El conocimiento matemático especializado de los futuros maestros para la enseñanza de las fracciones

Un estudio de casos

Ana González

ana.gonzalez225@gmail.com. Uruguay

Tema: Formación profesional

Modalidad: Comunicación breve

Nivel educativo: Terciario

Resumen: *En este trabajo se reporta un estudio de casos que consiste en la exploración y descripción del conocimiento matemático y didáctico que poseen los estudiantes avanzados de magisterio de un instituto público de Montevideo, para enseñar el concepto de fracción en su interpretación parte-todo. Para llevar adelante la investigación se opta por un estudio de carácter mixto. En una primera instancia se aplica un cuestionario con un enfoque cuantitativo y posteriormente se realizan entrevistas con un enfoque cualitativo. A partir de los datos y del análisis que se realiza de ellos en las diferentes etapas, se obtuvieron diversos hallazgos en cuanto al conocimiento didáctico y matemático de los futuros maestros. En particular, se recogen evidencias que ponen de manifiesto dificultades matemáticas en el tratamiento de fracciones que involucran magnitudes discretas o mayores a la unidad.*

Palabras claves: *fracción, parte-todo, conocimiento didáctico, conocimiento matemático.*

Introducción

Algunos investigadores como Fandiño Pinilla (2007), Martínez y Lascano (2001), Obando (2003) y Pazos (2009) han explorado las dificultades que atraviesan los estudiantes al trabajar y aplicar el concepto de fracción en sus múltiples significados. Mientras que otros investigadores, tales como Ivars et al. (2016), González Retana y Eudave Muñoz (2018) y Rojas et al. (2015), han centrado su interés en indagar sobre el conocimiento que es necesario que tenga un docente para enseñar matemática y en particular, el concepto de fracción. Los investigadores González Retana y Eudave Muñoz (2018) en sus estudios, indican que tanto las fracciones como los números decimales son un reto de aprendizaje y enseñanza para los estudiantes y profesores, respectivamente, por lo que resulta un desafío para aquellos que se están formando como profesores. A partir de los trabajos revisados se infiere, entonces, la importancia de seguir avanzando en estudios que clarifiquen el conocimiento que los futuros docentes necesitan para poder abordar en las aulas el concepto de fracción en sus múltiples significados. Es por lo anterior que este trabajo centra el interés en el significado de la fracción como relación parte-todo.

Marco conceptual

El modelo MTSK

Para abordar este trabajo se adopta el modelo denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK por sus siglas en inglés). Dicho modelo pretende explicitar qué conocimientos son fundamentales para que un docente lleve adelante su tarea de enseñar matemática. En particular, en el modelo se definen dos dominios de conocimiento denominados: conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK). Cada uno de los dominios se divide a su vez en tres subdominios que permiten explicar diferentes conocimientos del docente (Carrillo et al., 2018), ver Figura 1, definiéndose de este modo un total de seis subdominios. Los autores del modelo señalan además que todos estos subdominios se van a ver atravesados por las creencias que los docentes tengan sobre la propia matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

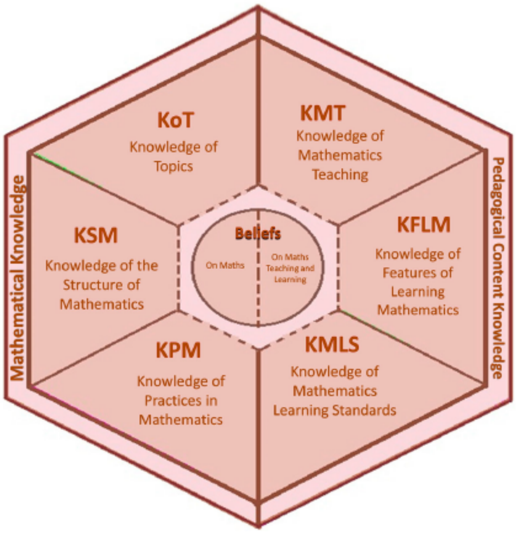


Figura 1: Dimensiones del modelo MTSK (Carillo et al., 2018)

En este trabajo el interés se centra en los subdominios Conocimiento de los Temas (KoT) y Conocimiento de las Características del aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). En particular, el subdominio KoT refiere al conocimiento que el docente tiene sobre los contenidos matemáticos tales como procedimientos, conceptos, teoremas, entre otros, mientras que el KFLM refiere al conocimiento que el docente tiene de cómo aprenden los estudiantes, cómo piensan, qué errores frecuentes cometen, etc. (Flores-Medrano, 2016).

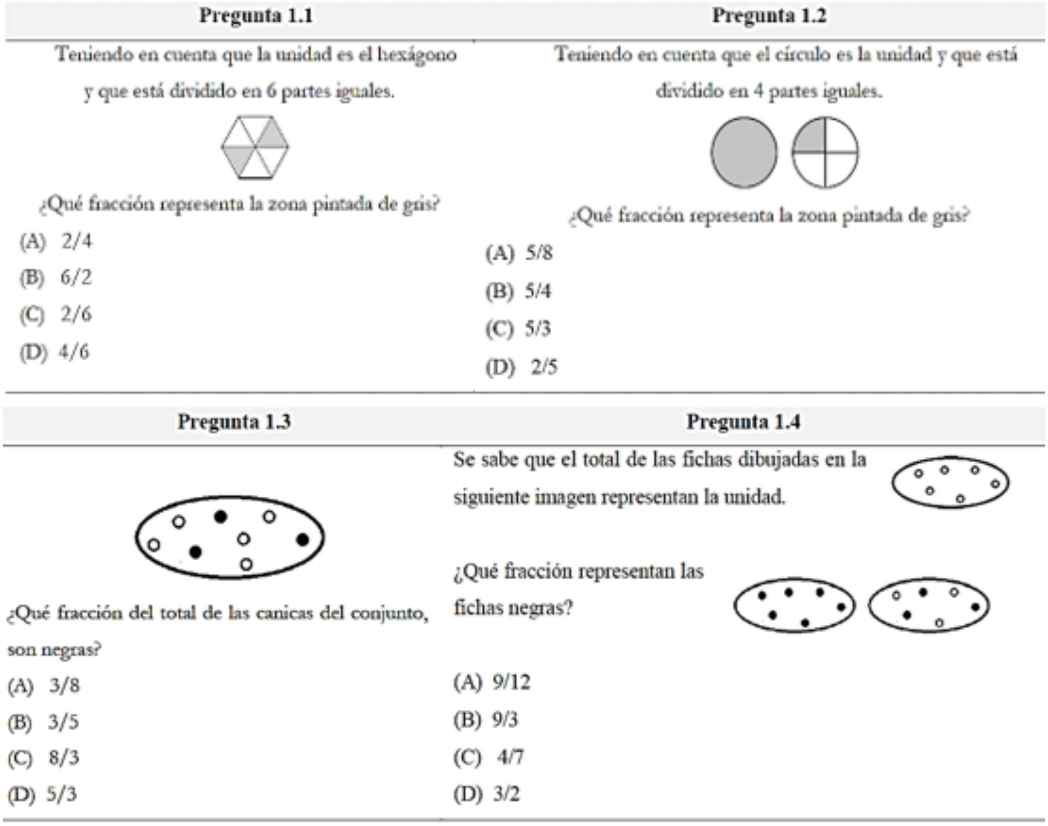
El concepto de fracción

Llinares y Sánchez (1997) señalan que para hacer alusión al concepto de fracción es necesario referirse al término como un megaconcepto. Los autores reportan que para comprenderlo hay que tener en cuenta los subcontructos e interpretaciones que de él se derivan. En particular, al realizar una revisión bibliográfica se recogen múltiples significados del concepto, entre los cuales destacamos: parte-todo, medida, cociente, operador y razón. Esta investigación profundiza en el concepto de fracción como relación parte-todo que según Llinares y Sánchez esta interpretación se da cuando "(...) un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "congruentes" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes" (1997, p.55).

Se puede ver que el significado parte-todo que se le da a la fracción acarrea múltiples dificultades que permiten explicar el fracaso de los estudiantes al aplicar el concepto de fracción.

Método

Se aplicó un cuestionario de carácter cuantitativo a una muestra de 72 estudiantes de un instituto de formación de maestros público de Montevideo (ver Figura 2). Dicho cuestionario consta de 19 preguntas múltiple opción, divididos en 9 bloques, que permiten recoger información sobre el conocimiento (KoT) que poseen los estudiantes avanzados de magisterio. Cada uno de los bloques permite recoger evidencias de algún aspecto del concepto de fracción.



Pregunta 1.1	Pregunta 1.2
Teniendo en cuenta que la unidad es el hexágono y que está dividido en 6 partes iguales. ¿Qué fracción representa la zona pintada de gris? (A) 2/4 (B) 6/2 (C) 2/6 (D) 4/6	Teniendo en cuenta que el círculo es la unidad y que está dividido en 4 partes iguales. ¿Qué fracción representa la zona pintada de gris? (A) 5/8 (B) 5/4 (C) 5/3 (D) 2/5
Pregunta 1.3	**Pregunta 1.4**
¿Qué fracción del total de las canicas del conjunto, son negras? (A) 3/8 (B) 3/5 (C) 8/3 (D) 5/3	Se sabe que el total de las fichas dibujadas en la siguiente imagen representan la unidad. ¿Qué fracción representan las fichas negras? (A) 9/12 (B) 9/3 (C) 4/7 (D) 3/2

Figura 2: Pregunta 1 del cuestionario

Luego de la aplicación del cuestionario se realiza un análisis de los resultados obtenidos, definiendo así tres niveles según los puntajes alcanzados (bajo, medio y alto). Posteriormente seleccionamos aleatoriamente dos estudiantes representantes del nivel bajo y alto y tres del nivel medio. A estos siete estudiantes seleccionados se les realiza una entrevista que permite recoger información sobre el conocimiento didáctico del contenido (KFLM) y además complementar los hallazgos del cuestionario en cuanto al KoT.

Resultados

Conocimiento matemático (KoT)

Las cuatro preguntas que se muestran en la Figura 2 conforman el bloque 1 del cuestionario que permitió recoger información sobre el KoT. Dicho bloque tiene como objetivo determinar si los estudiantes logran vincular representaciones gráficas básicas de fracciones, dadas en diferentes contextos, mayores y menores que la unidad, con su representación fraccional. En la Tabla 1 se muestra un resumen de las preguntas y la frecuencia con la cual se eligió cada una de las opciones de respuesta, visualizando en color verde la opción correcta para cada pregunta y una columna final que indica la cantidad de encuestados que no respondieron a la pregunta indicada.

Los datos relevados en la Tabla 1 nos permiten afirmar, que en promedio **4572** (63,5 %) de los estudiantes encuestados contesta de forma acertada a las preguntas del bloque 1. Esto permite reportar que más de la mitad de los encuestados logran vincular representaciones gráficas mayores y menores que la unidad con su representación fraccional en contextos continuos y discretos, reconociendo la unidad de referencia y las partes. Asimismo, podemos ver que, en promedio, **2672** (35,8 %) estudiantes no logra contestar a las preguntas del bloque de forma correcta mientras que un 0,7% omite contestarlo.

	A	B	C	D	En blanco	Porcentaje de acierto	Porcentaje de error	Porcentaje de omisión
Pregunta 1.1	0	1	71	0	0	98,6	1,4	0
Pregunta 1.2	38	28	3	1	2	38,9	58,3	2,8
Pregunta 1.3	69	0	3	0	0	95,8	4,2	0
Pregunta 1.4	53	4	0	15	0	20,8	79,2	0

Tabla 1: Cuestionario 1, bloque 1

En las preguntas 1.1 y 1.2 los estudiantes deben reconocer las partes, el todo y el vínculo entre estas en representaciones continuas, ver Figura 2. A partir de la información recabada podemos decir que en promedio **5072** (68,8%) logra reconocer de forma correcta las partes, el todo y la fracción representada en contextos continuos, **2172** (29,8%) lo hace de forma incorrecta y **172** (1,4%) no lo hace.

En la pregunta 1.2 podemos ver que la opción incorrecta más elegida es la A. Esta opción permite evidenciar que para encontrar el numerador y el denominador de una fracción los estudiantes cuentan el total de partes pintadas y el total de partes disponibles, respondiendo que la fracción es “partes pintadas” sobre “total de partes en que se dividió el todo” sin considerar la unidad de referencia que, por ejemplo, en el caso de la pregunta 1.2 es el círculo.

En cuento a las preguntas 1.3 y 1.4 que implican el reconocimiento de las partes, el todo y la fracción involucrada en representaciones donde la unidad es un conjunto discreto, ver Figura 2, podemos ver que en promedio **4272** (58,3%) lo hace de forma correcta y **3072** (41,7%) lo hace de forma incorrecta.

En acuerdo con lo indicado por Obando (2003) y León-Mantero et al. (2016) el manejo de fracciones que implican el uso de magnitudes discretas resulta más complejo a los estudiantes. Tal como se reportó en los párrafos anteriores **5072** (68,8%) estudiantes contestan de forma correcta a las preguntas donde la representación gráfica está sujeta a un contexto continuo, mientras que **4272** (58,3%) estudiantes lo hacen a las preguntas que implican el trabajo en contextos discretos.

Por otro lado, las preguntas 1.1 y 1.3 fueron en las que se obtuvieron mayor porcentaje de acierto pues son contestadas de forma correcta por un 98,6% y un 95,8% respectivamente. De forma contraria las preguntas 1.2 y 1.4 son las que tienen un porcentaje de acierto menor 38,9% y 20,8% respectivamente. En particular, la gran diferencia de acierto entre unas preguntas y otras radica en que en las dos primeras se pedía a los estudiantes vincular una representación gráfica menor que la unidad con su representación fraccional, mientras que en las preguntas donde el porcentaje de acierto fue menor se pedía vincular una representación gráfica mayor que la unidad con su respectiva representación fraccional.

A partir de lo mencionado en el último párrafo se infiere que los estudiantes encuestados presentan dificultad en el reconocimiento del "todo" (D1) cuando las fracciones involucradas son mayores a la unidad (Pazos, 2009) pese a que dicho "todo" sea explicitado. En consecuencia, podemos ver que tanto en la pregunta 1.2 como en la 1.4 la opción incorrecta más elegida es la A. Esto último permite evidenciar que para encontrar el numerador y el denominador de una fracción los estudiantes cuentan total de partes pintadas y el total de partes disponibles, respondiendo que la fracción es "partes pintadas" sobre "total de partes en que se dividió el todo" sin considerar la unidad de referencia que, por ejemplo, en el caso de la pregunta 1.2 es el círculo. Pazos (2009) advierte que, en general, las fracciones mayores a la unidad son menos intuitivas para trabajar la relación parte-todo y por tanto, son utilizadas con menor frecuencia en las aulas. En el caso de la pregunta 1.2 al elegir la opción A se infiere que el estudiante está interpretando que para encontrar la fracción tiene que dividir los dos círculos en 4 partes iguales y contar cuántas partes quedan pintadas (5) del total de partes disponibles (8) tal como se procedería en representaciones que son menores a la unidad. En el caso de la pregunta

1.4 vemos que sucede algo similar pues los estudiantes eligen la opción 9/12 donde el numerador nos indica la cantidad de canicas pintadas de negro y el denominador la cantidad total de canicas, sin importar que la unidad era la colección formada por 6 canicas.

En este bloque vemos que predomina el concepto de fracción como conteo de partes, es decir la fracción es vista como partes pintadas sobre total de partes entre las que se ha dividido la unidad (Pazos, 2009). Este concepto funciona bien para las preguntas 1.1 y 1.3 donde la fracción que se trabaja es menor a la unidad, pero fracasa para el caso en donde la fracción a encontrar es mayor a la unidad.

Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM)

Luego del cuestionario, como ya se mencionó, se realizaron entrevistas a los futuros maestros. En dichas entrevistas se les presentó a los estudiantes de magisterio una actividad que era propuesta a escolares, ver Figura 3, donde se muestran seis representaciones para las cuales deben decir si se corresponden con ¾, cabe destacar que dicha actividad es una adaptación de la presentada por Ivars et al. (2016). Posteriormente, se le presenta a los entrevistados la respuesta de un estudiante escolar (Víctor) frente a la actividad que se muestra en la Figura 3. Luego que los entrevistados leyeran la respuesta de Víctor (Figura 4), se les consultó: ¿Cómo corregirían la respuesta del estudiante? y ¿Qué fortalezas y debilidades presenta el estudiante escolar respecto al concepto de fracción?

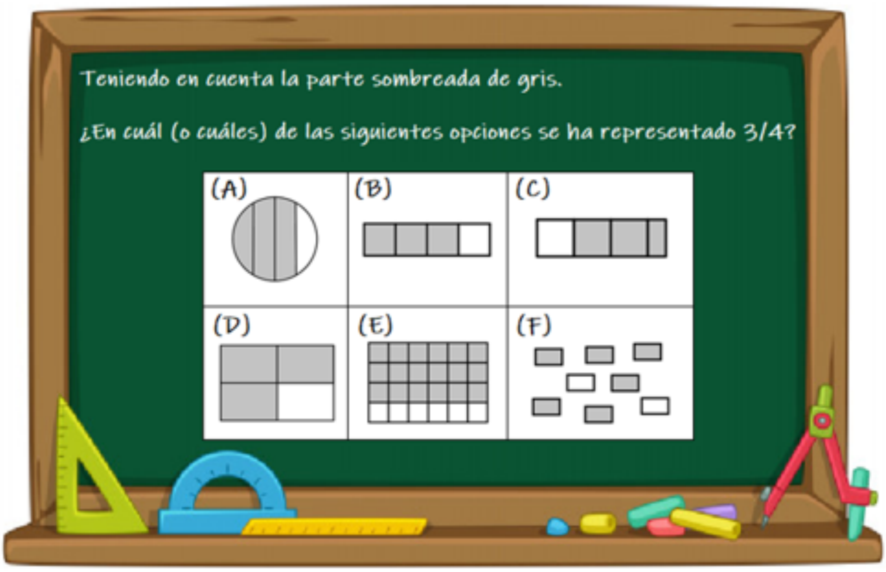


Figura 3: entrevista

Es importante señalar que las preguntas mencionadas en el párrafo anterior nos permiten explorar si los futuros maestros reconocen, en las respuestas de estudiantes escolares, errores o dificultades comunes. En particular, en un análisis a priori de las respuestas esperadas en la entrevista se puede ver que los futuros maestros pueden responder correcta o incorrectamente respecto a si las respuestas dada por el escolar es acertadas o no. Además, los entrevistados deberían poder identificar, en la respuesta de Víctor, que el escolar no tiene presente la propiedad que establece que las partes deben ser congruentes, que una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes) y que un grupo de partes puede ser considerado como una parte (fracciones en contextos discretos).

Respuesta de Víctor (V)

V: Mmmm, bueno yo creo que la figura A, B, C y D representan tres cuartos.

M: ¿Por qué crees que son esas figuras?

V: Porque en las figuras A, B, C y D hay 3 partes pintadas de 4, es decir tres cuartos.

Figura 4: respuesta de un escolar (Víctor)

En primer lugar, frente a la pregunta sobre cómo corregirían la respuesta que brindó Víctor, cuatro de los siete entrevistados (E2, E3, E5 y E7) indican claramente que la respuesta dada por el escolar es incorrecta, y en algunos casos, aunque no responden directamente indicando que es incorrecta, brindan orientaciones que muestran reconocimiento del error cometido por el escolar. En palabras de los propios entrevistados:

> Entrevistado 2: Yo le volvería a preguntar, a volver a formular la pregunta. "¿Estás seguro que las preguntas A y C realmente representan tres cuartos? Fijate en la dimensión de los cuadraditos. ¿Son todos iguales?" Volvería a hacer una pregunta. No cortaría el diálogo. Obviamente también el tema de la E, que dejó afuera.
>
> ---
>
> Entrevistado 3: Primero lo que te explicaba. Primero porque me parece que la A y la C no me parece que sean correctas, porque entiendo que tiene que estar representados en partes iguales.
>
> ---
>
> Entrevistado 5: [...] Entonces imagina que la B y la C son una barra de chocolate. Si tenemos cuatro niños, si agarramos la C... ¿Tú crees que todos los niños comerían la misma cantidad de chocolate si agarran la barra C que la barra B? ¿O habría algún niño que no esté de acuerdo con el

pedacito que recibe? Ahora, con la A, yo le diría "¿Tú crees que en la A, si fuera una piza (porque siempre recurrimos al ejemplo del chocolate), tú crees que los niños que coman de esa piza van a comer la misma cantidad los 3 niños que van a comer esos pedacitos grises?" Así le diría.

Entrevistado 7: [pausa]. [...] Ellos lo asocian a esto que él dice. Hay tres partes pintadas de cuatro. Y se ven los tres cuartos. Le preguntaría "En la opción A, todas las partes son iguales Víctor?" O en la parte C... Le haría visualizar.

Por otro lado, el E1 no reconoce claramente que la respuesta de Víctor es incorrecta y frente a la pregunta reiterada de si la respuesta es correcta piensa y evade la respuesta. A lo largo del diálogo logra identificar que la figura C no está dividida en partes congruentes (igualdad en cuanto a cantidad de superficie) y reconoce que cuando respondió a esta pregunta no lo tomó en cuenta, en este sentido, indica: “Me acabo de dar cuenta de algo que no me había dado cuenta en la prueba, cuando la hice. En realidad, la figura C no tiene cuatro reparticiones iguales” (E1, 2021). En consonancia con la respuesta brindada por E1 tenemos la de E4, pues al corregir la producción de Víctor indica que las opciones A, B y D son correctas pero que la C no. En palabras del propio entrevistado: “Le pondría que A, B y D sí me parece que son correctas, pero que C no porque no es proporcional... los cuadraditos no están proporcionalmente” (E4, 2021).

Al corregir la respuesta de Víctor, E6 inicialmente indica que la respuesta del estudiante es incorrecta porque incluye la opción C, en este sentido, expresa: “El C no podría ser porque el último cuadradito es más chiquito que los otros tres” (E6, 2021). Al continuar con la entrevista logra indicar que la opción A también es incorrecta, en consecuencia, señala: “[...]en realidad el primer parte sombreada de A, no representa lo mismo que la segunda y la tercera hilera” (E6, 2021).

En cuanto al reconocimiento de la dificultad de no tener en cuenta que las partes deben ser congruentes, que está presente en la respuesta de Víctor, inferimos que cinco de los entrevistados (E2, E3, E5, E6, E7) identifican dicha dificultad con claridad. En el caso de los otros dos entrevistados (E1 y E4), reconocen esta dificultad únicamente para el caso C, por lo que concluimos que no la reconocen con claridad. En este sentido, podemos ver que ellos mismos presentan dicha dificultad. En palabras de algunos de los entrevistados:

Entrevistado 4: Por ejemplo, acá cuando le preguntamos tres cuartos, él lo que hace es, cuenta los cuadraditos. Y dice "ta, si son tres los que están pintados... para representar tres cuartos tengo que tener tres pintados de cada figura". Sea un cuadrado, una circunferencia, no sé, él va a contar que tengamos tres cuadraditos nomás pintados. Que no tenga más que eso.

Entrevistado 6: En realidad él eligió la A, la B, la C y la D... claro porque, supongo que Víctor debe pensar, que los tres cuadraditos, que tiene que haber pintado sí o sí tres cuadraditos no importa si son más grandes o más chicos.

Entrevistado 7: [...]Ellos lo asocian a esto que él dice. Hay tres partes pintadas de cuatro. Y se ven los tres cuartos.

Conclusiones

A partir de la aplicación del cuestionario y de las entrevistas realizadas podemos ver que los futuros maestros reconocen las partes y el todo en fracciones menores a la unidad en contextos continuos. La fracción es vista como un conteo de partes tal como reporta Pazos (2009). Asimismo, se observan dificultades para "partir" y reconocer la unidad en colecciones discretas (Obando, 2003), para reconocer el todo cuando las fracciones son mayores a la unidad (Pazos, 2009) y para reconocer representaciones equivalentes cuando las unidades son geométricamente distintas y cuando las partes de la misma unidad son iguales en superficie, pero diferentes en forma.

En cuanto al conocimiento didáctico vemos que hay un conocimiento escaso, entre los entrevistados, sobre los errores que cometen los escolares. En particular, la dificultad que resulta más sencilla de identificar en la respuesta de los escolares es la de no reconocer que las partes en que se divide la unidad deben ser congruentes. Sin embargo, la dificultad que se relaciona con considerar que una parte puede estar dividida en otras partes (fracciones equivalentes) no es reconocida por los entrevistados. Para finalizar, vemos que la dificultad que se presenta al trabajar con conjuntos discretos, que implica considerar un grupo de partes como una parte no se reconoce.

Referencias bibliográficas

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 1-18. doi:10.1080/14794802.2018.1479981

Fandiño Pinilla, M. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae, 7,* 23-45.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C., & Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 204-221.

González Retana, J. F., & Eudave Muñoz, D. (2018). Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales. *Educación Matemática, 30*(2), 106-139. doi:10.248444/EM3002.05

Ivars, P., Buforn, A., & Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". *Acta Scientiae, 18*(4), 48-66.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A., Madrid, M., & Casas, J. (2016). *Errores de los estudiantes a maestro cuando trabajan con fracciones*. XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ni más ni menos (págs. 1-9). Universidad de Cádiz: SAEM Thales.

Llinares, S., & Sánchez, M. (1997). *Matemáticas: cultura y aprendizaje. Fracciones, N°4*. España: Síntesis.

Martínez, C., & Lascano, M. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. *Revista EMA*, 6(2), 159-179.

Montes, M., Contreras, L. C., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI*, (pp. 403-410). Universidad del País Vasco.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157-182.

Pazos, L. (2009). Las fracciones son un problema. *Quehacer educativo*, 40-45.

Rojas, Flores, & Carrillo. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema, 29*, 143-166.

semur
EDICIONES

ISBN: 978-9915-9642-0-1

9 789915 964201