

## Tareas y estrategias metodológicas para plantear problemas de modelización matemática

Karen Porras Lizano

Universidad Nacional, Ministerio de  
Educación Pública, Costa Rica  
Karen.porras.lizano@una.ac.cr

Gilberto Chavarría Arroyo

Universidad Nacional, Costa Rica  
gilberto.chavarría.arroyo@una.ac.cr

**Resumen:** La actividad de inventar o plantear problemas matemáticos forma parte integral del proceso de modelización matemática y es considerada, por algunos investigadores, de gran importancia dentro de la experiencia matemática de los estudiantes. No obstante, sigue siendo una práctica poco explorada en las clases de matemática y que presenta dificultades para los profesores, ya que se requiere crear tareas y utilizar estrategias metodológicas adecuadas según este enfoque. Por tanto, en este trabajo brindamos una propuesta de tarea donde se estimula el planteamiento de un problema de modelización matemática, puede servir como ejemplo para ser llevada al aula. Al mismo tiempo, en concordancia con lo propuesto en los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública, permite acercar las matemáticas a los estudiantes, motivarlos y potenciar capacidades cognitivas superiores.

**Palabras clave:** Planteamiento de problemas, modelización matemática, educación secundaria.

### 1. Introducción

En una sociedad globalizada y ante un continuo avance de la tecnología de la información y comunicación, las generaciones de jóvenes enfrentan impredecibles cambios que deben aprender a afrontar. En consecuencia, los sistemas educativos en todo el mundo deben ir de la mano con este proceso vertiginoso de prioridades cambiantes, donde las estrategias de enseñanza y aprendizaje están influenciadas por este contexto (Singer et al., 2015). Como práctica de aprendizaje y pensamiento, el planteamiento de problemas puede desempeñar un papel fundamental en este proceso, proporcionando oportunidades para construir significados de forma activa, al mismo tiempo que los profesores y estudiantes pueden crear conocimiento juntos en una variedad de contextos y generar y abordar preguntas críticas sobre el conocimiento que se construye.

Por otra parte, desde la antigüedad, la modelización matemática ha sido de gran importancia por generar beneficios en la vida del ser humano, permitiendo observar la conexión entre la matemática y la realidad cotidiana de esta (Castro y Castro, 1997; Lombardo y Jacobini, 2008). En la matemática escolar, la modelización involucra entornos reales, físicos, sociales y culturales, generando espacios de reflexión y análisis. En ellos se fomenta la construcción y comprensión de los conceptos por parte del estudiante, incentivando al mismo tiempo,

habilidades de gran potencial como la imaginación, la creatividad o la invención (English y Sriraman, 2010; Lesh y English, 2005; López, Molina y Castro, 2017).

En este trabajo, consideramos que el planteamiento de problemas forma parte integral del proceso de modelización matemática, desarrollándose dentro de sus fases (Hansen y Hana, 2015). Es decir, el problema y su construcción constituye parte fundamental del proceso de modelización, dado que la creación de un modelo matemático requiere de un mecanismo de ajuste y reformulación continua del problema principal. Además, durante el proceso de modelización se pueden formular conjeturas, realizar un seguimiento y revisión de las preguntas del problema, al mismo tiempo que se adquiere una posición crítica hacia el modelo matemático y sus resultados (Hansen y Hana, 2015).

## **2. Planteamiento de problemas en el proceso de modelización matemática**

En Costa Rica, la enseñanza de la modelización matemática se está promoviendo desde el año 2012, con la implementación del plan de estudios de matemática desde los niveles de educación primaria hasta los niveles de educación secundaria por parte del Ministerio de Educación Pública (2012). En este documento, una de las modificaciones fue la inclusión de la modelización matemática como parte fundamental del currículo relacionando este proceso con el planteamiento de problemas. Asimismo, la creación de problemas no es un mecanismo nuevo, se viene desarrollando desde hace varias décadas atrás, con diversas conceptualizaciones: formulación (Kilpatrick, 1987), generación (Silver y Cai, 1994), planteamiento (Brown y Walter, 1990) e invención (Castro, 2008).

Además, en la investigación actual de la modelización matemática existen muchas perspectivas teóricas que describen este proceso, pero sin consenso alguno. Sin embargo, coinciden en que su objetivo principal es permitir la traducción de la realidad a una estructura matemática (Rico, 2009). En particular, Galbraith y Stillman (2006) plantean cinco transiciones en las cuales se construye el conocimiento matemático durante el proceso de modelización matemática: (a) De la situación desordenada del mundo real a la declaración del problema del mundo real, (b) De la declaración de problemas del mundo real al modelo matemático, (c) Del modelo matemático a la solución matemática, (d) De la solución matemática al significado de la solución en el mundo real y (e) Desde el significado de la solución en el mundo real hasta la revisión del modelo o la solución de aceptación.

En la primera transición, de la situación desordenada del mundo real a la declaración del problema del mundo real, es donde se realiza el proceso de planteamiento del problema, creando los primeros borradores de este, tomado en cuenta elementos de gran importancia como lo es el contexto, condiciones relevantes y los elementos correctos de las entidades estratégicas (Hansen y Hana, 2015). Es decir, es el proceso donde el estudiante construye su propio problema, proporcionando un contexto real y matemático, a la vez con un objetivo o interrogante que será contestada durante el proceso de resolución (Ayllón, 2012).

A su vez, la invención de problemas está íntimamente relacionada con la resolución de problemas. En este proceso, el estudiante además de inventar el problema, estructura y construye la solución del problema, elabora un plan estratégico de resolución, formula las

estrategias y representaciones del objeto matemático que utilizará. Involucrando los conocimientos matemáticos que posee, intereses y experiencias personales, es decir, el problema se reviste de significado para el estudiante por ser parte de él y proporcionado a su vez motivación en su aprendizaje. También “cuando un individuo inventa un problema ha alcanzado niveles de reflexión complejos, por tanto, ha llegado a una etapa de razonamiento que hace posible la construcción del conocimiento matemático” (Ayllón, 2012, p. 34), lo que reviste de importancia el trabajar en el aula el planteamiento de problemas.

Silver y Cai (1996), mencionan una serie de beneficios en el aprendizaje del estudiante al enseñar por medio del planteamiento de problemas, entre ellos destacamos los siguientes: incentiva la participación activa del estudiante en su aprendizaje, estimula la creatividad, imaginación y curiosidad, los estudiantes comprenden y analizan mejor los conceptos y los procesos matemáticos, propicia una mejor actitud y disposición hacia la matemática, motiva que los estudiantes sean mejores resolutores de problemas, potencia la autonomía en el aprendizaje de los estudiantes, prepara a los estudiantes para su desempeño personal y profesional futuro fuera de las aulas, reduce la ansiedad y el miedo por las matemáticas, entre otros.

### **3. El papel del profesor en la invención de problemas**

La selección y aplicación de tareas adecuadas por parte del profesor determinan el desarrollo de habilidades necesarias que requiere un buen resolutor. En este sentido, proponemos el potenciar la aplicación del proceso de invención de problemas, a través de abundantes y variadas oportunidades, relacionado con el proceso de resolución de problema con modelización matemática. Al mismo tiempo, se promueve que el estudiante construya habilidades como creatividad, el análisis, la criticidad, perseverancia, entre otros.

Asimismo, autores como Ayllón (2012) realizan una clasificación de tipos de tareas que se pueden trabajar en el proceso de invención de problemas: (a) situaciones libres, (b) situaciones semiestructuradas y (c) situaciones estructuradas. En el primer tipo de tarea, los estudiantes no tienen restricción para formular sus problemas. En el segundo tipo, los estudiantes inventan sus problemas semejantes a otros antes trabajados o que respondan a cierta información o situación proporcionada. El tercer tipo, los estudiantes reformulan un problema o se cambia alguna condición de este, lo cual se puede dar antes, durante o después de la solución. También, se puede dividir el problema inicial en problemas más sencillos.

Con respecto a esto, Ayllón (2012) propone una serie de estrategias que puede utilizar el profesor para realizar el planteamiento de problemas en el aula de matemática, por ejemplo elegir una situación significativa para el estudiante, que genere debate entre los estudiantes y el docente. También estimular el proceso de investigación por parte de los estudiantes antes de formular el problema, además propiciar un espacio en confianza para la formulación de preguntas o conjeturas. Asimismo, se puede utilizar analogías por ejemplo problemas semejantes. Utilizar la estrategia “¿Qué pasaría si?” para cambiar la exigencia o ingresar pequeñas variantes del problema. Al mismo tiempo, la idea de estas estrategias es generar motivación de los estudiantes y propiciar el desarrollo de las habilidades matemáticas.

En resumen, para trabajar el planteamiento de problemas en el aula de matemática, el profesor debe tomar en cuenta los siguientes aspectos para crear sus propias tareas: (a) tipo de tarea, (b) plan de estudios y (c) características propias del estudiante. En el primer aspecto, recomendamos considerar el tipo de tarea que se desea plantear, es decir una situación libre o semiestructurada o estructurada. También las formas de presentar o comunicar la información, las condiciones que debe tener el problema inventado y por último, si se requiere de investigación previa por parte del docente y los estudiantes.

El segundo aspecto es el plan de estudios, aquí debemos considerar el nivel educativo del estudiante, la habilidad matemática y el conocimiento matemático por construir. Además, que el docente debe ser conocedor de los tipos de representaciones matemáticas del objeto matemático que se quiere trabajar con la actividad de planteamiento de problemas.

Por último, recomendamos considerar las características propias del estudiante, por ejemplo, las adecuaciones. Los conocimientos previos, contexto y recursos que posee el estudiante. Además, el docente debe tomar en cuenta los tipos de errores matemáticos que sus estudiantes pueden realizar durante la tarea.

#### **4. Un ejemplo de tarea de planteamiento de problemas**

Con la finalidad de ilustrar las recomendaciones propuestas en el apartado anterior, hemos creado un ejemplo de tarea semiestructurada donde se puede trabajar el proceso de planteamiento de un problema matemático, la cual la exponemos a continuación:

##### **Figura 1**

*Ejemplo de actividad semiestructurada para el planteamiento de problemas*

***Suponga que tienes una empresa, con las características que quieras, la cual produce una serie de productos que puedes comercializar. Con los precios de estos productos, construye un problema de tal manera que involucre a la vez el IVA.***

Se propone una actividad para estudiantes del nivel de sexto año de educación primaria, cuya habilidad a trabajar sería el “plantear y resolver problemas aplicando proporcionalidad directa” y desarrollando conocimientos matemáticos como razón, proporción directa, porcentaje y regla de tres. Sin embargo, la actividad también se puede adaptar al nivel de séptimo año de educación secundaria, cuya habilidad a trabajar es “analizar relaciones de proporcionalidad directa e inversa de forma verbal, tabular, gráfica y algebraica” y cuyos conocimientos matemáticos a desarrollar serían los tipos de representaciones del tipo verbal, tabular, gráfica y algebraica.

Dicha actividad requiere de una investigación previa por parte del profesor, dado que se necesita tener conocimientos con respecto al Impuesto de valor agregado (IVA). Además, fue revisada y validada por los dos investigadores y por una maestra del nivel de primaria. Posteriormente, se realizó una prueba piloto con un estudiante del nivel de sexto año de educación privada. Sin embargo, este tipo de actividad se puede llevar a cabo en educación pública. En la Figura 2 se muestra el resultado de la invención del estudiante que participó en la prueba piloto.

**Figura 2**

*Creación de un menú de café como simulación de una empresa*

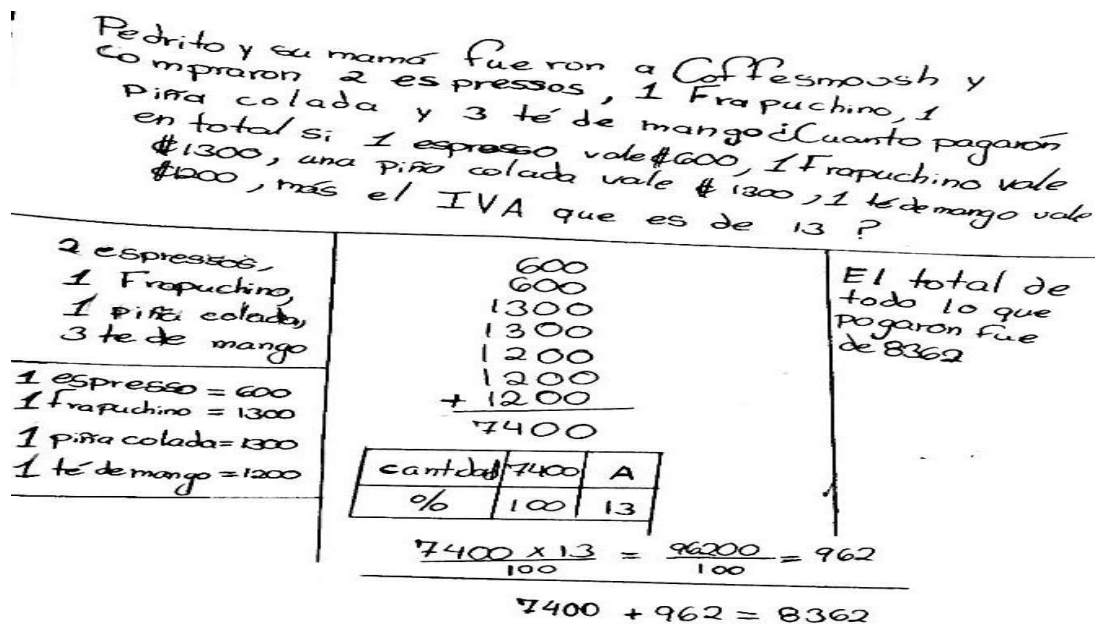


En la figura anterior, se muestra como el estudiante fue capaz de crear un menú de café para simular su propia empresa. Para esto, previamente el estudiante realizó una indagación del tipo de empresa que quería inventar, además de los productos y precios sin el IVA que quería comercializar. En esta actividad se involucraron tópicos de Estudios Sociales, tales como impuesto directos e indirectos, los tipos de productos que son grabados y su respectivo porcentaje de impuesto, logrando que la actividad sea interdisciplinaria. Asimismo, se puede involucrar otras materias del nivel de primaria como lo son los idiomas, español o inglés, como se observa en la Figura 2. Luego, realizó la creación de su propio problema imaginando una situación que se podría dar en la vida real con su empresa. En la siguiente figura, se expone la invención del estudiante.



**Figura 3**

*Ejemplo de problema inventado por estudiante con su propia empresa*



En cuanto al proceso de modelización aplicado el estudiante relacionado con el planteamiento del problema se pudo observar que aplicó las cinco transiciones propuestas por Galbraith y Stillman (2006). Es decir, en primer lugar, comienza con una situación desordenada, el crear la empresa y proponer los productos que desea comercializar, ordena y organiza la información concibiendo el problema y al mismo tiempo formula un plan estratégico, para obtener la solución. En el problema se visualiza los personajes es una familia y plantea una situación cotidiana que se puede dar en la vida real si la empresa fuera verdadera.

En la segunda transición, el estudiante organiza la información de tal manera que logra generar un modelo matemático, esto lo observamos en la figura 3, en el ordenamiento inicial de los precios que utilizara posteriormente en una operación básica aritmética. Como tercera transición, se obtiene que el estudiante elabora la solución matemática, para ello suma todos precios para obtener la cantidad total que se le debe cobrar a la familia sin incluir el IVA, utilizando para esto un tipo de representación simbólico numérico. Posteriormente utiliza la regla de tres por medio de una representación tabular para calcular el 13% del IVA por ser un servicio y realiza el cálculo utilizando nuevamente el sistema de representación simbólico numérico. El monto que obtiene por 13% es adicionado al resultado de la suma de los precios del primer paso. Luego, se observa que brinda una respuesta a la luz de las condiciones del problema dotando de significado de la solución en el mundo real. Por último, realiza una revisión de todos los procesos matemáticos realizados para obtener y aceptar la solución final del problema.

Por otra parte, al ser la empresa de la propia autoría del estudiante, se evidencia sus interés y experiencias personales, por lo que el problema representa para este una situación significativa. Además, en aula puede generar debate entre los mismos estudiantes y el profesor, utilizando la estrategia “¿Qué pasaría sí?” para cambiar la cantidad de integrantes de la familia, cambiar los productos, guiar al estudiante en el pensamiento de que otros impuestos se involucran la situación, entre otras variantes.

## 5. Conclusiones

El planteamiento de problemas como herramienta pedagógica y como parte integral de la modelización matemática ha tomado auge desde finales del siglo XX. El reto de los docentes en nuestros días consiste en conocer la realidad de los estudiantes y aprovechar los recursos del entorno para proponer tareas que les permitan a sus alumnos inventar problemas matemáticos. Las estrategias y la tarea propuesta que se proponen en este trabajo constituyen un esbozo de algunas diferentes formas de presentar y trabajar situaciones cotidianas que ofrece oportunidades y desafíos para la aplicación de modelos matemáticos relacionado con el planteamiento de problemas.

Esta área de investigación requiere más estudios que permitan profundizar sobre las bondades y retos de implementar la invención de problemas en el aula. Con todo, se vislumbran algunas oportunidades de oro en la combinación de planteamiento de problemas y modelado matemático en contextos escolares.

## Referencias bibliográficas

- Ayllón, M. F. (2012). *Invencción-Resolución de problemas por alumnos de Educación Primaria* [Tesis de Doctoral, Universidad de Granada].
- Brown, S. y Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. Lawrence Erlbaum Associates
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización en L. Rico (Ed.), *Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Horsori.
- Castro, E (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España en R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- English, L. y Sriraman, B. (2010). Problem Solving for the 21st Century en B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education, Advances in Mathematics Education* (pp. 503-506). Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-00742-2\_27
- Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 143–162.

- Hansen, R. y Hana, G. M. (2015). Problem Posing from a Modelling Perspective en F.M. Singer, N.F. Ellerton, J. Cai. (Eds.), *Mathematical Problem Posing. From research to effective practice* (pp. 35-46). Springer
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? en A. Shoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp 123-148).Lawrance Erlbaum Associates.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving en R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 203-204). Lawrence Erlbaum Association.
- Lesh, R. y English, L. (2005). Trends in the evolution of models y modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(6), 487-189. <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm056a5.pdf>
- Lombardo, D. H. y Jacobini, O. R. (2008). Mathematical Modeling: From Classroom to the real world en M. Blomhøj, S. Carreira (Eds), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*. (pp.35-46). Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical.
- López, R., Molina, M. y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de ingeniería: un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. *PNA*, 11(2), 75-96. <http://hdl.handle.net/10481/44147>
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. Costa Rica
- Rico, L. (Ed.) (2009). *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*. Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación.
- Silver, E. A. y Cai. J. (1996). An Analysis of arithmetic problema posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.
- Singer, F. M., Ellerton. N. F. y Cai, J. (2015). *Mathematical Problem Posing. From research to effective practice*. (1era ed.). Springer