generan números primos compuestos



En total obtenemos los valores para n:

40,41,44,49,56,65,76,81,82,84,87,89,91,96,102,104,109,117,121,122,123,126,127130,136, 138,140,143,147,155,159,161,162,163,164,170,172,173,178,184,185,186187,190,201,204, 205,207,208,209, 213,215,216, 217, 218,232, 234, 236, 237, 239, 242,244,245,246,248,249, 251, 252, 255, 256, 259, 261, 265, 266, 268, 270, 271, 278, 279, 283, 284, 286, 287, 289, 291, 295, 296, 298, 299, 300, 301, 302, 309, 312, 314,321,325326,327, 328, 329,330,331,334,336, 338,342,344,345, 347,349,357, 360, 361,364, 367,368, 369,370, 373, 374,378,380,381,383,385,388,389, 395,399,401,402, 406,407, 408, 409, 410, 416, 418, 420, 421, 422, 425, 427,428, 431, 432, 440, 442, 443,445, 449, 450, 451,454, 459, 460, 463, 466, 467,471, 472, 473,474, 477, 480, 481

En total 167 valores de n, que al evaluarlos en $P(n) = n^2 + n + 41$ obtenemos números compuestos.

Cribando estos números, obtenemos:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37,38,39,42,43,45,46,47,48,50,51,52,53,54,55,57,58,59,60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72,73,74,75,77,78,79, 80, 83, 85, 86, 88,90, 92,93,94, 95, 97, 98, 99, 100,101,103,105,106,107,108,110,111,112,113,114,115,116,118,119,120,124,125,128,129, 131,132,133,134,135,137,139,141,142,144,145,146,148,149150,151,152,153,154,156,157, 158,160,165,166,167,168,169,171,174,175,176,177,179,180,181,182,183,188,189,191,192, 193,194,195,196,197,198,199,200,202,203,206,210,211,212,214,219,220,221,222,223,224, 225,226,227,228,229,230,231,233235,238,240,241,243,247,250,253,254,257,258,260,262, 263,264, 267, 269, 272, 273, 274,275,276,277,280,281,282, 285, 288, 290,292,293,294, 297, 303, 304, 305,306, 307,308,310,311, 313, 315,316,317,318,319,320, 322,323, 324,332, 333, 335,337, 339,340, 341, 343,346, 348, 350,351, 352, 353, 354, 355, 356, 358, 359, 362, 363,365,366,371, 372,375,376,377,379, 382,384,386,387,390, 391,392, 393, 394, 396, 397, 398, 400, 403, 404, 405, 411, 412, 413, 414,415, 417, 419, 423, 424, 426, 429,430,433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 441, 444, 446, 447, 448, 452, 453, 455, 456, 457, 458, 461, 462, 464, 465, 468, 469, 470, 475, 476, 478, 479.

En total 315 valores de n que al evaluarlos en $P(n) = n^2 + n + 41$ siempre se obtiene un número primo. Estos números primos son:

41,43,47,53,61,71,83,97,113,131,151,173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523,1601, 1847, 1933, 2111, 2203, 2297, 2393, 2591, 2693, 2797, 2903, 3011, 3121, 3347, 3463, 3581, 3701, 3823, 3947, 4073, 4201, 4463, 4597, 4733, 4871, 5011, 5153, 5297, 5443, 5591, 5741, 6047, 6203, 6361, 6521, 7013, 7351, 7523, 7873, 8231, 8597, 8783, 8971, 9161, 9547, 9743, 9941, 10141, 10343, 10753, 11171, 11383, 11597, 11813, 12251, 12473, 12697, 12923, 13151, 13381, 13613, 14083, 14321, 14561, 15541, 15791, 16553, 16811, 17333, 17597, 17863, 18131, 18401, 18947, 19501, 20063, 20347, 20921, 21211, 21503, 22093, 22391, 22691, 22993, 23297, 23603, 23911, 24533, 24847, 25163, 25801, 27431, 27763, 28097, 28433, 28771, 29453, 30491, 30841, 31193, 31547, 32261, 32621, 32983, 33347, 33713, 35573, 35951, 36713, 37097, 37483, 37871, 38261, 38653, 39047, 39443, 39841, 40241, 41047, 41453, 42683, 44351, 44773, 45197, 46051, 48221,48661, 49103, 49547, 49993, 50441, 50891, 51343, 51797, 52253, 52711, 53171, 53633, 54563, 55501, 56923, 57881, 58363, 59333, 61297, 62791,64303, 64811, 66347, 66863, 67901, 68947, 69473, 70001, 71597, 72671, 74297, 74843, 75391, 75941, 76493, 77047, 78721, 79283, 79847, 81551, 83273, 84431, 85597, 86183, 86771, 88547, 92153, 92761, 93371, 93983, 94597, 95213, 96451, 97073, 98323, 99581, 100213, 100847, 101483, 102121, 102761, 104047, 104693, 105341, 110597, 111263, 112601, 113947, 115301, 115981, 116663, 118033, 120103, 121493, 122891, 123593, 124297, 125003, 125711, 126421, 127133, 127847, 128563, 129281, 131447, 132173, 133631, 134363, 138053, 138797, 141041, 141793, 142547, 144061, 146347, 147881, 149423, 150197, 152531, 153313, 154097, 154883, 155671, 157253, 158047, 158843, 160441, 162853, 163661, 164471, 169373, 170197, 171023, 171851, 172681, 174347, 176021, 179393, 180241, 181943, 184511, 185371, 187963, 188831, 189701, 190573, 191447, 192323, 193201, 194963, 197621, 199403, 200297, 201193, 204797, 205703, 207521, 208433, 209347, 210263, 213023, 213947, 215801, 216731, 219533, 220471, 221411, 226141, 227093, 229003, 229961.

O sea desde $n = 0, hasta\ \ n = 481$ el 34,65% de los valores de $n,$ generan números compuestos al evaluarlos en el polinomio de Euler y el 65,35% son número primos.

En esta criba el número primo más pequeño es $p(0) = 0^2 + 0 + 41 = 41$ y el más grande es $P(479) = 479^2 + 479 + 41 = 229961$

Nota. Las fórmulas aquí publicadas nos permite encontrar números primos muy grandes, o números compuestos que son el producto de números primos grandes, útiles en la criptografía. Las fórmulas pueden ser la fundamentación matemática para desarrollar programas informáticos o Software que sean utilizados en la protección de información, necesaria a nivel personal como a nivel mundial.

Referencias bibliográficas

Aznar, E. (2007). *Leonhard Euler Matemático (1707 Basilea, Suiza, 1783 San Petersburgo, Rusia)*. https://www.ugr.es/~eaznar/euler.htm

Camacho, J. y Camacho, O. (2020). *Dos Científicos Bajo Un Fresno: Un Viaje A La Ciencia En Doce Escritos*. Google Books.

Fernández, T. y Tamaro, E. (2004). *Adrien-Marie Legendre*. https://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/legendre.htm

Frases y Pensamientos. (s.f.). *Frases de números primos*. https://www.frasesypensamientos.com.ar/frases-de-numeros-primos.html