ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE LA EMERGENCIA Y EVOLUCIÓN DEL RAZONAMIENTO FUNCIONAL

Juan D. Godino. *Universidad de Granada*

Presentación del tema

- Desarrollar un adecuado razonamiento funcional en los estudiantes requiere prestar atención al diseño y planificación de la enseñanza de las funciones desde los primeros niveles educativos.

- Esto supone considerar la diversidad de significados de la función y articularlos de manera progresiva, atendiendo a los niveles de generalidad y formalización presentes en las etapas de su evolución histórica.

- En esta conferencia os propongo revisar estudios históricos y epistemológicos sobre la función utilizando algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico para caracterizar distintos niveles de razonamiento funcional.

- En particular, aplico la interpretación del significado en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas relativas a la resolución de tipos de problemas.

  - Godino, J. D, Burgos M & Wilhelmi M. R. (2024). Onto-semiotic analysis of the emergence and evolution of functional reasoning. RIME 1(1), 09-37.
  - https://revistarime.ulagos.cl/index.php/rime/article/view/3181

- De acuerdo con investigaciones previas, identificamos significados parciales de la función que pueden ser considerados como parte del significado de referencia global en la planificación y gestión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones.

- Este estudio aporta una visión complementaria de las múltiples investigaciones que describen la emergencia del concepto de función en matemáticas con un enfoque histórico y epistemológico.

Motivación

Las funciones están por todas partes en las matemáticas y sus aplicaciones, aunque etiquetadas de diversas maneras: aplicación, transformación, permutación, operación, proceso, funcional, operador, secuencia, morfismo, funtores, autómata, máquina, que se utilizan según las necesidades y las oportunidades: Se prefiere función si el conjunto de valores es numérico, aplicación y transformación proceden de la geometría, pero sirven también, con ciertos atributos añadidos en estructuras algebraicas como los morfismos, prefijados con ciertas preposiciones o adjetivos… (Freudenthal, 1983, p. 496).

Antecedentes

- Clarificar la naturaleza y emergencia de las funciones ha sido el centro de atención de diversos trabajos históricos y epistemológicos (Biehler, 2005; Kleiner, 1989; 1993; 2012; Sfard, 1992; Youschevitch, 1976).

- También ha sido objeto de estudio en el campo de la educación matemática con el objetivo de describir y explicar las dificultades de los estudiantes en la comprensión del concepto de función (Dubinsky & Harel, 1992; Ruiz-Higueras, 1994; Sierpinska, 1992; Trujillo et al. (2023); Vinner & Dreyfus, 1989).

- Usualmente se ha puesto el énfasis en las distintas definiciones que han ido caracterizando los momentos históricos de desarrollo del concepto de función, o bien, en las dificultades de comprensión de los estudiantes de dichas definiciones.
- Ha predominado una visión conceptualista de las matemáticas, dejando en un segundo plano los problemas y prácticas matemáticas que motivan la emergencia y evolución del razonamiento funcional.
- Este enfoque también ha relegado la caracterización de niveles de su desarrollo desde la perspectiva histórico-cultural.

Objetivo

- En este trabajo aplicamos los supuestos y herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, 2023; Godino & Batanero, 1994; Godino et al., 2007) para analizar la emergencia del concepto de función y caracterizar los diversos significados parciales que se le atribuyen.
- https://enfoqueontosemiotico.ugr.es

- Asimismo, el modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática elaborado en el marco del EOS (Godino et al, 2015) puede ayudar a identificar niveles de emergencia del razonamiento funcional asociados a las etapas de evolución del concepto de función.

- La cuestión de qué se hace con las funciones, para qué sirven, es central en la reconstrucción de los significados de las funciones que se propone desde el EOS, ya que las situaciones-problema son la razón de ser, el motivo de la actividad matemática (Godino et al, 2021).

- El sistema de prácticas operativas y discursivas que se realizan para dar solución a determinados problemas de identificación de dependencias (covariación, correspondencia) entre variables, análisis y predicción de comportamientos, pone en juego *diversos tipos de objetos* (lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) y *procesos* (representación, traducción, definición, enunciación, cálculo sintáctico y analítico) que deben ser tenidos en cuenta.

- Esta visión amplia de la actividad matemática, su motivación y el uso de la trama de objetos y procesos implicados es la que incluimos en el constructo *razonamiento funcional*.

- La aproximación histórica-cultural (epistemológica) que hacemos en este trabajo nos lleva a usar la expresión razonamiento funcional en lugar de pensamiento funcional, usualmente referida a las habilidades y procesos cognitivos del sujeto.

Cuestiones que nos planteamos

- 1) ¿Cómo ha evolucionado el razonamiento funcional en las diferentes etapas históricas?
- 2) ¿Qué significados se han atribuido al concepto de función?
- 3) ¿Cómo se distinguen los diversos significados según nivel de generalidad y formalización?
- 4) ¿Qué implicaciones educativas se derivan de la visión global de la función y del razonamiento funcional?

- Para responder a estas cuestiones es necesario adoptar un marco teórico que proporcione herramientas para analizar la actividad matemática y los diversos tipos de objetos y procesos que intervienen en la misma.

- Debe asumir la pluralidad de significados para los constructos matemáticos y aportar criterios para identificar distintos niveles de generalidad y formalización de la actividad matemática.

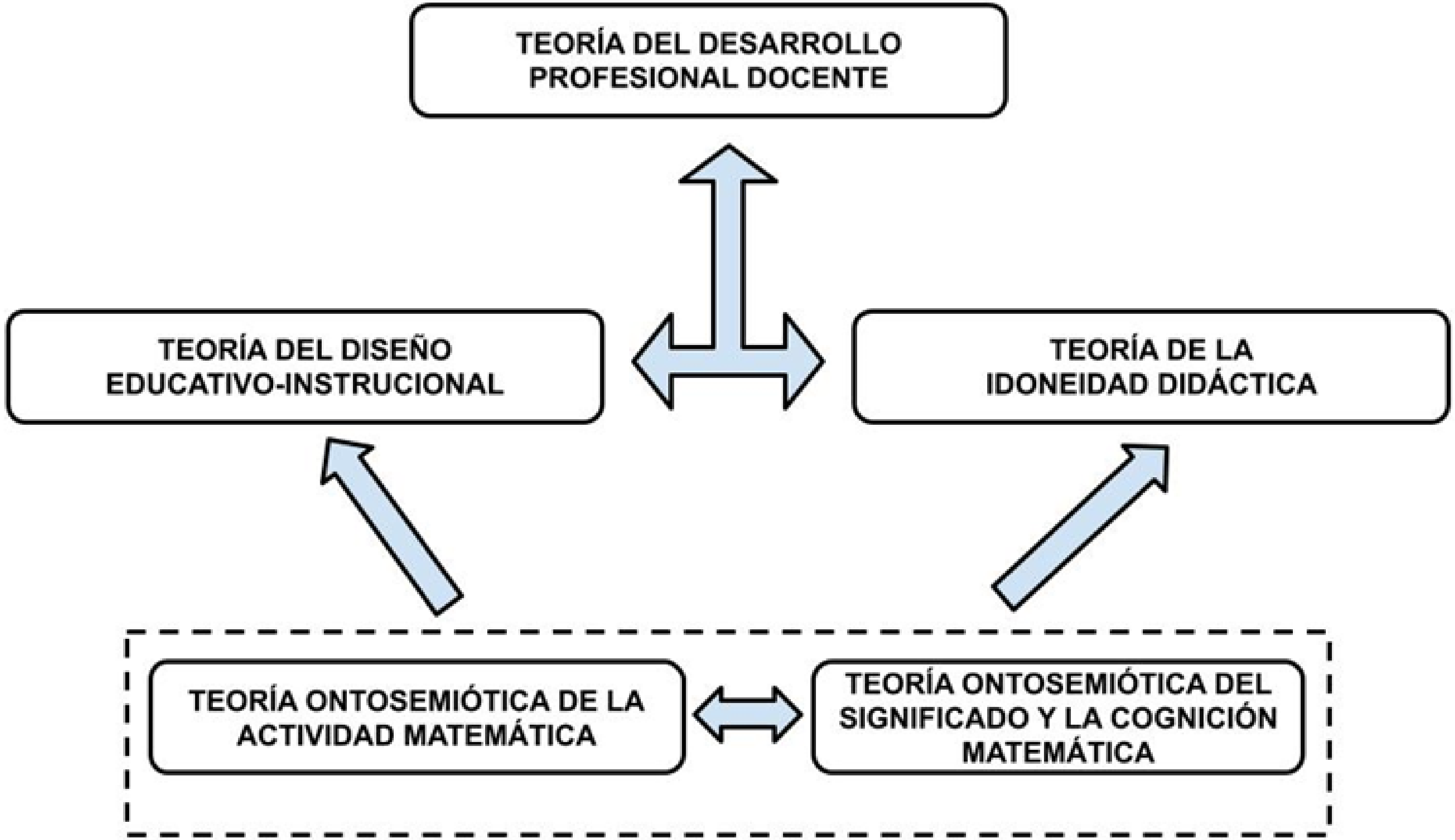
Marco teórico

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones.* McGraw Hill – Aula Magna.

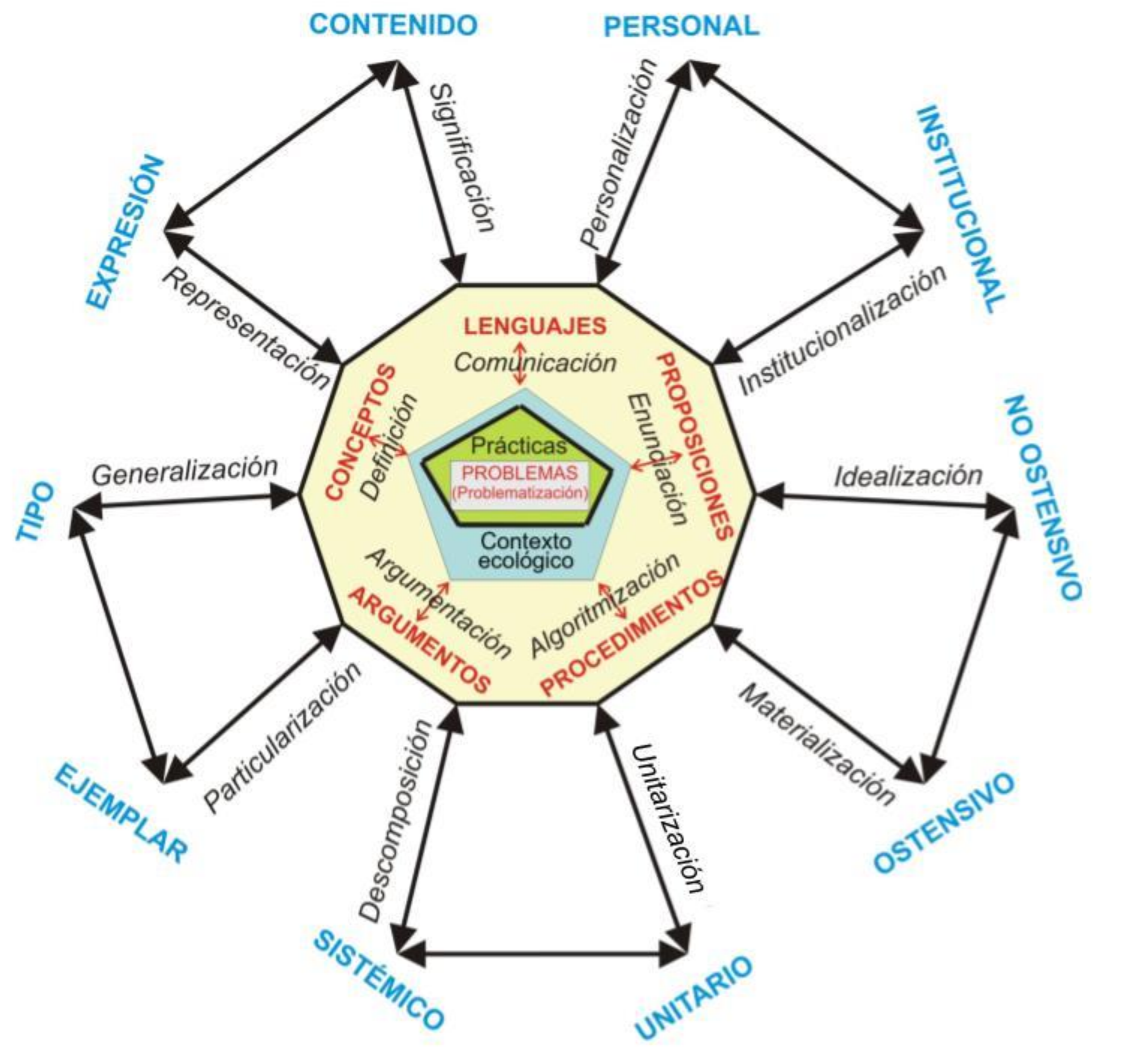
- *Un compendio creativo y sistemático de 30 años de investigación y desarrollo en educación matemática.*
- *Un sistema teórico integrador para la investigación y la práctica de la educación matemática.*

Sistema teórico del Enfoque Ontosemiótico

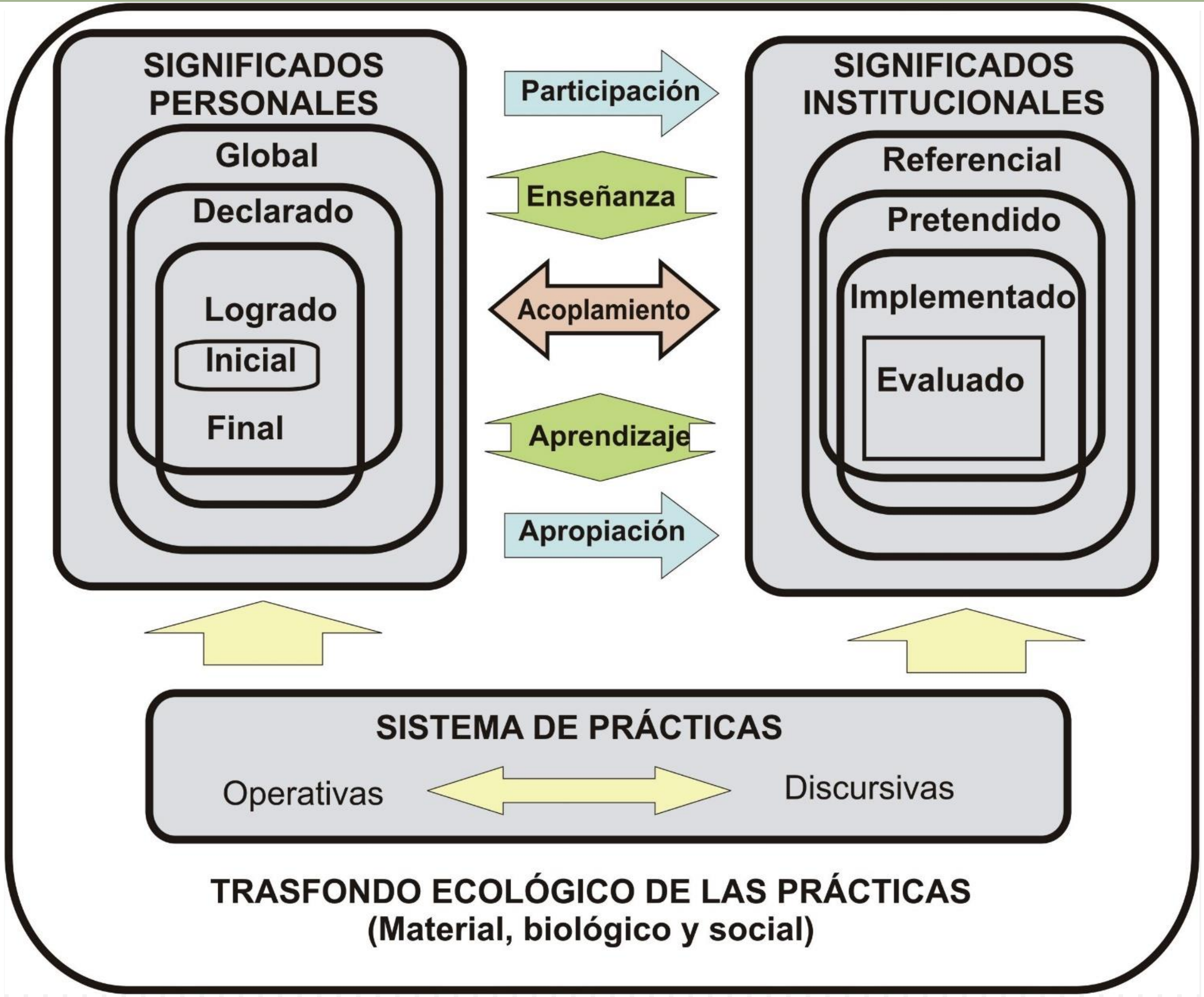
https://www.ugr.es/local/fqm126/



La matemática como actividad. Objetos emergentes



Significados institucionales y personales



Significados parciales del concepto de función

- operatorio-tabular,
- operatorio-gráfico,
- algebraico-geométrico,
- analítico,
- correspondencia arbitraria entre conjuntos numéricos
- conjuntista

Etapa I (Antigüedad). Significado operatorio-tabular

- La solución de problemas de previsión de cantidades desconocidas mediante la tabulación de datos conocidos aparece en los primeros registros históricos de actividad matemática en Babilonia y Egipto (2000 años AC).
- Los matemáticos babilonios utilizaban ampliamente para sus cálculos tablas sexagesimales de recíprocos, cuadrados y raíces cuadradas, cubos y raíces cúbicas.
- Las tablas de tipos diferentes se utilizaron en la astronomía babilónica para la compilación de efemérides del sol, la luna y los planetas.

- En el trabajo matemático que realizaban los babilonios, egipcios y griegos se observan rasgos que indican el manejo implícito de reglas generales.
- No se limitaron a una simple tabulación de datos empíricos, sino que también hacían interpolaciones y extrapolaciones indicando, por tanto, el reconocimiento de objetos con un cierto grado de generalidad.
- En definitiva, no encontramos el objeto función como ahora lo usamos, pero sí hay elementos característicos del razonamiento funcional.

- Como síntesis, en esta Etapa I (Antigüedad) se abordan problemas particulares de cálculo de cantidades de magnitudes a partir de la relación de dependencia entre magnitudes.
- Se trata de aplicaciones principalmente extramatemáticas (astronomía, agrimensura, etc.) aunque también intramatemáticas (tablas para calcular cuadrados, cubos, raíces cuadradas, etc.).
- Se elaboran procedimientos y se identifican propiedades con un primer grado de generalidad por lo que calificamos esta actividad como ***protofuncional de nivel I***.

Etapa II (Edad Media). Significado operatorio-gráfico

- En el siglo XIV, los matemáticos de las escuelas de Oxford (Heytesbury; Swineshead) y Paris (Oresme) hicieron progresos en la solución de problemas geométricos y cinemáticos con procedimientos diversos, particularmente gráficos, que involucran relaciones de dependencia entre variables.
- Para Oresme las cualidades o formas son fenómenos como el calor, la luz, el color, la densidad, la distancia, la velocidad, etc., que pueden poseer diversos grados de intensidad y que, en general, cambian continuamente dentro de unos límites dados.

- En la Etapa II (hasta los siglos XIV y XV), se continua con el estudio de casos concretos de dependencias entre dos magnitudes.
- El lenguaje ordinario, numérico y tabular se complementa con el gráfico.
- Se introducen conceptos abstractos como velocidad instantánea o puntual, aceleración, y cantidad variable, concebida como un grado o flujo de cualidad, esto es, abstracciones empíricas.
- Calificamos esta actividad como ***protofuncional del nivel II***.

Etapa III (Periodo Moderno). Significado geométrico-algebraico

- En el siglo XVII tuvieron lugar nuevos progresos en matemáticas con un fuerte impacto en el desarrollo del razonamiento funcional, en particular la creación del álgebra simbólica junto con la ampliación del concepto de número, que a finales del siglo XVI abarcaba no sólo todo el campo de los números reales, sino también los complejos (Yuschevitch, 1976, p 50).
- Estos avances eran necesarios para la introducción del concepto de función como relación entre conjuntos de números en lugar de "cantidades" y para la representación analítica de las funciones mediante fórmulas.

- En la Etapa III (Período Moderno, siglos XVI y XVII) empezaron a prevalecer las expresiones algebraicas para expresar las relaciones entre cantidades geométricas y cinemáticas.

- Aunque el foco principal de los trabajos de Descartes, Newton o Leibniz, entre otros, es el estudio de las curvas, el constructo función comienza su emergencia explícita, razón por la que asignamos un ***nivel III de razonamiento funcional*** a esta etapa.

Etapa IV (siglo XVIII). Significado analítico

- Durante las primeras décadas del siglo XVIII el cálculo se fue desligando gradualmente de su origen geométrico.
- El aparato algebraico desarrollado por Newton y Leibniz fue aumentado y explotado por sus sucesores para resolver problemas no directamente relacionados con la geometría de las curvas.
- Las fórmulas que relacionaban las variables y sus diferenciales empezaron a cobrar vida propia, independiente de los objetos geométricos que representaban.
- Leibniz y Johann Bernoulli buscaron un concepto para expresar esta nueva realidad y finalmente dieron con la idea de función, concepto que no había sido necesario en las etapas previas.

- Con Euler el concepto de función, ligado a sus expresiones analíticas, se consolida como el constructo clave de la actividad matemática pura o formal que caracteriza el análisis matemático.
- Se abordan problemas de clasificación de los tipos de funciones y sus propiedades (continuidad, derivabilidad, etc.).
- El tipo de actividad matemática que se realiza en esta etapa histórica, en la que interviene de manera central el concepto de función, explícitamente definido y con el cual se opera para producir nuevas funciones nos lleva a asignar el ***nivel IV al razonamiento funcional*** de esta etapa.

Etapa V (siglo XIX). Significado como correspondencia arbitraria entre conjuntos numéricos

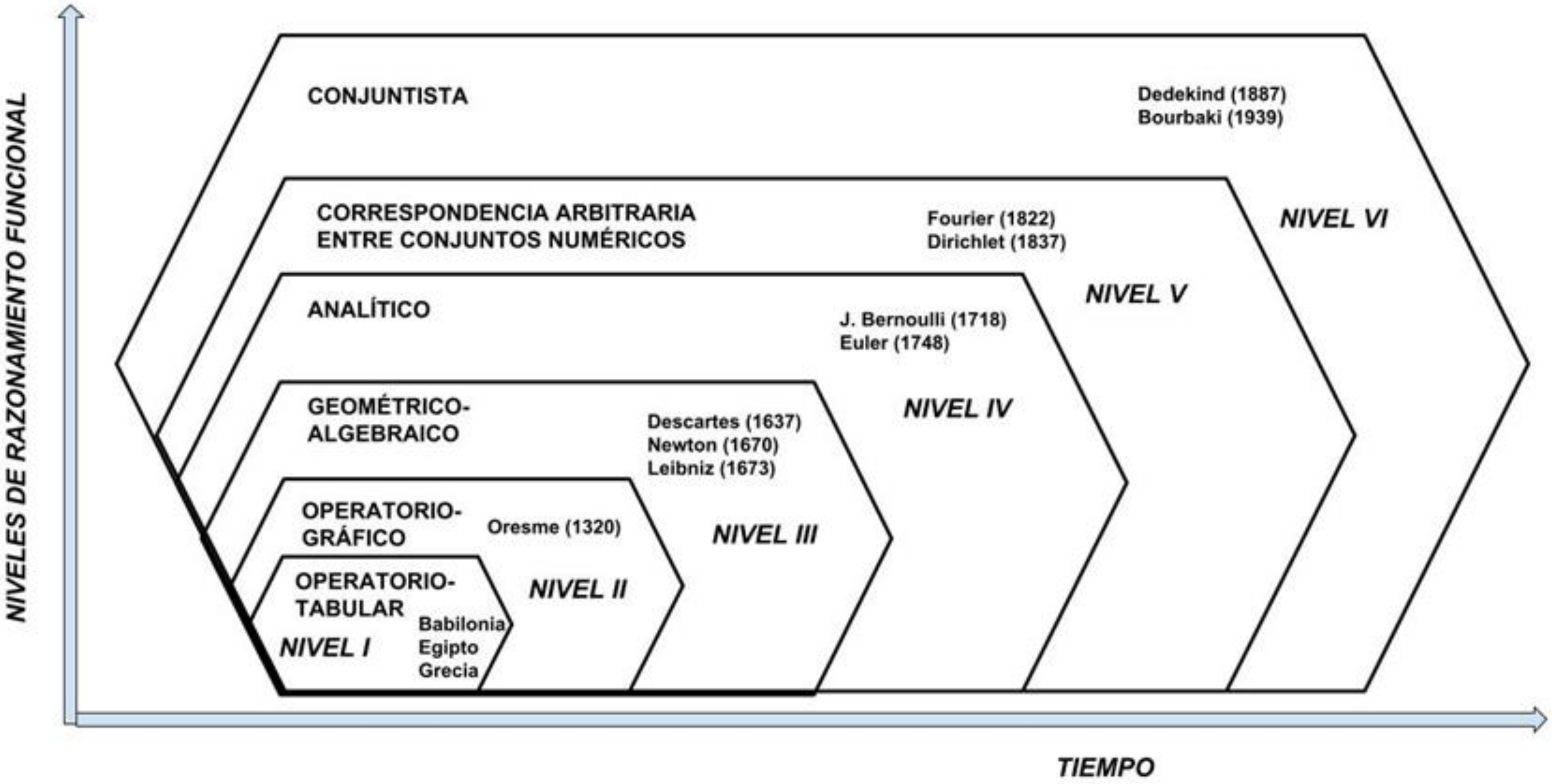
- A mediados del siglo XVIII la interpretación de las funciones como expresiones analíticas resultó inadecuada, de modo que durante ese mismo periodo se introdujo una nueva definición general de función, que más tarde se aceptó universalmente en el análisis matemático.
- La función como correspondencia arbitraria entre elementos de conjuntos numéricos (Dirichlet).
- Tiene lugar, por tanto, una nueva generalización del concepto de función que interpretamos como el ***nivel V de razonamiento funcional***.

Etapa VI. Significado conjuntista (correspondencia entre conjuntos arbitrarios)

- La noción de función como correspondencia entre conjuntos arbitrarios se fue imponiendo gradualmente en las matemáticas del siglo XX.
- En esta etapa se introduce la definición conjuntista y la función se convierte en el concepto vertebrador de la arquitectura de las matemáticas.
- Este ***nivel VI de razonamiento funcional*** se caracteriza, por tanto, por el uso que se hace de las estructuras algebraicas abstractas, los espacios funcionales y topológicos.

Significado holístico del concepto de función

Evolución del concepto de función. Niveles de razonamiento funcional



Juan D. Godino

- El diagrama de la Figura 2 resume la evolución del concepto de función y los niveles de razonamiento funcional.
- Es importante reconocer que a partir del momento en que aparecen definiciones explícitas de función (J. Bernoulli, Euler) tiene lugar un cambio sustancial en la naturaleza del concepto y en el tipo de actividad en que participa.
- Como ocurre a nivel ontogenético, según proponen las teorías del desarrollo cognitivo (Piaget, Dubinski, Sfard), se pasa de la etapa operatoria, procesual, a la etapa objetual en la que el concepto forma parte de esquemas cognitivos que permiten al sujeto comprender, tomar decisiones y actuar en situaciones similares.

- A nivel filogenético (histórico-cultural) la función pasa a formar parte del acervo de objetos matemáticos, como los números, las figuras geométricas, las ecuaciones.
- Se inventan diferentes tipos de funciones que modelizan una variedad de fenómenos, se estudian sus propiedades específicas (continuidad, derivabilidad, etc.), lo que permite definir nuevas funciones, y desempeñan un papel en un nuevo nicho ecológico caracterizado por la formalización, la generalización y el rigor.

- La evolución histórica del concepto de función refleja la tendencia o actitud propia del trabajo matemático de generalizar los conceptos y procedimientos para resolver problemas cada vez más complejos y generales.

- Esto es así por "la necesidad práctica de unificar mediante principios generales subyacentes aquellos aspectos de numerosas teorías que prometen tener un interés más que transitorio" (Bell, 1945, p. 470).

- Así, la formulación de la función en términos de correspondencia entre los elementos de conjuntos según criterios arbitrarios, no necesariamente mediante expresiones analíticas, responde a necesidades de dar cuenta de trabajos con funciones que no se podían dibujar ni expresar algebraicamente, como la función de Dirichlet.

- Otro salto cualitativo es el uso del lenguaje algebraico estructural en el estudio de las funciones, con el que se aborda fundamentalmente la conservación de las estructuras como resultado de aplicar los morfismos (funciones que conservan la estructura).

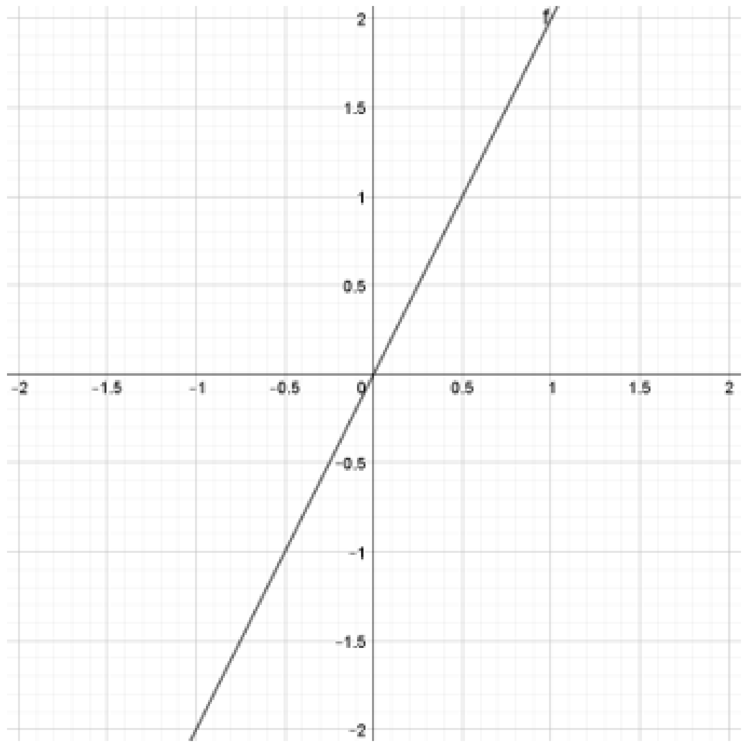
- Como puso de manifiesto Freudenthal (1983) existe una gran variedad fenomenológica en la que interviene el objeto función, que junto con diversas formas de expresión, procedimientos, proposiciones y argumentos caracterizan el razonamiento funcional.

- ¿Es posible identificar algún rasgo común que justifique el uso del mismo término función para nombrar la variedad de significados?
- La idea de dependencia, covariación y predicción es el nexo que conecta los tres primeros significados o usos de las funciones (Figura 2).

- Esa dependencia puede ser expresada de manera tabular, gráfica o analítica, pero en todo caso se relacionan elementos variables de conjuntos numéricos con otros números.

- La idea de variabilidad y dependencia se pierde en el significado conjuntista más general y abstracto que los anteriores, aunque persiste la idea de conexión o correspondencia entre objetos basada en algún tipo de regla o criterio.

En la figura mostramos un ejemplo de la progresiva generalización de la función, indicando que, en la secuencia progresiva de representaciones y en la actividad matemática que conlleva su uso, intervienen distintas especies del objeto intensivo (abstracto) función.

Nivel	Representación	Intensivo
I	Variable 1: 0, 1, 2, 3, 4, 5 Variable 2: 0, 2, 4, 6, 8, 10	De 1ª especie
II		De 2ª especie
III	$y = 2x, x \in (-\infty, \infty)$	De 2ª especie
IV	$y = ax, a \in \mathbf{R}, x \in D \subseteq (-\infty, \infty)$	De 3ª especie
V	$y = f(x), x \in C, f(x) \in C'$, con C y C' conjuntos numéricos	De 4ª especie
VI	$(y \sim f(x), A, B), x \in A, f(x) \in B$, con A y B conjuntos cualesquiera	De 5ª especie

- En el nivel I, la representación tabular indica que se usan colecciones finitas de números naturales particulares, por lo que la representación tabular de función es un intensivo de 1ª especie.
- En el nivel II, la gráfica continua indica la presencia de intervalos de números reales en los que la relación funcional se puede interpolar y extrapolar a números cualesquiera, razón por la que se interpreta como intensivo de 2ª especie de la noción de función.
- En el nivel III, la representación simbólica expresa el mismo nivel de generalidad y, por lo tanto, se clasifica también como intensivo de 2ª especie.

- En el nivel IV, la presencia del parámetro refiere a una familia de funciones, implicando el incremento en el grado de generalidad y, por tanto, en la especie de función.
- En el nivel V el incremento en la especie del intensivo se deriva del cambio en la generalidad del dominio y rango de la función, que pasan a ser conjuntos numéricos cualesquiera, y la expresión no necesariamente analítica.
- La 5ª especie del intensivo del nivel VI proviene de considerar una nueva generalidad, tanto en el tipo de relación como en naturaleza del dominio y rango de la correspondencia.

Implicaciones para la educación matemática

- El análisis del significado global del concepto de función es necesario para abordar las cuestiones relacionados con:

  - Las transformaciones y adaptaciones que los saberes matemáticos deben tener en los diversos niveles educativos.
  - El aprendizaje por parte de los estudiantes, en particular las dificultades y niveles de conocimiento y comprensión.
  - El diseño de procesos instruccionales con la máxima idoneidad didáctica relativa a los diversos contextos educativos.

- El modelo del significado holístico ayuda a relativizar la comprensión y ser conscientes de la complejidad de prácticas, objetos y procesos que se deben tener en cuenta en el progresivo desarrollo del razonamiento funcional.
- La historia nos dice cuándo, por qué y de qué forma el concepto de función se introdujo en las matemáticas y las razones de su progresiva generalización y formalización.
- Hemos visto que la definición conjuntista y sus aplicaciones en el álgebra abstracta, topología y otros campos se introdujo para abordar cuestiones de la matemática pura que nada tienen que ver con la matemática del cambio y la covariación.

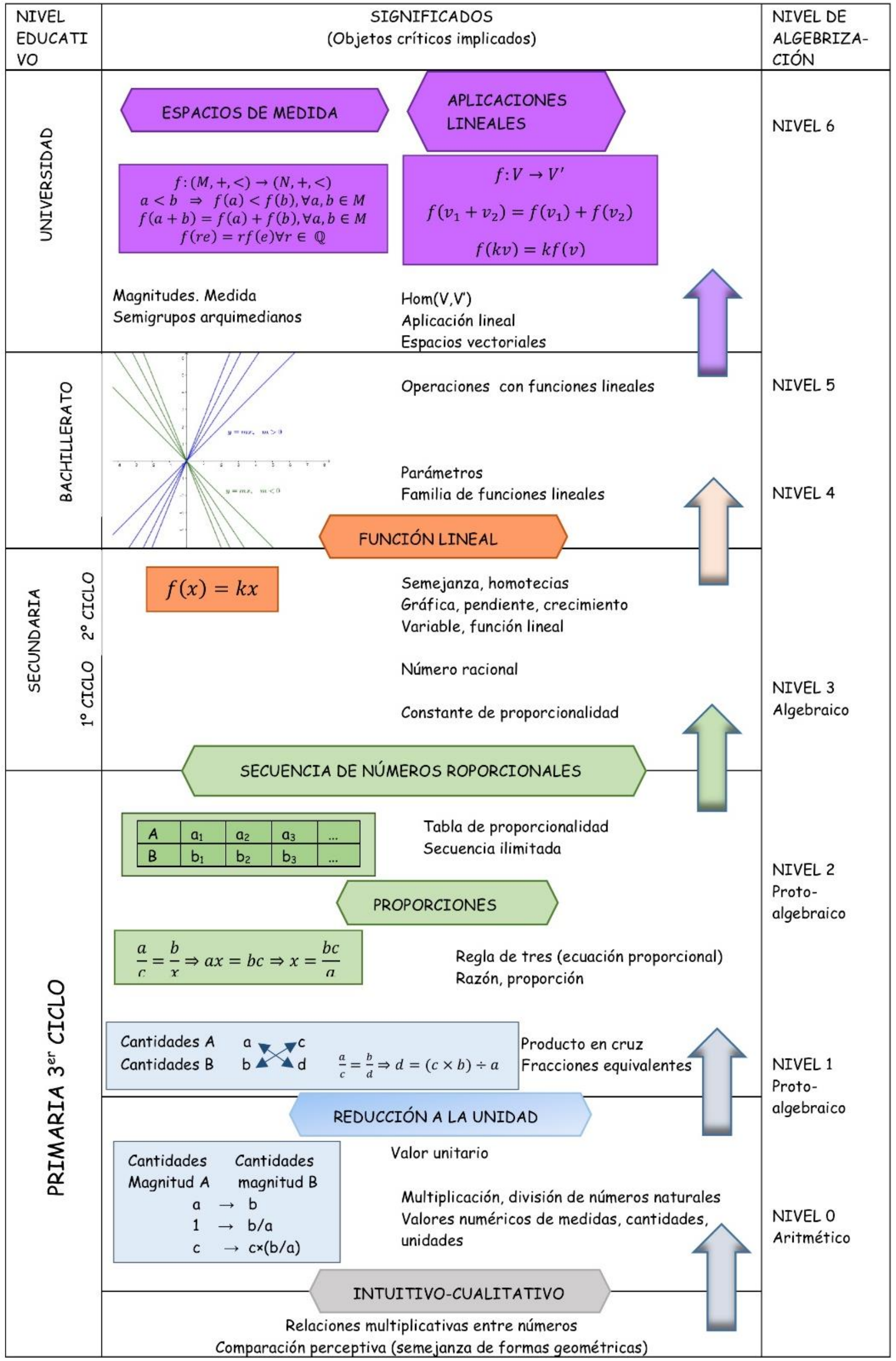
- La enseñanza del concepto de función debe tener en cuenta los diversos significados, identificando criterios para la selección de aquellos idóneos para los distintos niveles educativos y su progresiva articulación.

- Los estadios o fases en la construcción por los estudiantes del concepto de función que proponen diversas teorías cognitivas, como el modelo APOS (acción, proceso, objeto y esquema) (Dubinsky et al, 1992), o la concepción operacional y estructural (Sfard, 1992), deberían ser aplicadas a cada una de las especies del objeto función que componen cada significado.

Significados de la proporcionalidad según niveles de algebrización y educativo

El estudio de la función lineal está estrechamente ligado al de la proporcionalidad como explicamos en Burgos y Godino (2020):

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. AIEM, 18, 1-20.



Juan D. Godino

- Las secuencias de números proporcionales y el registro tabular permiten avanzar en el tratamiento de la proporcionalidad hacia niveles superiores, conectando los significados, aritmético (basado en relaciones aditivas y multiplicativas doble-mitad) y protoalgebraico (valor unitario, proporciones) con las propiedades de la función lineal.

- Las tablas de proporcionalidad recogen un número finito de parejas de valores correspondientes de cantidades de magnitudes proporcionales, y permiten hacer hipótesis sobre los valores, las variaciones y detectar relaciones posibles entre los números de la tabla.

- La inmersión de la relación de proporcionalidad en el universo de las funciones lineales permite considerar la función lineal como un caso más de posible relación entre variables numéricas y recurrir a las técnicas que el contexto funcional facilita.

- La función lineal deja paso en niveles superiores de algebrización a las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, donde las propiedades características de las funciones lineales sirven de definición y aparece una nueva álgebra de aplicaciones entre espacios vectoriales.

Conclusiones

- El análisis que hemos hecho de la función nos lleva a la conclusión de que parece poco adecuado hablar del "objeto función" en singular, o al menos reconocer que tal objeto tiene una estructura interna compleja.

- Cada una de las posibles definiciones lleva aparejada una configuración ontosemiótica, todas ellas interconectadas formando un conglomerado de configuraciones de prácticas, objetos y procesos.

- Es cierto que los distintos objetos-función comparten algunos rasgos o parecidos de familia que lleva a hablar del concepto de función, pero cuando estamos interesados por los procesos de enseñanza y aprendizaje no se puede empezar la casa por el tejado, esto es, por el objeto-función más general y abstracto.

- Incluso, lograr ese nivel superior de razonamiento funcional no será posible si previamente no se han trabajado los niveles previos.

Formación de profesores

- El reconocimiento de los diversos significados de las funciones constituye un aspecto importante de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático del profesor requerido para una enseñanza idónea de este contenido (Godino et al., 2017).

  - "El desempeño como profesores se puede ver seriamente perjudicado si no se complementa con una profundización en la formación epistemológica específica sobre la pluralidad de significados de los objetos matemáticos y las configuraciones de objetos y procesos en los cuales cristalizan tales significados" (Wilhelmi et al., 2014, p. 581).

- En el contexto educativo preuniversitario, la función va progresando desde representaciones tabulares sencillas, muchas veces asociadas a problemas de proporcionalidad directa con números naturales, hacía representaciones gráficas y simbólicas en relaciones algebraicas o trascendentes entre conjuntos numéricos en progresivos grados de generalización (números naturales, fraccionarios positivos, decimales positivos, enteros, racionales, reales, complejos).

- Esta evolución no es una mera acumulación de saberes lineales, sino que suponen un verdadero reto epistemológico que ha retado a los grandes matemáticos a lo largo de la historia.

- El profesor de matemáticas de un nivel educativo debe conocer las matemáticas escolares de ese nivel educativo, pero también debe poder articular esos conocimientos con los correspondientes a niveles posteriores.
- Esto supone conocer los diversos significados de los objetos matemáticos, tanto los informales como los formales y sus interconexiones.
- *La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas es una competencia que le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.*

ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE LA EMERGENCIA Y EVOLUCIÓN DEL RAZONAMIENTO FUNCIONAL

https://www.ugr.es/local/fqm126/index.html

Juan D. Godino. *Universidad de Granada*