

Resolución de problemas de probabilidad condicional: un estudio en docentes de educación media chilenos

Álvaro Toledo San Martín

alvaro.toledo@ubo.cl., Universidad Bernardo O'Higgins, Chile

Tema: Pensamiento probabilístico – estadístico

Modalidad: comunicación breve

Nivel educativo: secundario

Resumen: *En este estudio se presentan los resultados de una investigación sobre la resolución de problemas de probabilidad condicional realizada por 40 profesores de matemáticas de educación media (secundaria) de distintos establecimientos educativos chilenos. Las preguntas planteadas abordan problemas relacionados con el condicionamiento y la temporalidad (falacia temporal), el problema del condicionamiento y la causalidad (falacia de la causalidad) y situaciones diacrónicas. Los resultados principales revelan que los docentes enfrentan dificultades en la resolución de problemas con situaciones diacrónicas, ya que solo obtuvieron un 25% de respuestas correctas. Esto contrasta con el 70% de respuestas correctas en el problema con falacia de la causalidad y el 85% de respuestas correctas en el problema con falacia temporal. Estas diferencias en los porcentajes podrían indicar una brecha en la comprensión de los docentes en términos de la aplicabilidad de los conceptos en diferentes contextos y escenarios dentro de los problemas de probabilidad condicional. Los resultados de este estudio evidencian las dificultades que los profesores de matemáticas de educación media enfrentan al resolver problemas de probabilidad condicional. Estos hallazgos pueden contribuir al desarrollo de intervenciones pedagógicas más efectivas que mejoren la calidad de la educación en matemáticas en el nivel de educación media.*

Palabras claves: *resolución de problemas de probabilidad condicional, condicionamiento y temporalidad, condicionamiento y causalidad, probabilidad con situaciones diacrónicas.*

Introducción

El estudio de la probabilidad condicional ha sido un tema de interés para investigadores durante las últimas décadas. De acuerdo con De la Fuente y Díaz (2004) “La probabilidad condicional es fundamental en las aplicaciones de la Estadística porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información”. (p.245). Existe una amplia literatura respecto a la comprensión de la probabilidad condicional. En Díaz y Batanero (2005), por ejemplo, se aborda el concepto de probabilidad condicional desde la mirada de los textos

universitario, en Fernández (2004), Roh (2008) y Zazkis y Leikin (2008) se evalúa la comprensión del concepto de probabilidad y probabilidad condicional en docentes y estudiantes de distintos niveles. Por otra parte, Huerta y Arnau (2017) estudian las relaciones entre las probabilidades condicionales y conjuntas en el proceso de resolución de problemas escolares desde una perspectiva educativa.

Si bien, el conocimiento de la probabilidad condicional es requisito para la comprensión y resolución de problemas de Inferencia Bayesiana, Test de Hipótesis (cálculo de valor- p y errores tipo I y II, además de la confianza y la potencia de la prueba), Modelos Lineales e inclusive en algoritmos de clasificación en Aprendizaje Automático existen dificultades asociadas a la resolución de estos problemas. Autores como Contreras (2011) señalan que la probabilidad condicional es posiblemente uno de los temas estadísticos más relevantes, pero a la vez, es el más complejo de comprender para estudiantes, docentes e investigadores. Entre las dificultades más habituales en la resolución de problemas de probabilidad condicional se encuentran aspectos como: la comprensión de los conceptos de probabilidad marginal, conjunta y condicional (Borovcnik, 2012, Contreras et al., 2013, Toledo, 2016, Sneyd et al., 2022), la identificación de eventos independientes (D'Amelio, 2004, Kataoka et al., 2010), la notación y simbología empleada para denotar las probabilidades (Feller, 1973, Sánchez, 2000) y dificultades relacionadas con falacias, tales como, la falacia temporal presentada por Gras y Totohasina (1995), la falacia de la causalidad estudiada en Kahneman et al. (1982) y las confusiones entre situaciones diacrónicas y sincrónicas revisadas en De la Fuente y Díaz (2004). Siguiendo esta línea, en este estudio se presentan los resultados obtenidos por docentes de enseñanza media (secundaria) respecto a preguntas relacionadas con probabilidad condicional, en específico, se pretende mostrar si existen dificultades al responder preguntas de probabilidad condicional que abordan los problemas asociados a la falacia temporal, la falacia de la causalidad y los enunciados de tipo sincrónicos y diacrónicos.

Marco teórico

El estudio se centra en la resolución de tres problemas de probabilidad condicional: un problema sobre condicionamiento y temporalidad, un problema sobre condicionamiento y causalidad y un problema sobre una situación diacrónicas. A continuación, se describen cada una de las problemáticas:

Condicionamiento y temporalidad (falacia temporal): Gras y Totohasina (1995) denominan a este fenómeno la concepción cronológica en donde se considera la probabilidad condicional $P(A/B)$ como una relación temporal, en donde el evento condicionante B siempre precede al evento A, es decir, el suceso condicionante en la probabilidad condicional ha de preceder temporalmente al condicionado. Esto es una falacia debido a que la probabilidad condicional no exige temporalidad entre el evento condicionante y condicionado, es más, teniendo la información adecuada estos problemas pueden resolverse utilizando el Teorema de Bayes.

Ejemplo. Problema 6, parte 2 adaptado del artículo de Falk (1986):

Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? (p. 292)

Si se analiza la pregunta, el evento condicionante ocurre posterior (en el eje temporal) al evento condicionado. Desde un punto de vista cronológico no tendría sentido la pregunta debido a que, nos condicionan el evento inicial “extraer en primer lugar una bola negra” a uno posterior “sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar”. Aunque parezca contraintuitivo, en inferencia bayesiana el evento “obtener una bola negra en segundo lugar” influye sobre las extracciones de la urna, ya que, nos dice que de las cuatro esferas del problema (2 negras y 2 blancas) la segunda esfera debe ser negra, es decir, esta esfera se “reserva” a la segunda extracción (recordar que las extracciones son sin reposición) entregándonos la información de que en la primera extracción podemos obtener dos casos de tres en donde se extrae una bola blanca y un caso de tres donde se obtiene una bola negra, siendo esta última la respuesta a la pregunta.

Condicionamiento y causalidad (falacia de la causalidad): “La causalidad es un concepto científico, filosófico y psicológico complejo. Por otro lado, es también un concepto intuitivamente comprendido y aceptado por las personas” (De la Fuente y Díaz, 2004, p.4). Las relaciones causa-efecto son parte de la experiencia y nos permiten entender nuestro entorno y construir nuestro conocimiento del mundo. Pese a esto, en problemas de probabilidad existen confusiones respecto a las relaciones de tipo causales y las dependientes. Adicional a esto, autores como Kahneman et al. (1982) identificaron

en sus estudios que para la mayoría de las personas las relaciones de tipo causales son más probables que las relaciones diagnósticas.

Ejemplo. Problema 5, adaptado del artículo de Pollatsek et al. (1987):

¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?

- a) Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules.
- b) Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules.
- c) Los dos sucesos son igual de probables. (p. 256)

Tversky y Kahneman (1982) muestran que, si bien la mayoría de las personas responden correctamente a la pregunta (la alternativa c) hay una cantidad importante de individuos que seleccionan la alternativa a), es decir, asignan una mayor probabilidad a un evento causal (la hija tiene los ojos azules causa de que la madre tiene los ojos azules) que a un evento diagnóstico (la madre debe tener los ojos azules porque al ver a su hija, ésta tiene los ojos azules).

Por otra parte, autores como Douven (2016) y Skovgaard-Olsen et al. (2016) analizan este tema desde un punto de vista epistemológico mencionando la medida denominada asertividad (Shep, 1958) como una medida de referencia sobre la inclinación hacia un tipo de respuesta en problemas de probabilidad condicional. Los autores observaron una correlación importante especialmente en condicionales de tipo diagnósticas. Para profundizar sobre este tema se sugiere fuertemente el artículo de Van Rooij y Schulz (2019) quienes tratan detalladamente este tema.

Situaciones diacrónicas y sincrónicas: la dificultad del desarrollo de las tareas de probabilidad condicional puede deberse a si se percibe o no el experimento compuesto como una serie de experimentos simples sucesivos (De la Fuente y Díaz, 2004). En las situaciones diacrónicas (dinámicas) hay una secuencia temporal en donde se realiza un experimento detrás de otro, en cambio, en situaciones sincrónicas (estáticas) la realización de los experimentos es simultánea. En este estudio se abordaron las situaciones diacrónicas con el fin de observar el planteamiento de probabilidad condicional que se deriva del problema.

Ejemplo: Problema 10. Adaptado de Ojeda (1995):

En una urna hay dos bolas blancas y dos bolas negras. Tomamos una bola blanca de la urna y sin reemplazarla tomamos una segunda bola al azar de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca? (p. 41)

A continuación, se detalla el método del estudio, las tareas y procedimientos y los resultados relevantes.

Método

Muestra

La muestra corresponde a 40 profesores de educación media (secundaria) chilenos de distintos establecimientos educacionales del país.

Tareas y procedimientos

A cada docente se le proporcionó un cuestionario de 13 preguntas relacionadas con problemas de probabilidad. Para este estudio se reportarán los resultados del problema 5 (que aborda el problema de la falacia de la causalidad), el problema 6 (que aborda el problema de la falacia temporal) y el problema 11 (que aborda el problema de las situaciones diacrónicas) los cuales tributan a las problemáticas descritas en el marco teórico. A continuación, se presentan los enunciados de las preguntas del estudio y sus respectivas respuestas.

Problema 5 *¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?*

- a) *Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules.*
- b) *Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules.*
- c) *Los dos sucesos son igual de probables. (respuesta correcta)*

Problema 6. *La probabilidad de que llueva hoy es de 0,4 y la probabilidad de que llueva mañana dado llovió hoy es de 0,6, por otra parte, la probabilidad de que llueva mañana dado que hoy no llovió es de 0,3 ¿Cuál es la probabilidad de que llueva hoy si se sabe que lloverá mañana?*

Solución:

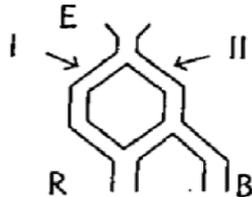
Sean los eventos:

H: llueve hoy

M: lloverá mañana

$$P(H|M) = \frac{P(M|H)P(H)}{P(M)} = \frac{P(M|H)P(H)}{P(M|H)P(H) + P(M|H^c)P(H^c)} = \frac{0,6 \cdot 0,4}{0,6 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,6} = 0,57$$

Problema 11. Una esfera se suelta por la entrada E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?



Solución:

Sean los eventos:

I: la esfera pasa por el canal I

II: la esfera pasa por el canal II

R: la esfera sale por R

$$P(I|R) = \frac{P(I \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|I)P(I)}{P(R|I)P(I) + P(R|II)P(II)} = \frac{1 \cdot 0,5}{1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5} = \frac{2}{3} = 0,67$$

Resultados

En la Tabla 1 se resumen los resultados de respuestas correctas, incorrectas u omisiones obtenidos para los problemas seleccionados. Como observaciones se tiene que tanto para los casos de las preguntas que abordan la falacia de la causalidad y la falacia temporal se obtuvieron porcentajes destacables de respuestas correctas (70% y 85% respectivamente). Para la pregunta que aborda la falacia temporal (problema 6), si bien, existen pocos casos con respuestas incorrectas, en casi todos estos, quienes respondieron indicaron que no tenía lógica (Figura 1) debido a que se preguntaba un evento pasado condicionado a uno futuro. En el problema 5 (falacia de la causalidad) no se observan detalles debido a que el tipo de respuesta era con alternativa y ninguno de quienes respondieron esta pregunta indicó el detalle sobre el razonamiento para llegar a la respuesta seleccionada.

*La pregunta carece de lógica.
No se puede resolver.*

Figura 1. Ejemplo de solución incorrecta al problema 6, docente 2

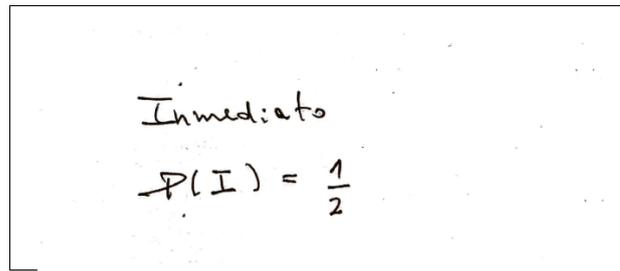


Figura 2. Ejemplo de solución incorrecta al problema 11, docente 17

Para la pregunta 11, que aborda las situaciones diacrónicas, se obtuvo un 62,5% de respuestas incorrectas. En la mayoría de los casos, específicamente en el 80% de las respuestas incorrectas (20 respondientes), al abordar la probabilidad pedida “¿cuál es la probabilidad de que la esfera haya pasado por el canal I?” no consideraron la información que la esfera sale por el canal R (información condicionante) abordando un problema de probabilidad condicional $PI|R$ como un problema de probabilidad marginal PI obteniendo en todos los casos el resultado $PI=0,5$. (Figura 2).

Problema	Tipo de problema	Respondieron correctamente	No respondieron correctamente	Omitieron responder	Porcentaje de respuestas correctas
5	Falacia de la causalidad	28	10	2	70%
6	Falacia de la temporalidad	34	4	2	85%
11	Situación diacrónica	10	25	5	25%

Tabla 1. Resumen de frecuencias y porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y omitidas por tipo de problema.

Como observación, el problema 11 es similar al conocido problema de Monty Hall (problema de las tres puertas, en donde, detrás de una de éstas hay un premio y detrás de las otras dos no hay nada). En este problema, si se ignora la información de que el presentador del *show* (Monty Hall) abre una de las tres puertas (puerta sin premio) posterior a que el concursante ha seleccionado una de las puertas, cuando se da la opción al participante de cambiar la elección de la puerta y se pregunta ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio mayor si se cambia la elección de la puerta? El razonamiento

incorrecto es pensar que como se abrió una de las puertas, la probabilidad de acertar ahora es de $1/2$ (solo quedan dos puertas cerradas y una de ellas tiene el premio) siendo iguales las probabilidades de que el premio esté detrás de la puerta elegida originalmente o detrás de la puerta restante. El razonamiento correcto, en cambio, es observar que el presentador siempre abre una puerta sin premio, por lo que, la probabilidad de que el premio esté en la puerta no seleccionada desde el inicio (puerta no elegida por el participante y no abierta por Monty Hall) ahora es de $2/3$ en comparación con la puerta seleccionada originalmente cuya probabilidad de obtener el premio es de $1/3$ (probabilidad original con las 3 puertas cerradas). La solución poco intuitiva de este problema (al igual que el problema 11) fue explicada por la matemático, literata, escritora y columnista Marilyn Vos Savant en 1990 (Rosenthal, 2008).

Conclusiones

A grandes rasgos se observa que los docentes presentan dificultades en la resolución de problemas con situaciones diacrónicas obteniendo solo un 25% de respuestas correctas. La dificultad en la resolución en estos tipos de problemas se puede deber a representaciones sincrónicas (estáticas) de situaciones diacrónicas (dinámicas). Esto significa que los docentes pueden tener dificultades para visualizar cómo evolucionan las situaciones a lo largo del tiempo, lo que limita su capacidad para comprender y resolver problemas que involucran cambios temporales. Como observación, la mayoría de los docentes no consideró la información de que se sabe que la esfera sale por el canal R (por lo que se ignora que el tipo de probabilidad a resolver es condicional). Esto sugiere una falta de comprensión de conceptos fundamentales relacionados con la probabilidad condicional, lo cual debe ser considerado ya que la probabilidad condicional es un concepto fundamental en la resolución de problemas y en la toma de decisiones.

Por otra parte, para el problema que aborda la falacia de la causalidad el porcentaje de respuesta correctas es de un 70% y para el problema que involucra la falacia temporal el 85% de los docentes respondió correctamente. El porcentaje de respuestas correctas para el caso con falacia temporal podría deberse al planteamiento numérico del problema (no conceptual) lo que lleva al uso directo del Teorema de Bayes evitando el cuestionamiento de la temporalidad de los eventos presentados (un evento pasado está condicionado por uno futuro). Es alentador que los docentes hayan obtenido un porcentaje de respuestas correctas más alto en problemas que involucran la falacia de la causalidad y la falacia

temporal. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el porcentaje de respuestas correctas no es del 100%, lo que indica que aún existe margen de mejora en la comprensión de estos conceptos asociados a falacias en probabilidad condicional.

Cabe señalar que las dificultades en la resolución de problemas por parte de los docentes podrían tener un impacto negativo en la calidad de la enseñanza de los conceptos relacionados. Los estudiantes podrían recibir una instrucción deficiente en temas que involucran cambios a lo largo del tiempo y probabilidades condicionales, lo que podría limitar su comprensión y capacidad para aplicar estos conceptos en situaciones prácticas. Como sugerencia, sería importante brindar a los docentes oportunidades de desarrollo profesional y capacitación en el área de resolución de problemas de probabilidad, abordando las dificultades asociadas a falacias en problemas de probabilidad condicional. Esto podría incluir talleres, cursos o materiales educativos que les permitan mejorar su comprensión de estos conceptos y desarrollar estrategias efectivas para enseñarlos a sus estudiantes. Además, se podría fomentar el uso de enfoques pedagógicos que ayuden a los docentes a visualizar y comprender mejor las situaciones dinámicas, como el uso de representaciones gráficas, simulaciones o ejemplos prácticos

Como línea de acción a futuro se considera la ampliación del estudio de la resolución de problemas de probabilidad condicional en situaciones diacrónicas y sincrónicas, en específico, estudiar el enfoque de aprendizaje de estas situaciones mediante el uso de paradojas, tales como, la paradoja de Monty Hall, la paradoja de Bertrand y la paradoja de la división de la apuesta, entre otras.

Referencias bibliográficas

- Borovenik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. 'Perspectivas múltiples sobre el concepto de la probabilidad condicional'. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2(1), 5-27. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.32>
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. <http://www.ugr.es/~batanero/documentos/contreras.pdf>
- D'Amelio, A. (2004). Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades. En L. Díaz (Ed.), *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (p. 138-144). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- De la Fuente, E. y Díaz, C. (2004). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, (59), 245-260.
- Díaz, C. y Batanero, C. (2005). La probabilidad condicional en los textos de estadística parapsicología. En *Acta del V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Fisem.
- Douven, I. (2016). *The epistemology of indicative conditionals. Formal and empirical approaches*. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9781316275962>
- Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (p. 292 - 297). International Statistical Institute.
- Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. Limusa.
- Fernández, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies. *Primus*, 14(1), 43-54. <https://doi.org/10.1080/10511970408984076>
- Gras, R., y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble*, 15(1), 49 - 95.
- Huerta, M.P. y Arnau, J. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 87 - 106.
<https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.188>
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristics and-Biases*. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511809477>
- Kataoka, V., Hernández, H. y Borim, C. (2010). Independence of events: analysis of knowledge level in different groups of students. En C. Reading (Ed.). *Proceedings of the Eight International. Teaching Statistics*. International Statistical Institute.
- Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255 - 269. [https://doi.org/10.1016/0749-5978\(87\)90015-X](https://doi.org/10.1016/0749-5978(87)90015-X)
- Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*. 69(3), 217-233.
<https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2>

- Rosenthal, J. S. (2008). Monty hall, monty fall, monty crawl. *Math Horizons*, 16(1), 5-7. <https://doi.org/10.1080/10724117.2008.11974778>
- Sánchez, E. (2000). Investigaciones didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad. *Recherches en Didactique Mathématiques*, 20(3), 305-330.
- Shep, M. (1958). Shall we count the living or the dead? *New England Journal of Medicine*, 259, 1210-1214. <https://doi.org/10.1056/NEJM195812182592505>
- Skovgaard-Olsen, N., Singmann, H., y Klauer, K. (2016). The relevance effect and conditionals. *Cognition*, 150, 26-36. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2015.12.017>
- Sneyd, J., Fewster, R. M., y McGillivray, D. (2022). Conditional probability. En *Mathematics and Statistics for Science* (pp. 583-604). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-05318-4_30
- Toledo, Á. (2016). Definición de probabilidad simple y probabilidad condicional: un estudio en alumnos de Ingeniería. *Premisa*, 69, 41-49.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (p. 117-128). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511809477.009>
- Van Rooij, R., y Schulz, K. (2019). Conditionals, causality and conditional probability. *Journal of Logic, Language and Information*, 28, 55-71. <https://doi.org/10.1007/s10849-018-9275-5>
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7>