Estudio del Conocimiento Matemático para la Enseñanza de aspectos clave de la Geometría Fractal

Victoria Artigue [1], Margot Madama [2], María de los Ángeles Fanaro [3], Eduardo Lacués [4]

[1] maria.artigue@ucu.edu.uy. Universidad Católica del Uruguay.

Dirección General de Educación Secundaria. Uruguay.

[2] margot.madama@gmail.com. Dirección General de Educación Secundaria. Uruguay.

[3] mariangelesfanaro@gmail.com. CONICET-NEES. Facultad de Ciencias Humanas. UNCPBA. Argentina.

[4] elacues@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7449-999X

Tema: Enseñanza de la Geometría Fractal, Conocimiento Especializado del profesor de Matemática

Modalidad: Comunicación Breve

Nivel educativo: Enseñanza media

Resumen: *En este trabajo se presenta el análisis de una propuesta de enseñanza y aprendizaje sobre Geometría Fractal que fue implementada con profesores de Matemática en ejercicio de Uruguay. Se implementó en un curso diseñado y tutorado por Profesores Articuladores Departamentales de Matemática de Uruguay y expertos en didáctica. El objetivo general del curso fue contribuir a la formación continua de los profesores en ejercicio, y en especial en Geometría Fractal, ya que la mayoría de los participantes expresaron haber tenido poco o nulo contacto con la temática. Se presenta la construcción de la categorización que emergió de las producciones de los participantes, caracterizando el contenido didáctico de la propuesta y del contenido especializado de la Geometría Fractal, y algunos ejemplos de cada subcategoría.*

Palabras claves: *Geometría Fractal, Conocimiento Matemático para la Enseñanza, Profesores de Enseñanza Media.*

El problema de investigación

La enseñanza de la Geometría Fractal (GF) constituye una problemática relevante que aún no ha sido ampliamente abordada en la Educación Matemática ni en los currículos (Chen, Herron, Ding y Mohn, 2018; Karakus, 2013). Pocas veces integra los contenidos de los planes de formación docente, por lo que los profesores pueden no tener conocimiento de esta temática, su epistemología y sus fundamentos matemáticos (Chen et al., 2018). Naturalmente, entonces, desconocen cómo trabajar en su transposición didáctica (Chevallard, 1999). Por lo tanto, consideramos de gran importancia comenzar con indagar el conocimiento que los profesores tienen de la GF, y contribuir a desarrollarlo, esto es, favorecer a expandir su conocimiento especializado del contenido GF, mediante la propuesta de un conjunto de actividades desarrolladas especialmente para esto.

Marco Teórico

Fundamentos teóricos para el análisis del Conocimiento para la enseñanza de la Geometría Fractal

Son diversas las variables que el profesor pone en juego cuando lleva a cabo un proceso de enseñanza, siendo una de las principales su habilidad para fomentar el desarrollo de la adquisición de conocimiento de sus alumnos. Desde las investigaciones acerca de la formación de profesores se han propuesto diversos modelos teóricos, que describen los diferentes tipos de conocimientos que es deseable que los docentes dispongan para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Algunas investigaciones indican que cuanto mayor es el conocimiento del profesor sobre la disciplina a enseñar, mejor podría llegar a ser el rendimiento de los aprendices (Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008). Sin embargo, existen múltiples tipos de conocimiento que un profesor pone en práctica a la hora de planificar, desarrollar y reflexionar sobre su trabajo en el aula (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017).

Estos modelos suelen considerar que el conocimiento de la disciplina que se enseña, si bien es necesario, no es suficiente para asegurar que el docente lleve a cabo una rica enseñanza. De esta manera, es deseable que el docente cuente con otros tipos de conocimiento, algunos de carácter cognitivo (como saber cómo aprenden los estudiantes, cuáles son sus afectos, cuáles sus dificultades y sus errores), y otros de carácter didáctico (como organizar la enseñanza, diseñar tareas, utilizar recursos adecuados).

La relación entre el conocimiento, particularmente en Matemática, y la manera de enseñarla, sigue siendo un tema de debate actual por investigadores en didáctica (Hill, et. al., 2008). Se eligió para este trabajo el marco teórico del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Rowan y Ball, 2005). Esto significa aceptar que los conocimientos que ponen en juego los profesores combinan dos grandes áreas: el Conocimiento del Contenido Disciplinar y el Conocimiento Didáctico del Contenido. La primera incluye el Conocimiento Común del Contenido, Conocimiento Especializado del Contenido y Conocimiento en el Horizonte Matemático. La segunda incluye el Conocimiento del Contenido con relación a los estudiantes, a la enseñanza y al currículo.

La definición del término conocimiento aportada por Schoenfeld (2010) introduce elementos que permiten ser identificados en los profesores al resolver una situación matemática: "Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!"[4] (Schoenfeld, 2010, p.25). Esta manera de caracterizar al conocimiento implica tener presente tres elementos que son pertinentes para la elaboración de este trabajo, debido a su relación con el conocimiento común (o de base) y el conocimiento especializado que poseen los profesores respecto a la GF. Estos elementos son:

-*Información disponible*. Está conformada por las acciones y maneras de comprender conceptos matemáticos de tipo relacional, instrumental, lógico o simbólico, que sean adaptables a diversas situaciones.

-*Para usar*. Implica la capacidad de ignorar la información que no tenga utilidad para resolver una situación matemática. Esto puede requerir desechar definiciones informales desde una perspectiva matemática, o en el otro extremo, demasiado formales para el nivel en que se quiera enseñar. Ambas situaciones están muy presentes en la literatura consultada sobre enseñanza de la GF, lo cual motivó a estudiar la transposición didáctica de los conceptos claves de esta geometría.

-*No necesariamente correcto*. Esta aseveración es crucial para el investigador que busca identificar y comprender el conocimiento que tiene un profesor de Matemática respecto a una determinada área. En estos términos, no es relevante si el conocimiento es correcto o no, se pretende saber qué conoce el profesor para comprender su accionar (Carrillo, Contreras, Climent, Escudero, Flores y Montes, 2014).

En este trabajo se adoptará esta definición de conocimiento como referente para el análisis de las producciones de los profesores. Esta decisión se debe a su compatibilidad con el modelo teórico del Conocimiento Especializado para la Enseñanza de la Matemática[5] (Carrillo, et al., 2014), al abarcar todo aquello que se conoce superficialmente sobre la GF, pero también al conocimiento matemático adquirido durante el transcurso de la propuesta de enseñanza.

[4] Traducción realizada por los autores de este trabajo.
[5] MTSK por sus siglas en inglés: Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge.

El curso para profesores de Matemática: características e implementación

El curso titulado "Geometría Fractal: análisis didáctico de propuestas de enseñanza" se desarrolló en 2021, en tres ediciones con una duración de 6 semanas cada uno. Fue diseñado e implementado por dos Profesores Articuladores Departamentales (PAD) de Matemática de la Dirección General de Educación Secundaria (DGES), uno de la ciudad de Canelones y otro de la ciudad de Montevideo, y por dos expertos en Didáctica de la Matemática, uno de Uruguay y otro de Argentina. La inscripción fue totalmente voluntaria, y se invitó a participar a todo profesor de Matemática de Uruguay que tuviera al menos un curso a su cargo en la DGES.

La propuesta fue construida considerando principios didácticos-pedagógicos para sustentarla, que se tradujeron en materiales de trabajo entre los que se cuentan:

1. una introducción hacia la GF a través de una de sus aplicaciones matemáticas (antenas multibanda);
2. preguntas para reflexionar sobre las características propias de la GF, intentando relacionar los conceptos nuevos con lo que los profesores participantes ya manejan;
3. actividades que buscan generar interés, relacionando la GF con criterios estéticos y con su complejidad matemática.

El objetivo general del curso fue contribuir en la formación continua de los profesores en ejercicio, y en especial en GF, ya que la mayoría de los participantes expresaron haber tenido poco o nulo acercamiento con la temática. El curso abarcó dos actividades que refieren particularmente al concepto de Autosimilitud (AE) y al concepto de Dimensión Fractal (DF).

La modalidad fue a distancia y asincrónica a través de la plataforma CREA proporcionada por CEIBAL (https://www.ceibal.edu.uy/es.).

A lo largo del curso se propusieron 6 tareas, que permitieron analizar los diferentes conocimientos previos de los profesores y los que desarrollaron sobre GF.

La resolución alcanzada en cada tarea fue categorizada en una escala de 1, 2 o 3, a partir de una rúbrica construida con esta finalidad, siendo el nivel 3 el que denota más acercamiento al Conocimiento Especializado sobre GF o al Conocimiento Didáctico de la Propuesta.

En este trabajo se adoptó el esquema elaborado originalmente por Ball (2008), y se adaptó la categorización elaborada por Chen (2018) como muestra la Figura 1.

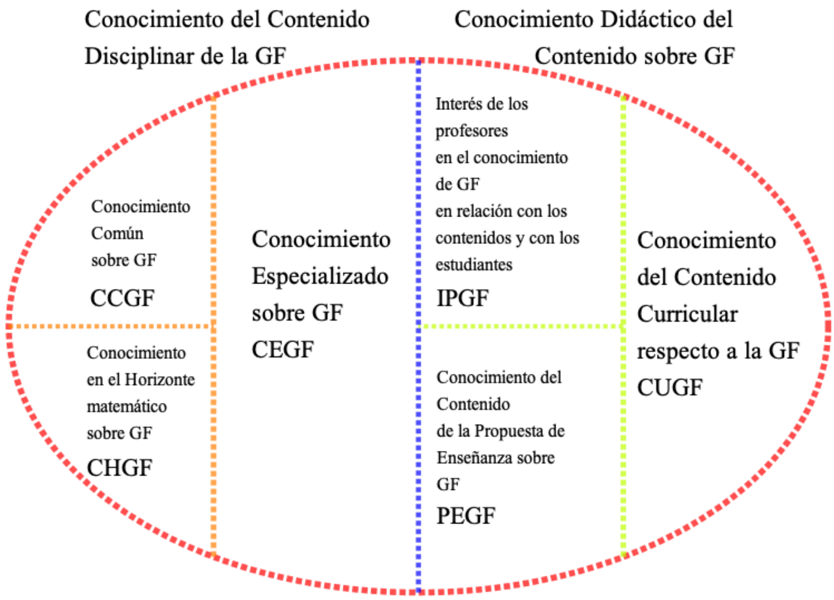

Figura 1: Diferentes tipos de Conocimiento Matemático para la enseñanza de la GF

Se sustituyó el Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes por el Interés en el contenido GF y de los Estudiantes, ya que se busca analizar el interés que poseen los profesores de la escuela secundaria, en aprender y enseñar la GF.

Así, en este trabajo se precisan los constructos teóricos que se utilizan para el análisis de los datos obtenidos a la GF, de la siguiente manera:

1. el Conocimiento Común sobre GF (CCGF) como aquel conocimiento matemático utilizado en cualquier ámbito (científico o profesional) que sustenta aspectos claves de la GF (perímetro, área, límite, traslación, rotación, homotecia, logaritmo, etc.);
2. el Conocimiento en el Horizonte matemático sobre GF (CHGF) como toda expresión que dé cuenta de la continuidad o la complementación de esta geometría respecto a la geometría euclídea;

3. el Conocimiento Especializado sobre GF (CEGF) (también llamados por Ma (2020) clusters o “paquetes de conocimiento”) como el tratamiento operativo de las propiedades de autosemejanza estricta, de dimensión fractal y la descripción matemática de las transformaciones geométricas que permiten construir un fractal con autosemejanza estricta, para la GF.
4. el Conocimiento Curricular respecto a la GF (CUGF) como las aseveraciones en relación con la posibilidad de enseñar GF en los diferentes niveles de la enseñanza media y sus argumentos.

Algunos resultados

El análisis de las producciones de los participantes en el curso no se ha completado. Sin embargo, es posible indicar algunos resultados

Existen trabajos que describen que presentan la construcción de fractales a partir de la representación matricial de las transformaciones afines que conforman el Sistema Iterado de Transformaciones (Rubiano, 2009) que define el fractal, lo que indica un nivel en CEGF próximo al superior; sin embargo, esos mismos trabajos se ubican en las categorías 1 o 2 en relación con alguno de los otros tipos de conocimiento (CCGF, CHGF o CUGF).

Un resultado similar aparece en otras producciones que analizan la definición proporcionada en el curso de dimensión fractal.

En otras producciones, que evidencian un alto interés en GF y alcanzan el nivel 3 en CCGF y CUGF, no muestran un desarrollo comparable en CUGF y mantienen un manejo poco riguroso de las ideas centrales.

Algunos ejemplos de las producciones de los profesores participantes en el curso se exponen a continuación, para dar cuenta de los comentarios anteriores.

Como ejemplo de nivel 1 para la pieza de conocimiento Dimensión Fractal se tiene el de la Figura 2. En la Figura 2, se aprecia que, a pesar de que las imágenes mostradas corresponden al resultado de la primera iteración del fractal, la conclusión vislumbra la idea intuitiva de “llenado” al expresar frases como “mayor capacidad de relleno o “completa más el plano”.

Pieza de conocimiento 2: Dimensión Fractal (DIMF)

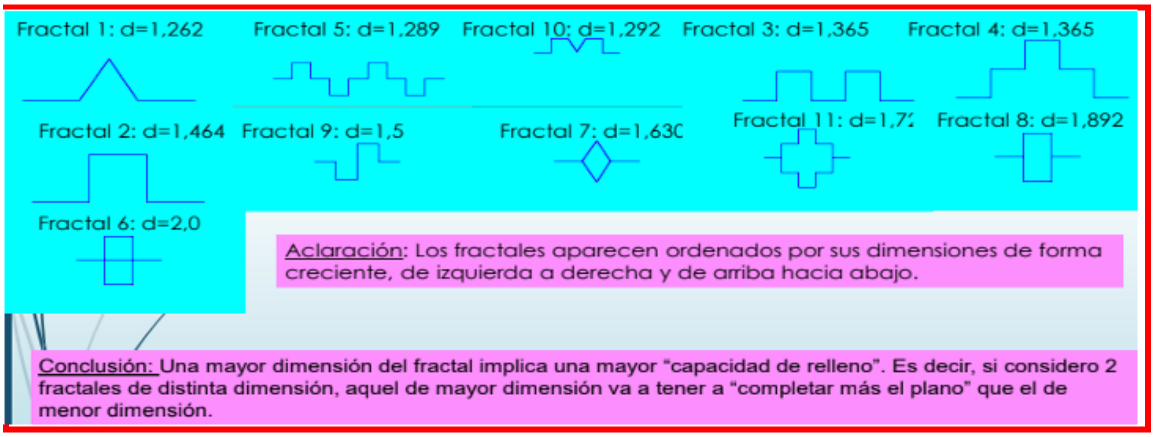

Figura 2: Ejemplo de nivel 1 de la pieza de conocimiento Dimensión Fractal

Una producción que alcanza el nivel 3 es el de la figura que sigue

Nº DE FRACTAL	DENSIDAD	CÁLCULO DE LA DENSIDAD
1	1,261	$\frac{\log 4}{\log 3}$
5	1,289	$\frac{\log 17}{\log 9}$
10	1,292	$\frac{\log 8}{\log 5}$
3 - 4	1,365	$\frac{\log 9}{\log 5}$
2	1,464	$\frac{\log 5}{\log 3}$
9	1,500	$\frac{\log 8}{\log 4}$
7	1,630	$\frac{\log 6}{\log 3}$
11	1,722	$\frac{\log 16}{\log 5}$
8	1,892	$\frac{\log 8}{\log 3}$
6	2,000	$\frac{\log 9}{\log 3}$

Cuanto mayor es la densidad de un fractal, podemos decir que el mismo será mas "lleno" .

La dimensión fractal D, la podemos definir así:

$$D=\frac{\log p}{\log \alpha}$$

Donde p es la cantidad de subconjuntos de la partición correspondiente a un determinado paso de la iteración, y α es el factor de semejanza de cada subconjunto de la misma partición con la semilla.

Como la densidad es un cociente, éste dependerá de que tan grande sea el numerador y que tan chico sea el denominador.

Si consideramos a p como la cantidad de subconjuntos que hay en la partición, y α el factor de reducción, podemos pensar que cuanto menor es α, mayor es la longitud de los segmentos (subconjuntos de la partición).

Observando los resultados obtenidos:

- si comparamos fractales con **igual α**, es mas lleno el fractal que tenga mayor p, o sea mayor cantidad de subconjuntos en la partición. (segmentos)
- Si comparamos fractales con **igual p**, es más lleno el fractal que tenga menor α, o sea el que tenga segmentos de mayor longitud.

Figura 3: Ejemplo de nivel 3 de la pieza de conocimiento Dimensión Fractal

En la Figura 3 se puede apreciar que el profesor realiza observaciones matemáticas respecto al cociente de los logaritmos involucrados en la definición de Dimensión Fractal. En este caso, se comparan fractales que tienen el mismo factor de escala o la misma cantidad de subconjuntos de cada partición en cada iteración, lo que denota un análisis matemáticamente rico ya que se está contemplando a la Dimensión Fractal como una particularidad de cada fractal donde se involucra la cantidad de partes idénticas en que se dividen las iteraciones y los factores de escala con respecto a la semilla.

Reflexiones finales

La GF se ha gestado hace alrededor de 50 años, y aunque está presente en los diseños curriculares de varios países, hay necesidad de un análisis didáctico que se ocupe de cómo enseñarla. Éste fue en parte el cometido de las tres ediciones del curso, y en todas, los profesores tomaron con entusiasmo y profesionalismo la posibilidad de comenzar a pensar y repensar la GF y su transposición didáctica.

En las ediciones 2 y 3 los participantes recibieron la misma secuencia de actividades, pero fue diferente a la que tuvieron los participantes de la edición 1. La diferencia entre ambas propuestas para el curso fue que, en la edición 2 se agregó una actividad cuyo propósito apuntaba al estudio y a la aplicación de una definición de Autosemejanza Estricta elaborada por los tutores del curso, de la cual se deduce el cálculo de la Dimensión Fractal. Esta adaptación de la propuesta fue elaborada a partir del análisis de la edición 1, buscando superar algunas limitaciones detectadas en su desarrollo apelando a un mayor rigor matemático.

Los resultados obtenidos en las ediciones 2 y 3 son importantes insumos para continuar investigando de qué manera es posible formar profesores específicamente en Geometría Fractal, para desarrollar su conocimiento especializado para su enseñanza.

En particular, la aparente independencia entre los diferentes tipos de contenidos que se detectó en las producciones que se reseñaron es un tema de interés didáctico, que motiva un estudio más detallado.

Finalmente, las modificaciones realizadas en las ediciones 2 y 3, permiten formular la pregunta de si, a través del estudio de los conceptos de autosemejanza estricta y dimensión fractal, es posible diseñar intervenciones de enseñanza en la escuela secundaria, que aporten al estudiante en su desarrollo de competencias para el reconocimiento de patrones, los procesos de generalización, la modelización, la operatoria, la argumentación, entre otros.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389, DOI: 10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*. https://doi.org/10.4000/adsc.756

Chen, S., Herron, S., Ding, J. y Mohn, R. (2018). Assessing United States and Chinese secondary mathematics teachers' interest in fractal geometry. *Journal of mathematics education,11*, 2, pp. 17-34.

Chevallard, Y. (1999). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al Saber enseñado*. Editorial AIQUE.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemática de secundaria. *Unión, 26*, pp. 9-25.

Godino, J., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*, (2), 371-406.

Hill, H., Blunk, M., Charalambos, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 24*, 430-511.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Karakus, F. (2013). A Cross-Age Study of Student´s Understanding of fractals. *Bolema, 27*(47), 829-846.

Ma, L. (2020). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers´ understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Studies in mathematical thinking and learning series*. Taylor & Francis. 20th anniversary ed.

Rubiano, G. (2009). *Iteración y fractales (con Mathematica).* Vicerrectoría Académica, Colombia, primera edición.

Schoenfeld, A. (2011). *How we think. A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. Routledge Taylor & Francis Group.

Seckel, M., Breda, A. y Font, V. (2019). Los criterios de idoneidad didáctica en la formación de profesores. *ALME, 32*(2), 440-447.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. (A. Kozulin, Trad.) Cambridge, Mass.: MIT Press.