Un ciclo de Lesson Study en torno a una clase de matemática para la formación en geometría de futuros maestros y profesores de matemática

Fernando Espantoso[1], Jimena Fernández[2], Daniela Pagés[3], Mónica Olave[4]

[1] nanespan@gmail.com. Instituto de Profesores Artigas. Uruguay.

[2] surrumbu@gmail.com. Instituto de Formación Docente de La Costa. Uruguay.

[3] danielapages@gmail.com. Universidad de la República. Uruguay.

[4] monicaolave23@gmal.com. Instituto de Profesores Artigas. Uruguay.

Tema: Investigación didáctica

Modalidad: Conferencia simultánea

Nivel educativo: Superior

Resumen: *Presentamos el reporte de una investigación que se realiza en el marco de un proyecto financiado a través del programa PRADINE (CFE). Esta investigación consiste en la realización de un ciclo del Estudio de Clases, enfocado en la planificación colectiva de una clase para la formación de maestros y de profesores, y su posterior discusión conjunta. En particular, nos centramos en una clase desarrollada a partir de una tarea de final abierto. Utilizaremos el modelo Enseñanza para un sólido entendimiento (TRU) como marco teórico para todas las etapas del ciclo del Estudio de clases. Esta investigación tiene dos objetivos. Por un lado, estudiar el impacto de la implementación de tareas cognitivamente demandantes de geometría, diseñadas colectivamente, en dos grupos de formación docente. En segundo lugar, analizar el proceso reflexivo de los formadores participantes en el trabajo colectivo de planificación y el análisis posterior a la implementación. En esta comunicación presentamos los resultados de la etapa de planificación conjunta de las clases. Estos son: la tarea diseñada, el análisis a priori de las posibles resoluciones de los estudiantes y la planificación detallada de la clase. También presentamos el marco TRU como estructurador de las reflexiones de los formadores participantes.*

Palabras claves: *Estudio de Clases, formación de docentes en matemática, trabajo colaborativo, desarrollo profesional docente.*

Introducción

Las prácticas docentes habituales no suelen compartirse con los colegas. Si bien las y los docentes, en un centro educativo, comparten algunos aspectos de su tarea (materiales, acuerdos temáticos para las evaluaciones, entre otros), la planificación de las clases y su gestión quedan reducidas al trabajo en solitario del profesor. Como consecuencia de lo anterior las creencias de cada docente (sobre la matemática, su naturaleza, su enseñanza y su aprendizaje) no son problematizadas. Esto genera una perpetuación de un tipo predominante de clases, que en muchos casos deviene en una clase tradicional en donde el papel del docente es presentar un conocimiento ya construido y acabado y el de las y los estudiantes tomar notas, memorizar definiciones y procedimientos para luego aplicarlos. La investigación en Educación Matemática, en los últimos años, ha enfatizado en el trabajo colaborativo de equipos de docentes (Borko y Potari, 2020; Robutti et al., 2016) como forma de superar el desarrollo profesional individual, y evidenciar sus conocimientos y creencias, para poder problematizarlos.

Por otro lado, desde la investigación se señala que lo que aprenden hoy las y los estudiantes depende en gran medida de las tareas que les fueron propuestas durante su formación. Así, el diseño de tareas es un foco importante en la investigación en Educación Matemática. De acuerdo con Watson y Ohtani (2021), el foco en el diseño de tareas es relevante desde distintas perspectivas.

> Desde una perspectiva cognitiva, el detalle y contenido de las tareas tiene un efecto significativo en el aprendizaje; desde una perspectiva cultural, las tareas moldean la experiencia de los estudiantes con la asignatura y su comprensión de la naturaleza de la actividad matemática; desde una perspectiva práctica, las tareas son el cimiento de la vida de la clase, las 'cosas para hacer'. (p. 3)

A partir de lo anterior, nos enfocamos en la planificación colectiva de una clase para la formación de maestros y de profesores de matemática, y la discusión conjunta posterior a su implementación.

Objetivos y preguntas de investigación

Para la investigación se formularon las siguientes preguntas de investigación:

- ¿En qué medida las tareas cognitivamente demandantes (por ejemplo, de final abierto) potencian un aprendizaje disciplinar sólido y flexible de las y los futuros profesores?
- ¿Qué aporta el proceso colectivo de planificación, implementación y discusión posterior de las clases a las prácticas de las y los formadores participantes?

Para responder a estas preguntas, establecimos los siguientes objetivos.

Objetivo general

Contribuir a la formación de los futuros docentes en el área de matemática, a través de un proceso colaborativo de planificación, implementación y análisis posterior de una secuencia de enseñanza.

Objetivos específicos

1) Estudiar el impacto de la implementación de tareas cognitivamente demandantes de geometría, diseñadas colectivamente, en el aprendizaje de las y los alumnos de dos grupos de formación docente.

2) Analizar el proceso reflexivo de las y los formadores participantes en el trabajo colectivo del diseño de la tarea, la planificación de la clase a implementar y el análisis posterior a la implementación.

En este escrito nos centraremos en las dos primeras fases del ciclo de Estudio de Clases (Lesson Study, en adelante LS) llevado adelante entre formadores de matemática para magisterio y profesorado de matemática. Esto es, la determinación de objetivos de largo plazo y el proceso colectivo de planificación de la clase. Esta se implementó en cursos de profesorado (Geometría I) y de magisterio (Matemática I) del Plan 2008.

Marco conceptual

Con el fin de elaborar las tareas de enseñanza y analizar lo sucedido en las clases utilizamos: los aportes de Zaslavsky (1995, 2008) centrándonos en las tareas de final abierto, y el marco de referencia Teaching for Robust Understanding Project (en adelante TRU) elaborado por Schoenfeld (2016).

Marco TRU

El marco TRU establece que la calidad de los ambientes de aprendizaje depende, en gran medida, del grado en que se les proporcionen a todos los y las estudiantes oportunidades con respecto a cinco dimensiones de un aula matemáticamente poderosa, que describimos a continuación.

Contenidos

Refiere al grado en el cual la actividad en el aula es capaz de proporcionar oportunidades para que las y los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recursos. Las discusiones deberán estar dirigidas a poder aprender ideas, técnicas y perspectivas disciplinares, hacer conexiones y desarrollar hábitos de pensamiento matemático productivo. El contenido matemático que llevamos al aula debe ser preciso, coherente y estar bien justificado.

Demanda cognitiva

Schoenfeld (2016) sostiene que las y los estudiantes aprenden mejor cuando se les desafía de modo que tengan espacio y apoyo para el crecimiento, con tareas que les brinden la oportunidad de confrontar y entender importantes ideas matemáticas y su uso. Tareas que les permitan pensar conceptualmente y los estimulen a hacer conexiones dándoles oportunidades significativas para aprender. La demanda cognitiva describe el nivel de dificultad de la propuesta en relación con lo que el estudiante sabe y del trabajo que le requiere resolver la tarea.

Acceso equitativo al contenido

Ante todo se deben elaborar tareas que inviten y apoyen la participación activa de todas y todos los estudiantes. Para ello el docente debe generar un ambiente de aprendizaje que brinde a las y los estudiantes oportunidades de discutir ideas importantes, que se involucren con el contenido y construyan su entendimiento con base en los conocimientos que traen consigo al aula. Aquí es fundamental que las tareas puedan ser abordadas de diferentes formas para permitir que todas y todos los estudiantes se involucren con el contenido.

Disponibilidad, dominio e identidad

Esta dimensión hace referencia al grado en el que el estudiante tiene oportunidad de hacer matemática y comunicar sus ideas. Las actividades deberán proporcionar al estudiante la oportunidad de contribuir en conversaciones sobre ideas matemáticas, retomar las ideas de otros, y dejar que otros retomen las propias, de manera que contribuya al desarrollo de su disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) y dominio sobre el contenido, identificándose positivamente como aprendiz y pensador.

Evaluación formativa

En este marco se llama evaluación formativa a escuchar la voz de las y los estudiantes y actuar en consecuencia, que involucra tanto a docentes como a estudiantes, en nuestro caso, futuros profesores y maestros.

De acuerdo con la descripción hecha podemos observar los vínculos existentes entre las cinco dimensiones. Escuchar la voz de las y los estudiantes a través de sus aportes y de compartir y criticar ideas en forma conjunta, proporciona información a todas y todos sobre la marcha y el desarrollo de las ideas que se manejan y así poder actuar en consecuencia. Esta evaluación formativa (dimensión 5) permite al o la docente ajustar el nivel de la demanda cognitiva (dimensión 2) y así abre las puertas a la voz de cada estudiante (dimensión 4). A su vez, si el o la docente establece las condiciones que apoyen y alienten a las y los estudiantes a participar y propone tareas que tengan varias puertas de entrada, está ayudando a que el acceso a las ideas y razonamientos matemáticos sean equitativos (dimensión 3). Estos vínculos, que son propiciados por las actividades de clase (tareas, intervención docente, interacciones alumno-alumno y profesor-alumno), se presentan en la figura 1.

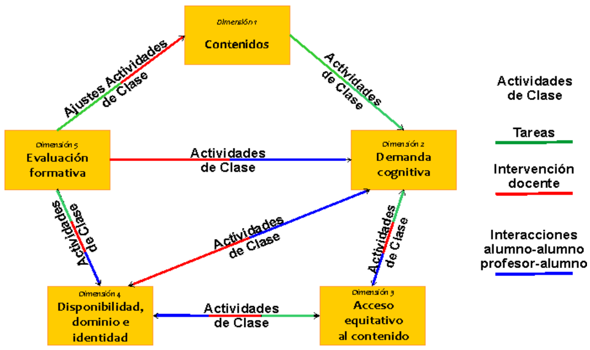

Figura 1: Vínculos entre las cinco dimensiones del marco TRU

Tareas de final abierto

A partir de las consideraciones del marco TRU y de los objetivos de la investigación, hemos visto la necesidad de elaborar tareas para la clase que privilegien las cinco dimensiones antes descritas.

Es por ello que hemos optado por trabajar con tareas de final abierto, es decir, tareas que tengan múltiples soluciones y además, diferentes caminos o formas de resolución, presentadas por Zaslavsky (1995, 2008).

Zaslavsky (2008) destaca que el hecho de que la tarea tenga múltiples respuestas permite que cada estudiante pueda tener algún éxito, esto es, que pueda dar al menos una respuesta correcta trabajando a su manera y a su nivel. Esto lleva a que los y las estudiantes comparen sus respuestas con las de otros compañeros, verifiquen su validez y busquen relaciones entre ellas, pudiendo incluso llegar a generalizaciones. Este tipo de tareas resultan desafiantes, aportan a crear un ambiente de mutua colaboración y promueven la comunicación matemática, así como también otras situaciones deseables de aprendizaje que van en la línea de las planteadas por el marco TRU.

Metodología

Para este estudio utilizamos la metodología del LS, forma de trabajo colaborativo entre docentes e investigadores. Este tiene como principales objetivos el desarrollo profesional de las y los docentes, el mejoramiento de los aprendizajes de las y los estudiantes y el surgimiento de teorías de enseñanza de la matemática (Isoda, 2015). Esta metodología se lleva adelante por ciclos. Cada ciclo consta de cuatro fases principales: la determinación de objetivos de largo plazo, la planificación colectiva de la clase y el diseño de las tareas a presentar, la implementación y observación de la clase, y el análisis, discusión y reflexión de lo sucedido en el aula.

En esta investigación el énfasis principal está en la contribución a la enseñanza de la matemática y en la formación de futuros docentes, a través de un proceso colaborativo de planificación, implementación y análisis posterior de una propuesta de enseñanza. De acuerdo con los lineamientos de LS, hemos determinado como tema de estudio, analizar las formas en que puede promoverse el desarrollo, en las y los futuros docentes, del Conocimiento Matemático para Enseñar (Ball, Thames y Phelps, 2008), en términos generales. Para ello, en este ciclo del LS, hemos optado por diseñar e implementar una tarea de final abierto y desarrollar la clase acorde a las dimensiones del marco TRU.

Planificación colectiva de la clase y las tareas a presentar

El proceso de planificación colectiva se inició con el análisis de las distintas unidades de los programas de los cursos de Geometría I del profesorado de matemática y de Matemática I de magisterio. Además, el equipo analizó documentos provenientes de la investigación en Educación Matemática (vinculados especialmente con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría). Luego nos abocamos a diseñar o seleccionar una tarea para la clase investigativa. Partimos de distintas ideas aportadas por los integrantes del equipo, y finalmente seleccionamos una de las propuestas como base para el diseño. Se dedicaron doce sesiones a todo el proceso de planificación.

El diseño de la tarea y la planificación detallada de la clase implicó considerar, en primer lugar, todas las resoluciones posibles de la tarea por parte de las y los estudiantes, las ideas matemáticas que se pondrían en juego en cada una de ellas. Estas resoluciones posibles nos permitieron imaginar distintos escenarios para la puesta en común, así como pensar las posibles intervenciones docentes. También, decidir qué conocimientos se institucionalizarían durante el trabajo de todo el grupo. Este trabajo de discusión y toma de decisiones se realizó durante doce sesiones, que fueron videograbadas. De ellas surgió la tarea diseñada, que es de final abierto. En la planificación de la clase se trató de privilegiar las cinco dimensiones del marco TRU.

La tarea

Las redes de los arcos de fútbol fueron históricamente diseñadas a partir de una retícula cuadrada.

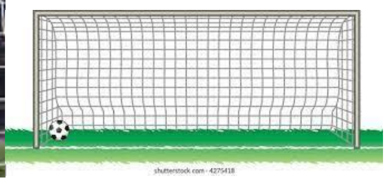

Foto del partido Uruguay y Ghana en la Copa del Mundo de Sudáfrica 2010

1) ¿Qué otros polígonos se pueden utilizar para diseñar una red de un arco de fútbol? Presenta al menos los diseños de dos ejemplos distintos utilizando el mismo polígono, con los que se pueda formar una red. ¿Cómo justificarías que tus diseños realmente funcionan? En otras palabras, ¿por qué la figura que elegiste forma realmente una red?
2) ¿Existe alguna figura con la que no se pueda formar una red? Justifica.

Esta tarea puede ser abordada de diferentes maneras, tiene muchas puertas de entrada lo que puede permitir que el acceso a las ideas y razonamientos matemáticos sean equitativos. Tiene múltiples soluciones, lo que promueve que cada estudiante, desde sus conocimientos, proporcione alguna respuesta y su respectiva justificación. Esto último está en consonancia con la dimensión 3 del marco TRU ya que estaría permitiendo un acceso significativo y equitativo a los conceptos y las prácticas.

A partir de los diseños presentados por las y los estudiantes se pueden inducir propiedades de los polígonos involucrados y permitir que se justifiquen, que se vinculen diferentes tópicos matemáticos, entre otros aspectos de la actividad propia de la asignatura. Estas actividades desarrolladas en el aula pueden ser un gran aporte al enriquecimiento de los conceptos y las prácticas disciplinares disponibles para aprender aspectos vinculados a la dimensión 1 (contenidos).

Esta forma de interactuar en clase nos brinda la oportunidad de escuchar la voz de las y los estudiantes a través de sus aportes, de compartir, aceptar y refutar ideas en forma conjunta. Esto proporciona información a los participantes acerca de la marcha y el desarrollo de las ideas que se manejan, de las diferentes formas de entendimiento que permite al colectivo generar un ambiente empático hacia formas de pensar del otro y así actuar en consecuencia (dimensión 5: la evaluación formativa). Esto último permite al docente, a través de la observación y análisis de las diferentes situaciones que se dan en la clase, secuenciar los contenidos de forma tal que la dificultad vaya de moderada a alta brindando a las y los estudiantes espacio para presentar sus argumentaciones y apoyo para el crecimiento en el pensamiento matemático (dimensión 2: demanda cognitiva, y dimensión 4: disponibilidad, dominio e identidad).

Planificación de la clase

A continuación presentamos la planificación de clase en donde se plantean los objetivos de la misma, el análisis a priori de la tarea que acabamos de presentar, el desarrollo tentativo de la clase y posibles intervenciones docentes.

Tema de la clase: Polígonos y sus propiedades. Clasificación de polígonos.

Objetivo de largo plazo: Que las y los futuros maestros y profesores de matemática desarrollen profundamente el Conocimiento Matemático para Enseñar (Ball et al., 2008).

Objetivos de la clase: Se trabajará para que las y los futuros docentes aborden la tarea planteada desde sus ideas matemáticas, y lleven adelante el desafío de resolverla; descubran que algunas figuras teselan el plano y otras no, y encuentren las condiciones para que esto ocurra; analicen y determinen relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de polígonos, en particular su suma; puedan comunicar sus ideas, en todas las instancias, y las argumenten; sean capaces de rebatir las ideas de sus pares y acepten que los demás discutan las suyas; experimenten un modelo de clase distinto al que posiblemente vivieron en sus experiencias como estudiantes.

Análisis a priori

- Trabajar en base a la visualización y a la medición de los ángulos involucrados, y dar poca fundamentación matemática.

- Considerar triángulos equiláteros: partiendo de saber que cada ángulo mide 60 grados, concluir que con seis triángulos equiláteros iguales conforman 360 grados en un vértice.
- Consideración de “otros” triángulos: podría aparecer la propiedad de la suma de los ángulos interiores.
- Consideración de paralelogramos. Pueden considerar la suma de los ángulos internos, poner en juego las condiciones de paralelismo y las relaciones entre los distintos ángulos entre paralelas (correspondientes, opuestos por el vértice, etc.).
- Utilizar hexágonos regulares. Se puede fundamentar a partir de la configuración con triángulos equiláteros. Podría utilizarse como fundamentación alguna de las isometrías del plano, en especial en el grupo de profesorado.

Nuestra hipótesis es que no se considerarán polígonos no convexos. Se llevarán, para ser usados si es necesario, representaciones de polígonos convexos y no convexos en cartulina.

Para el caso de los no ejemplos (polígonos que no son solución del problema planteado), si algún grupo hubiera considerado un pentágono regular, se analizará ese caso como no solución a la actividad.

Desarrollo tentativo de la clase

Se plantea la actividad para trabajar en grupos de no más de cinco integrantes. Se pedirá a las y los estudiantes que presenten sus ejemplos en un papelógrafo que se les entregará junto con la actividad, para ser expuestos en la puesta en común. Se darán unos minutos para leer la actividad y plantear las dudas iniciales que surjan. Luego se les dejará trabajar. El docente monitoreará cada grupo observando las distintas producciones y evaluando en cada caso si amerita una intervención o no. Este monitoreo servirá para seleccionar y secuenciar la posterior puesta en común.

Posibles intervenciones durante el trabajo en equipos

Si alguien manifiesta conocer GeoGebra y quiere usarlo, se le permitirá. En caso de que las fundamentaciones pedidas se den en base a la manipulación de las figuras, o la medición, sin argumentos matemáticos, se intervendrá para que piensen en otras fundamentaciones posibles (poniendo en duda la veracidad del ejemplo o no ejemplo presentado). En caso de que en el total de los grupos haya poca variedad de polígonos, a los grupos que terminan pronto se les pedirá que piensen en considerar otros polígonos. Se les proporcionarán las representaciones en cartulina a las y los estudiantes que luego de cierto tiempo se encuentren estancados, o a aquellos que finalicen la tarea muy rápido.

Puesta en común

Para iniciar la puesta en común, se pedirá a todos los grupos que expongan sus producciones en el frente del salón, para que todos puedan observar las producciones de sus compañeros.

Durante el monitoreo, se habrá seleccionado en qué orden los distintos grupos presentarán sus resoluciones. Se seleccionará en función de las figuras utilizadas y de los argumentos planteados, de menor a mayor complejidad de acuerdo con las propiedades de los polígonos involucrados. Cuando un grupo presenta sus diseños, y da su fundamentación, se solicitarán las fundamentaciones de otros grupos que hayan hecho el mismo diseño, y se pondrá a discusión de toda la clase la validez o no de esos argumentos. En la medida en que las argumentaciones estén fundadas en propiedades de los polígonos, estas se establecerán como relaciones generales. Se continuará de la misma forma con los demás grupos que hayan utilizado otros polígonos. Se analizarán de forma similar los casos de los no ejemplos.

En el cierre de la puesta en común se establecerán las condiciones para un recubrimiento del plano, así como cuáles son los polígonos regulares que lo teselan.

Pensamos que todo este trabajo llevará los 90 minutos de clase.

Implementación y observación de la clase

La clase planificada fue implementada en un grupo de primer año de Magisterio, en la asignatura Matemática I, y en un grupo de primer año de profesorado de matemática, en la asignatura Geometría I. Para esta etapa hemos elaborado un protocolo de observación de clase, basado en el marco TRU. La observación individual estará guiada por dicho protocolo. Este también nos permitirá ordenar y focalizar la discusión colectiva posterior de modo de abordar el primer objetivo de nuestra investigación: estudiar el impacto de la implementación de tareas cognitivamente demandantes de geometría, diseñadas colectivamente, en el aprendizaje de las y los alumnos de dos grupos de formación docente (Ball et al., 2008).

Protocolo de observación de clase

Hemos elaborado un protocolo de observación de clase que tiene en cuenta las cinco dimensiones descritas en el marco TRU (Ver Anexo 1). Para seleccionar los indicadores dentro de cada una de estas dimensiones se tuvieron en cuenta las actividades de clase, esto es, la tarea de final abierto elaborada, el monitoreo e intervención docente y los aportes que realicen las y los estudiantes en la clase.

Pensamos que la inclusión de estos indicadores nos permitiría abarcar una amplia gama de posibilidades en el desarrollo de la clase y nos brindaría insumos para la discusión posterior de la clase (tercera etapa del ciclo del LS).

Debemos aclarar que hay un indicador, que consideramos muy importante y que tendremos en cuenta, que no figura explícitamente en el protocolo de observación ya que está vinculado en las cinco dimensiones. Se trata de la especificidad de la formación de profesores y maestros en el área de la matemática, es decir la consideración del *conocimiento especializado del profesor* (Ball et al., 2008) que debe tener un maestro y un profesor de matemática. Tendremos muy en cuenta las consideraciones, decisiones y acciones que el docente lleve adelante en la clase, fundadas en esta especificidad.

A modo de cierre

Del análisis realizado sobre todos los datos de esta investigación surgen varias conclusiones. Por un lado, la tarea se mostró potente para que las y los estudiantes la abordaran en distintos niveles de complejidad, y la labor de los formadores contribuyó al desarrollo de discusiones productivas y a la resolución de las dificultades que surgieron durante las clases.

Por otro lado, una vez implementadas las clases, y durante las discusiones posteriores, pudimos identificar la potencia del proceso detallado de planificación que supone la metodología del LS. En efecto, el esfuerzo colectivo de anticipar distintas resoluciones y soluciones, formas de pensamiento (correctas o erróneas) de los estudiantes, así como pensar posibles intervenciones docentes, mostró un efecto positivo durante la implementación de las clases investigativas. Al mismo tiempo, permitió hacer un análisis comparativo entre la planificación y lo realmente sucedido y, por ejemplo, retomar aspectos problemáticos o no totalmente claros del enunciado de la tarea. Por ejemplo, en las dos preguntas de la actividad, en lugar de utilizar la palabra *polígono*, como se venía haciendo, se escribió *figura*. Esto llevó a que algunos estudiantes consideraran figuras que no eran polígonos.

Pensamos que la metodología del LS es una herramienta poderosa para ser aplicada entre docentes o formadores, pero también podría implementarse en la formación docente, específicamente durante la práctica docente.

Un trabajo colaborativo de largo plazo, como el que se promueve desde la metodología de LS, permite el desarrollo de procesos de reflexión (Ricks, 2011). De forma particular, permite el desarrollo de nuevo conocimiento para enseñar de quienes participan, fundado en la práctica. LS impone ciertos plazos para el trabajo del equipo (Fujii, 2017). No es un proceso que pueda llevarse adelante en unos pocos días, sino que son necesarias muchas reuniones para realizar una planificación exhaustiva, y otras tantas para la discusión posterior a la implementación de las clases. Se establece así un terreno fértil para el examen y la discusión profunda, lo que permite procesos reflexivos y el refinamiento de ideas.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Borko, H. y Potari, D. (Eds.). (2020). Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups. *ICMI Study 25 Conference Proceedings.*

Fujii, T. (2017). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 1–21). Springer.

Isoda, M. (2015). The science of lesson study in the problem solving approach. En M. Inprasitha, M. Isoda, P. Wang-Iverson y B. Yeap (Eds.). Lesson Study. Challenges in Mathematics Education. *Series on Mathematics Education, 3*, 81-108.

Ricks, T. E. (2011). Process Reflection during Japanese Lesson Study Experiences by Prospective Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 251–267.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M. y Joubert, M. (2016). ICME International Survey on Teachers Working and Learning through Collaboration. *ZDM Mathematics Education, 48*, 651-690. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5

Schoenfeld, A. H. (2016). *The Teaching for Robust Understanding Project. An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework.* Graduate School of Education. Recuperado de http://map.mathshell.org/trumath.php

Watson, A. y Ohtani, M. (2021). Task Design in Mathematics Education. Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers´ professional development. *For the Learning of Mathematics, 15* (3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En Jaworsky, B. y Wood, T. (eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, 93-114.

Anexo 1

Protocolo de observación de clase

Contenido	- En qué medida las discusiones matemáticas son precisas y coherentes
	- Qué relaciones se establecen entre el contexto, los conceptos y los procedimientos
Demanda cognitiva	*Las actividades de clase* (la tarea, la intervención docente y la participación de los estudiantes)*:*
	- generan y mantienen un ambiente de producción intelectual desafiante
	- generan un desarrollo matemático de los estudiantes
Acceso equitativo al contenido	*Las actividades de clase (tareas, intervención docente):*
	- invitan a una activa participación de todos los estudiantes
	- ¿quién propone ejemplos?
	- ¿quién explica?
Disponibilidad, domino e identidad	*Los estudiantes, en qué medida tienen oportunidad de:*
	- conjeturar
	- explicar
	- representar
	- generalizar
	- refutar o aceptar ideas ajenas
	- refutar o aceptar ideas propias
	Estas actividades
	- ¿dejan en evidencia las contribuciones de los estudiantes?
	- animan al estudiante a involucrarse (desarrollo de la *disponibilidad*)
	- posibilitan que el estudiante evolucione en el *domino* del contenido
	- permiten que el estudiante genere una *identidad* como pensador matemático
Evaluación formativa	*La tarea presentada*:
	- ¿revela el estado real de entendimiento del estudiante?
	- ¿permite atender asertivamente las dificultades grupales e individuales?
	El docente:
	- a partir del monitoreo de la actividad de los estudiantes, ¿interviene para ajustar el nivel de la demanda cognitiva?