Dedekind y Bourbaki: práctica matemática, números y estructuras

Maribel Patricia **Anacona**
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
maribel.anacona@correounivalle.edu.co
Edgar Fernando **Gálvez**
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
edgar.f.galvez@correounivalle.edu.co
Guillermo **Ortiz** Rico
Facultad de Ciencias, Universidad del Valle
Colombia
guillermo.ortiz@correounivalle.edu.co

Resumen

En este taller se ponen en discusión algunos elementos de orden histórico y teórico en torno a las nociones de número (natural y real) y estructura matemática a la luz del concepto filosófico de práctica matemática, con el propósito de ofrecer elementos que permitan re-significar la actividad profesional de un docente de matemáticas. Para tal efecto, nos centramos en los trabajos de Dedekind y Bourbaki como representantes -primero y último- del estructuralismo conjuntista. En la primera parte del taller se abordan los aspectos de orden teórico para luego ponerlos en consideración por parte de los asistentes, con el propósito de reconocer conjuntamente aspectos de impacto educativo en cada uno de los referentes teóricos tratados.

Palabras clave: práctica matemática; números naturales; números reales; estructuralismo matemático; historia y filosofía de las matemáticas; educación matemática; enseñanza universitaria.

Introducción

La actividad que proponemos en el marco de este evento concibe tres ejes o perspectivas de análisis principales que pueden ser de utilidad a la hora de evaluar la actividad profesional de un docente, en un contexto específico o tópico educativo. Se trata en primer lugar de una perspectiva histórica de las matemáticas, a partir de la cual identificamos un período crucial del desarrollo de las matemáticas modernas y contemporáneas; en particular, desde esta perspectiva priorizamos los trabajos de Richard Dedekind y del grupo Bourbaki, los cuales abarcan el período comprendido entre finales del siglo XIX y primera mitad del siglo XX; en segundo lugar, proponemos una perspectiva filosófica que tiene como horizonte una reflexión sobre la práctica matemática, es decir, un enfoque filosófico que pone en relieve la actividad del matemático; y, por último, una perspectiva teórico-conceptual en virtud de la cual situamos las dos perspectivas anteriores en el horizonte de unos referentes o productos matemáticos que juzgamos altamente sensibles en el contexto de la Educación Matemática: las nociones de número (natural y real) y de estructura matemática.

Contextualización histórica del estructuralismo en Matemáticas

La tradición tomada de Aristóteles y Euclides ha dejado marcadas trazas sobre las matemáticas, muy particularmente en la presentación del cálculo y el análisis de los siglos XVIII y XIX. Esta herencia hace énfasis en lo ontológico fundado en la noción de objeto-cantidad (geométrico-continuo y aritmético-discreto). Sin embargo, a finales del siglo XIX y fuertemente a inicios del XX, surge una nueva concepción con énfasis en lo simbólico y operacional que rivaliza con la tradición griega. La emergencia de esta última se caracteriza por la idea de colocar el álgebra como fundamento del análisis (Lagrange). La imagen de las matemáticas, vista en la tradición griega como "ciencia de la cantidad" cambia profundamente a finales del siglo XIX.

Los trabajos de Simón Stevin (1548-1620) constituyen, a nuestro juicio, el principio del fin de la tradición griega de las matemáticas. Stevin introduce en occidente la notación decimal para los números fraccionarios y define número como aquello por lo cual se expresa la cantidad de una cosa, lo que posibilita una noción de número asociado tanto a magnitudes discretas como a magnitudes continuas. Esto marca una diferencia sustancial con las prácticas euclidiano-aristotélicas[1]. La visión de número en Stevin fue dominante hasta mediados del siglo XIX, cuando surgen las primeras construcciones de los números reales por Cantor, Weierstrass, Heine y Dedekind en 1872.

Es claro que esta noción de cantidad muta hacia la estructuración a través de las teorías de conjuntos y las definiciones de número real. En líneas generales, cualquier intento de organizar lleva intrínsecamente una noción de estructura. En las teorías del conocimiento estos intentos dan lugar a la emergencia del estructuralismo. Los avances en los fundamentos de las matemáticas de los últimos 150 años muestran que las matemáticas se han desarrollado a la luz del paradigma estructuralista; por tanto, resulta natural considerarlo como un punto de partida esencial en la

[1] El concepto de número para los griegos se construye a partir de la oposición entre lo discreto y lo continuo. Para Stevin la cantidad corresponde a una abstracción sobre un contexto empírico mientras el número vive en un nivel estrictamente simbólico.

comprensión de las matemáticas[2]. Esta visión en las matemáticas es anticipada tempranamente por Dedekind en 1870's y puesta ampliamente en escena por el grupo Bourbaki en 1950's.

Dedekind, paradigma de la historia moderna de las matemáticas

La visión estructuralista de Richard Dedekind impactó de manera decidida el desarrollo de las matemáticas de finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Sus profundas reflexiones, su creatividad y sus nuevos métodos incidieron de manera significativa en las prácticas matemáticas de la época. Sus aportaciones en los distintos campos del conocimiento, se constituyeron en el motor que impulsó esta nueva forma de concebir las matemáticas. La obra de Dedekind ha sido pródigamente estudiada por matemáticos, historiadores y filósofos, sobre la base de un claro reconocimiento de la importancia de su aporte al desarrollo de las matemáticas modernas.

Nos ubicamos en Dedekind (1888) con su trabajo titulado *Qué son y para qué sirven los números*, el cual constituye, desde muchos puntos de vista un paradigma en la historia moderna de las matemáticas. Específicamente constituye un paradigma del quehacer matemático. Este aspecto resulta altamente importante en la perspectiva de la actividad propuesta pues nos abre espacio a la pregunta inicial ¿qué hizo? En el marco de la correspondiente respuesta aparecen inevitablemente intrincados tres paradigmas teóricos, considerados patrimonio de las matemáticas modernas o decimonónicas: primero, una *teoría (intuitiva) de conjuntos* (extensamente discutida y analizada desde múltiples desarrollos en historia y filosofía de las matemáticas), a partir de la cual obtiene una *definición axiomática los números naturales* (constituida en modelo teórico dominante de presentación de los números naturales en los contextos de la educación superior) y, como resultado subyacente a los dos anteriores, una noción de *estructura matemática* (que ha devenido el referente por excelencia de los filósofos estructuralistas contemporáneos).

Sin embargo, el enfoque filosófico que proponemos a favor de una reflexión educativa toma este resultado del *qué* (¿qué hace?) como punto de partida para ingresar en el plano propiamente de la reflexión filosófica sobre la práctica matemática, es decir el plano del *cómo* (*¿cómo lo hace?*) Desde este punto de vista, proponemos evaluar algunas acciones y decisiones que caracterizan la práctica de Dedekind en la elaboración de sus teorías. En este sentido, vale la pena aclarar desde dónde nos ubicamos en esta reflexión sobre la práctica matemática en el contexto de los autores propuestos: esta actividad no parte de una toma de posición *a priori* a favor o en contra de un enfoque fundacionista, en particular no parte de una concepción conjuntista o estructuralista de las matemáticas.

La noción de conjunto y estructura en Dedekind

Proponemos aquí unas preguntas articuladoras ¿Cuál es el rol de la noción de conjunto y de una teoría de conjuntos en la perspectiva de la definición del número natural? Según Dedekind, ¿es el número natural esencialmente un conjunto? Esta última pregunta de orden ontológico tiene como motivación contrastar aquella interpretación dominante durante casi todo el siglo XX y aún

[2] El advenimiento generalizado de la teoría de categorías constituye un magistral representante del estructuralismo; sin embargo, su consideración escapa a los intereses del taller.

en nuestros días (siglo XXI), según la cual la noción de conjunto y el lenguaje de conjuntos se constituyeron de facto en una suerte de fundamento de las matemáticas. En otras palabras, aquello que subyace a una noción u objeto matemático es un conjunto.

En contravía con una interpretación conjuntista del trabajo de Dedekind, muchos autores contemporáneos afirman que lo que realmente se halla detrás de aquella articulación conjuntista es la caracterización de una estructura formal. En otras palabras, todo el entramado conjuntista que va del parágrafo 1 al 70 es subsidiario de una noción de estructura matemática, la cual se articula fundamentalmente desde el parágrafo 71 y alcanza su mayor vuelo teórico con los teoremas de categoricidad. Estos últimos demuestran la identidad (isomofismo) de todos los sistemas simplemente infinitos. En este sentido, Benacerraf (1965) (*What numbers could not be*), por ejemplo, plantea un análisis según el cual, puesto en términos abusivos, “los números naturales de Dedekind no pueden ser conjuntos”. Sin embargo, la pregunta que nosotros queremos planearnos es si una y otra postura son consecuencia legitima de un análisis del trabajo de Dedekind o de su práctica.

La noción de conjunto y estructura en Bourbaki

Los conjuntos y más específicamente la teoría de conjuntos constituye la base angular de la propuesta estructuralista de Bourbaki. Las estructuras son expuestas en el capítulo 4 del libro I de los *Éléments de Mathématique*, una vez ha presentado su sistema axiomático para la teoría de conjuntos, en términos de su teoría lógico y formal (Anacona et al, 2014).

Bourbaki exhibe con detalle los conceptos necesarios para llegar a una definición abstracta y general de la noción de estructura. Se trata de un esqueleto formal denominado *especie de estructura*, el cual se constituye en un dispositivo conjuntista, suficientemente amplio y flexible, que alberga las diversas estructuras matemáticas. Una *especie de estructura* en una teoría está conformada por conjuntos de base principal, conjuntos auxiliares, una tipificación que caracteriza el tipo de estructura y los axiomas que se satisfacen en dicha estructura. Una vez se supera el excesivo y pesado formalismo empleado por Bourbaki para llegar a esta definición, emergen de forma nítida las diversas estructuras como casos particulares.

Obviamente, este potente mecanismo de unificación y clasificación, no es suficiente para el desarrollo de una teoría. Es necesario deducir nuevas estructuras y establecer puentes de comunicación que posibiliten el avance conceptual. La comunicación entre estructuras se establece a través de *isomorfismo* y *morfismos*. La construcción de las nuevas estructuras se puede hacer a través de combinaciones de dos o más especies de estructuras, agregando o quitando axiomas a una estructura dada y a través de procesos de derivación, entre los que se destacan las *estructuras iniciales y finales* y las *aplicaciones universales*.

Para Bourbaki existen tres grandes tipos de estructuras: las *algebraicas*, las *de orden* y las *topológicas*. Estas son las *estructuras madres* y están en el centro del universo matemático. Más allá de este primer núcleo se pueden encontrar las estructuras *múltiples*, en las que intervienen a la vez dos o más estructuras madres; y más lejos del centro se encuentran las teorías particulares, donde los elementos de los conjuntos están más individualizados.

Perspectiva filosófica: una reflexión sobre la práctica matemática.

Estamos en una renovación de los estudios sobre la filosofía de las matemáticas a través de la denominada *Filosofía de la práctica matemática* (FPM) que nos brinda elementos esenciales para el mejoramiento de las prácticas educativas. Esta nueva forma de enfrentar la filosofía de las matemáticas liderada inicialmente por Paolo Mancosu (2008) clasifica la filosofía de las matemáticas en dos grandes tradiciones: *la fundamentalista* que se centra en los fundamentos de las matemáticas y específicamente en la lógica para estudiar la ontología de los objetos matemáticos; y *la inconformista* donde se ubican todos aquellos que parten de principios generales (antagónicos a la primera corriente). Desde esta segunda tradición no existe un fundamento asertivo para la matemática, la matemática es falible y la lógica es insuficiente para analizar adecuadamente la matemática, su desarrollo y en general todos los que se centren en la práctica matemática. Él propone incorporar los planteamientos de la tradición inconformista para abordar temas gnoseológicos que tienen que ver con fecundidad conceptual, evidencia, visualización, razonamiento diagramático, comprensión, explicación y otros aspectos de la teoría del conocimiento matemático que son ortogonales a la ontología de los objetos matemáticos. En este marco general Mancosu en *Abstraction and Infinity* (2016) presenta un detallado seguimiento a las prácticas matemáticas de las definiciones por ab1stracción desde Euclides hasta los inicios del siglo XX con Frege, Peano y Russell entre otros. A esta visión de la FPM se han sumado un sinnúmero de importantes nombres como Jessica Carter, Colin McLarty y David Corfield.

De manera particular, Jessica Carter brinda ciertas precisiones sobre FPM, con una gran sobriedad que hemos considerado adecuada para el presente taller. Carter (2008) compara la afirmación “las matemáticas son el estudio de la estructura” con la práctica real de las matemáticas. Ella presenta dos ejemplos de la práctica matemática contemporánea donde la noción de estructura juega diferentes roles. En el primer caso, se define una estructura sobre un determinado conjunto. En primer lugar, se argumenta que este conjunto no puede considerarse como una estructura y, en segundo lugar, lo importante para la práctica matemática es la relación que existe entre la estructura y el conjunto. En el segundo caso, de la topología algebraica, un punto es que un objeto puede ser un lugar en diferentes estructuras. La estructura en la que se elige colocar el objeto depende de lo que se desee hacer con él. Nos precisa que las matemáticas ciertamente tratan con estructuras, pero que las estructuras pueden no ser todo lo que hay en las matemáticas. Para ella el estructuralismo es actualmente una de las filosofías matemáticas más prometedoras. La afirmación de que las matemáticas son el estudio de estructuras también parece estar respaldada por la práctica matemática. De hecho, los matemáticos suelen mencionar estructuras cuando hablan de su tema. Como ella refiere, en palabras de Eilenberg: “Entre las tendencias más notorias de las matemáticas modernas se encuentra el auge del álgebra moderna. Casi todas las teorías matemáticas actuales tienen una faceta algebraica. Las estructuras de las que se ocupa el álgebra moderna se han comparado con la sonrisa del gato de Cheshire en Alicia en el país de las maravillas, que permaneció visible después de que el propio gato se desvaneciera” (Eilenberg, 1969).

Carter se centra en diferentes nociones de estructura en matemáticas y se pregunta si se puede dar una noción uniforme de estructura que capture los usos de estructura en la práctica matemática. Es enfática en que la estructura que se tome para un determinado objeto depende de lo que se desee hacer con el objeto, destacando que la práctica matemática consta de actividades. Sostiene que el estructuralismo no refleja la práctica real de las matemáticas en la medida en que se afirma que las matemáticas solo se ocupan de la estructura. Para ella las matemáticas a veces estudian conjuntos, ya sea a través de las estructuras que tienen, o las estructuras que se les pueden dar o estructuras que se pueden definir sobre ellos. Con esto argumenta que el estructuralismo no refleja la práctica real de las matemáticas, en la medida en que se afirma que las matemáticas solo se ocupan de la estructura. En este sentido, ella precisa que “las matemáticas son el estudio de sistemas estructurados en lugar de estructuras”.

Perspectiva teórico conceptual: las nociones de número natural y real.

En primera instancia se trata de poner en relieve el estatuto epistémico de la noción de número natural a la luz de los actos teóricos llevados a cabo por Dedekind (1888). A partir de estas consideraciones, buscaremos centrar la atención en la noción de número real y las principales nociones implicadas, a partir de los trabajos de Dedekind (1872) y Bourbaki (1950).

La noción de número natural en Dedekind

En su obra ¿*Qué son y para qué sirven los números naturales*?, Dedekind ofrece una fundamentación (lógica y deductiva) para una región de las matemáticas, la aritmética, a través de una definición de $\mathbb{N}$; este proceso inicia con la articulación teórica de un universo “conjuntista”, cuya noción central es la de sistema, la cual, bajo ciertas consideraciones, se puede asimilar a la noción actual de conjunto. La formulación de este universo permite tejer una red teórico conceptual en la que se destacan nociones como: representación de sistemas (función entre conjuntos), sistemas similares (función biyectiva), cadena y comunidad de cadena (sistema o conjunto inductivo), sistema infinito, y, en particular, sistema simplemente infinito. La caracterización de este último tipo de sistemas es el objetivo principal de Dedekind: en el parágrafo 71 afirma que un sistema N es simplemente infinito si existe una función Φ sobre N (Φ: $N \longrightarrow N$) y un primer elemento 1, tal que cumple con las siguientes condiciones: i) la imagen de N bajo Φ es subconjunto de N ($\Phi(N) \subseteq N$), ii) a partir del elemento base “1” se tiene N, es decir la comunidad de cadenas (cumplen con la condición Φ: $A_i \longrightarrow A_i$) tienen a 1 como elemento común (la comunidad del elemento base 1), tomadas en su totalidad dan como resultado N; iii) el elemento base 1 no es elemento de la imagen de N bajo Φ ($1 \notin \Phi(N)$); y iv) Φ es una función uno a uno y sobre.

La anterior caracterización le permite a Dedekind en el parágrafo 73 tipificar los números naturales como un sistema simplemente infinito. Esta tipificación de los números naturales se da a través de un acto que él denomina de abstracción, el cual consiste en el acatamiento estricto y exclusivo de las cuatro condiciones expuestas en el parágrafo 71. Esto último le otorga a los números naturales el estatuto de creación libre del espíritu humano. Por todo lo anterior, a partir del parágrafo 71 se empieza a configurar entonces los que se puede denominar el núcleo estructuralista de la definición de Dedekind, y es allí donde nuestra actividad propone fijar inicialmente la atención los aspectos esenciales de este desarrollo.

La noción de número irracional en Dedekind

Dedekind en el artículo “Continuidad y números irracionales” publicado originalmente en 1872, introdujo su celebrado concepto de *cortadura*, con el propósito de construir los números irracionales. En términos generales el proceso es el siguiente: Dedekind define el concepto de *cortadura* (A_1, A_2) sobre los números racionales $\mathbb{Q}$ como una partición de este conjunto en dos clases A_1 y A_2 con la propiedad de que para todo $a \in A_1$ y para todo $b \in A_2$ se cumple $a < b$. Un ejemplo de cortadura es (A_1, A_2) donde $A_1 = \{x \in \mathbb{Q}: x \leq 3/2\}$ y $A_2 = \{x \in \mathbb{Q}: x > 3/2\}$. Para Dedekind esta cortadura es esencialmente igual a la cortadura (B_1, B_2) donde la clase $B_1 = \{x \in \mathbb{Q}: x < 3/2\}$ y $B_2 = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq 3/2\}$. Ambas cortaduras tienen la siguiente propiedad: existe un elemento mayor en la primera clase o un elemento menor en la segunda clase. Es decir existe un elemento separador de las dos clases que es $3/2$. Esta propiedad la satisfacen todas las cortaduras que son producidas por números racionales.

Sin embargo, Dedekind prueba que es posible separar el conjunto de los racionales en dos clases que verifican la propiedad de las cortaduras y sin embargo no cumplen con esta última propiedad. Es decir, no existe un máximo en la primera clase ni un mínimo en la segunda. Tal es el caso de la cortadura (A_1, A_2) donde $A_1 = \mathbb{Q}^- \cup \{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\}$ y $A_2 = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 > 2\}$. Esto pone en evidencia la discontinuidad de los racionales, la existencia de “huecos” en la recta racional. A estas cortaduras que no son producidas por números racionales, Dedekind las denomina “números irracionales”. Dedekind *decide*, en virtud de su necesidad lógica, la existencia de unos nuevos números llamados irracionales. A esto es lo que Dedekind llama “libre” creación. Esta libertad es independiente y autónoma con respecto a los condicionamientos de la evidencia sensible. Sin embargo, el acto de creación debe cumplir con una condición fundamental: el nuevo dominio numérico debe conservar intactas las propiedades del dominio anterior[3]. Esta condición permite cerrar el proceso agrupando lo anterior y lo nuevo bajo una sola denominación: *número real*.

La noción de número real en Bourbaki

Bourbaki no construye de manera específica el conjunto de los números reales. Bourbaki demuestra un teorema a través del cual completa un espacio uniforme. La demostración del teorema constituye una generalización del proceso de completación de un espacio métrico, realizado por Hausdorff en 1914, que a su vez es una generalización de la construcción de los reales por Cantor en 1872. La adaptación del teorema al caso de los racionales como espacio uniforme, equivale a una construcción de los reales.

En la demostración se parte de $\mathbb{Q}$ como espacio uniforme, donde la convergencia se estudia a través de filtros de Cauchy y filtros minimales de Cauchy. El filtro minimal de Cauchy “representa” a todos los filtros de Cauchy que tienen el mismo límite, independientemente de que el límite sea o no, un punto de $\mathbb{Q}$. De ahí que surja la consideración de formar el nuevo espacio con los filtros minimales de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$, el cual se identifica con $\widehat{\mathbb{Q}}$. Lo que sigue es demostrar que $\widehat{\mathbb{Q}}$ así constituido es un espacio completo. Para tal efecto, se debe verificar que

[3] Esta condición se conoce como *extensión* o *extensión algebraica*. Es el acto de pasar de un dominio, bien definido estructuralmente, a otro más rico e igualmente bien definido que conserva intactas la estructura del primero.

todo filtro de Cauchy en $\widehat{\mathbb{Q}}$ converge en dicho espacio. En líneas muy generales y sin entrar en detalles técnicos, el proceso es el siguiente: se parte de un filtro de Cauchy sobre $\widehat{\mathbb{Q}}$. Además, este filtro genera un filtro (extendido) sobre $\widehat{\mathbb{Q}}$ que es más fino que el filtro inicial de Cauchy y también converge en $\widehat{\mathbb{Q}}$. Pero si este nuevo filtro converge, el filtro inicial que es menos fino también converge. Por tanto, $\widehat{\mathbb{Q}}$ es completo.

Es importante señalar que las estructuras uniformes tienen un papel relevante en la demostración: a través de ellas se captura la noción de "entorno", condición esencial para el establecimiento de los filtros de Cauchy y para el estudio de la convergencia. Con esta construcción se tiene una versión de los números reales mucho más rica desde el punto de vista estructuralista, con la topología impregnada en su proceso de construcción y en la base de los desarrollos posteriores del análisis y de los espacios generales de convergencia.

A partir de éstas especificidades esperamos abrir una amplia discusión que aporte al análisis de uno de los aspectos más relevantes del fracaso en el primer año de universidad. Ese difícil paso de las matemáticas escolares (en buena medida algorítmicas) a las básicas universitarias (esencialmente estructuradas).

Referencias y bibliografía

Anacona, M., Arboleda, L.C., Pérez, J. (2014). On Bourbaki's axiomatic system for set theory. *Synthese* 191: 4069-4098.

Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *The* p*hilosophical review.* Vol. 74, No. 1, pp. 47-73

Bourbaki, N. (1965). Topologie générale. *Éléments de Mathématique*. Livre III. Paris : Hermann.

Bourbaki, N. (1966). Structures. Chapitre 4. *Éléments de Mathématique*. Deuxième édition. Paris: Hermann.

Carter, J. (2019). Philosophy of mathematical practice. Motivations, themes and prospects. *Philosophia mathematica (III).* Vol 27, No.1, pp.1-32.

Carter, J. (2008). Structuralism as a philosophy of mathematical practice. *Synthese* 163: 119-131

Ferreirós, J. (1998). *Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática,* Edición e introducción a cargo de José Ferreirós, Alianza Editorial, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Gálvez, F. (2018). *Le débat sur les notions d'objet et structure mathématique au sein du structuralisme contemporaine : les travaux de Shapiro, Parsons et Hellman.* Tesis doctoral, Universidad de Paris 1, Francia.

Mancosu, P. (2008) *The philosophy of mathematical practice* (Ed). Oxford University Press, Oxford.

Mancosu, P (2016) *Abstraction and Infinity.* Oxford University Press, Oxford.