El infinito matemático:
el vaivén entre la intuición y la formalización

Liliana Aurora **Tabares** Sánchez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
ltabaress@cinvestav.mx
Luis Enrique **Moreno** Armella
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México
lmorenoarmella@gmail.com
Isaías **Miranda** Viramontes
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria
México
imirandav@ipn.mx

Resumen

El desarrollo del concepto de infinito matemático dentro del laboratorio didáctico a través de las reflexiones que surgen de las nociones y percepciones personales y el análisis de algunas ideas de Galileo y Cantor respecto al infinito matemático nos invita a indagar en la relación de la intuición y la formalización para la comprensión del concepto. Por medio de la actividad de *El infinito en el espejo* buscamos observar y describir el vaivén de la intuición a formalización. Dicha actividad se aplicó a alumnos del primer semestre de la carrera de matemáticas aplicadas.

Palabras clave: Intuición; Formal; Laboratorio didáctico; sensorio-motriz.

Introducción

Si se tiene una colección de 2200 elementos y le quitamos un elemento, la que queda es obviamente menor que la original, aunque es una diferencia insignificante. Si el conjunto original tiene 22000 elementos, al quitarle uno, prácticamente no apreciaríamos la diferencia, aunque, en sentido estricto, disminuye el número de elementos. A medida que el conjunto considerado tiene más y más elementos, va revelando una cierta insensibilidad a la pérdida de pocos elementos, esto es, de un número pequeño con respecto al tamaño original del conjunto. Sin embargo, si el conjunto original es pequeño, digamos que tiene 5 elementos, perder uno es una pérdida sensible. Describimos así un experimento mental, sin embargo, al leerlo, sentimos cierta familiaridad con su línea argumental. Hemos interiorizado nuestras experiencias con el número y las hemos transformado en un modelo simbólico, mental, que podemos manipular como si se tratase de algo material.

En su libro, A mind so rare: The evolution of human consciousness, M. Donald (2001) explica cómo la cognición humana, aparte de su naturaleza analógica u holística, que compartimos con las demás especies, ha adquirido, evolutivamente, una capacidad de representación simbólica que duplica, en cierto sentido, el mundo de sus experiencias en el mundo material. Desde luego, esa capacidad simbólica adquiere gradualmente una autonomía (relativa) que se refleja, hoy en día, tanto en el mundo del arte como en el mundo de la ciencia. Y desde luego de las matemáticas.

La experiencia mental que venimos de narrar está vinculada al encuentro que tenemos a temprana edad con la sucesión de los números naturales. Contamos 1,2, 3..., y en algún momento presentimos que no vamos a acabar de contarlos todos por mucho que nos esforcemos. He ahí un lugar de encuentro entre lo inacabable y lo infinito —como una acción que no termina. Nuestra capacidad simbólica, aparte de permitirnos recodificar el mundo de nuestras experiencias, nos permite por ese camino, el acceso a una realidad que no experimenta ninguna otra especie: el mundo de lo abstracto. Nuestra capacidad cognitiva es híbrida: conocemos el mundo material a nuestro alrededor y podemos conocer y desarrollar un mundo cuya materia prima son los símbolos. Como si las estructuras simbólicas fuesen la versión externa de un mundo de experiencias que vive en nuestro interior. Hay un vaivén entre estos dos mundos cada vez que nos disponemos a entrar en contacto con un fragmento de conocimiento matemático, por ejemplo, que nos era desconocido: Intuición y formalismo. Inducción, generalización y deducción. Y allí está el infinito. Como una danza interminable, así es el acto cognitivo. Ha sido intentando ver desde esta mirada como hemos acercado a nuestros estudiantes a la noción del infinito matemático.

Continuemos ahora con nuestra discusión introductoria del infinito. Para ello, vayamos con nuestros estudiantes a leer un breve pasaje del libro de Galileo *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* (Galilei, 1638, pp. 31-33). Allí los personajes de Galileo discuten sobre que a cada número natural le podemos asociar su cuadrado. Entonces puede hacerse una lista de los cuadrados: 1, 4, 9, 16...etc. Galileo concluye que tal lista es inacabable, es decir, no termina. Pero entonces, debe aceptar que es infinita puesto que puede contar los miembros de esa lista: primero, segundo, tercero, cuarto,...y esto exige la utilización de *todos* los números naturales. Sin embargo, Galileo se enfrenta a una paradoja: necesita todos los naturales para *contar* los cuadrados...sin embargo, para él es claro que hay considerablemente más naturales que cuadrados. Los cuadrados son *una parte* de los naturales. Entonces concluye que no se puede aplicar, en estas circunstancias que el todo sea mayor que una parte propia. Así, logra eludir la situación paradójica.

Galileo estuvo cerca de abrir en aquel momento una nueva perspectiva para las matemáticas. No lo logró, aunque avanzó tanto como la *episteme* de su tiempo se lo permitió.

Uno vive en una atmósfera rodeado de cultura y modos de pensar que abren perspectivas sobre unas ideas y prácticamente hacen imposible la consideración de otras. Hasta que se produce lo que podríamos llamar la *zona de desarrollo potencial en una cultura* y surge un Cantor que la hace realidad.

Galileo miró la correspondencia de un natural m a su cuadrado m^2 no como una forma de comparar tamaños de conjuntos sino como una manera de contar cuántos cuadrados podía producir: uno, dos, tres... etc.

El matemático norteamericano J. Pierpont (1899) escribió, al respecto de la tensión entre nuestro *conocer* intuitivo, sensorio-motriz y la formalización del conocimiento matemático lo siguiente:

> Tenemos dos mundos: el mundo de nuestros sentidos y de nuestra intuición y el mundo del número [...] el análisis de hoy [está] construido sobre la noción de número, y sus verdades son las más sólidamente establecidas dentro del conocimiento humano. Sin embargo, no hay que pasar por alto que el precio que debemos pagar por ello es terrible: la total separación del mundo de los sentidos. (1899, p. 406)

Después de la lectura con nuestros estudiantes del pasaje de Galileo que comentamos antes, les formulamos la pregunta:

Qué ocurre si de la lista de los naturales borrásemos todos los números impares?

Como Galileo lo expresa, podemos *contar* los números pares y para ello tendremos que emplear *todos* los números naturales. Hasta aquí, estaban siguiendo el razonamiewnto de Galileo para contar los cuadrados. Pero ahora, estaba presente una noción matemática de la que carecía Galileo. La noción de conjunto, que permite concebir holísticamente la lista de los números pares. Es decir, concebirla como un todo, como un infinito completo, un infinito *actual*, como suele decirse, para distinguirlo de lo que ocurre con los procesos infinitos, como pretender *contar* la lista de los pares. La obstrcción que emergió aquí en los diálogos corresponde a lo que R. Duval (1983) ha denominado *la transparencia obscura*: mientras percibimos un conjunto como subconjunto propio de otro, se torna casi inaceptable ver al subconjunto como uno que tiene igual número de elementos (i.e.: equinumeroso) que el conjunto que lo contiene. Gravita en este hecho el que *el todo es mayor que cualquier parte propia*.

Sin pretender concluir que la situación presentada por los estudiantes y la situación paradójica que vivió Galileo son *la misma* en términos cognitivos, si podemos afirmar que hay una raíz común debido a lo que hemos percibido como un rasgo de la cognición y que tiene su explicación en las teorías corporizadas de la inteligencia humana. Siguiendo de cerca a M. Donald (p. 155, obra citada) lo explicamos, en palabras nuestras así: *en el mundo natural los sistemas nerviosos funcionan holísticamente, es decir, elaborando y almacenando las impresiones que se reciben. Pero la capacidad simbólica que hemos desarrollado (evolutivamente) permite crear un universo abstracto con un alto grado de independencia relativa*. Sin embargo, estos dos universos, el interior y el simbólico permanecen girando uno alrededor del otro. En ese sentido afirmamos que nuestra capacidad cognitiva es *híbrida*. El universo simbólico, desde luego, se desarrolla en una atmósfera cultural que además va reelaborando el mundo natural y tornándolo un mundo a su vez, condicionado por esa cultura.

Percibimos, aún lo más elemental del mundo material, eventualmente, desde un marco de interpretación desarrollado en nuestra atmósfera cultural. Por ello, la sentencia el todo es mayor que cada una de sus partes no solo se decodifica desde la lógica que desarrollamos culturalmente sino, al mismo tiempo, desde *lo que nos dice el cuerpo*. Es así que encontramos una sintonía plena con la afirmación de Pierpont: es demasiado alto el precio cognitivo que pagaríamos si pretendemos erigir una *frontera infranqueable* entre nuestra intuición y las versiones formalizadas de las matemáticas, en particular, las referidas al infinito.

De la reflexión cognitiva al laboratorio didáctico.

Esta será la característica esencial de un conjunto *actualmente* infinito en manos de G. Cantor: un conjunto es infinito si tiene subconjuntos propios con los que puede establecerse una *correspondencia* biunívoca. La idea de correspondencia biunivoca es un instrumento conceptual que ya estaba al alcance de Cantor. No de Galileo. En el ejemplo previo, aún quitándole una parte infinita al conjunto de los naturales, la parte que queda, o sea el subconjunto de los pares, es del “mismo tamaño” que el conjunto completo de los naturales ya que se pueden poner en correspondencia biunívoca, como las parejas en un baile: si ningún caballero se queda sentado, solo, sabremos de qué tamaño es el conjunto de caballeros: igual que el conjunto de sus parejas. Esta idea del establecimiento de una correspondencia biunívoca es la clave para *comparar* ya no solo *contar*, la lista de elementos de un conjunto. puede parecer un tanto artificial pero vemos que no es así: tantos obsequios para tantas personas allegadas. No necesitamos *contar* para saber que ambos conjuntos son de igual tamaño. Ahí estuvo el “error” de Galileo: contar lo llevó a aceptar que la lista de los cuadrados era infinita pero no pudo *ver* que era del mismo tamaño que la lista completa de los naturales. Pues no poseía un criterio para pensar en el tamaño de una colección.

La idea de correspondencia biunívoca que en realidad captura una fuerte intuición cognitiva, sirvió de base a Cantor para identificar la noción adecuada de conjunto infinito —como hemos comentado anteriormente. Una idea traída de nuestra experiencia y llevada al mundo virtual de las matemáticas. Esta discusión generó un interés pronunciado entre los participantes del laboratorio cuyos conocimientos y reflexiones previas no habían estado orientadas a tomar conciencia de cómo una idea tan (aparentemente) simple como es la correspondencia biunívoca entre dos conjuntos traía *encerrada* la llave para acceder al infinito actual que existe en esa realidad virtual llamada matemáticas.

Era el momento de reflexionar sobre cómo las intuiciones originales, que ellos tenían sobre el número de elementos de un conjunto, que se obtenía contando, debían ser “olvidadas” cuando se trataba de conjuntos infinitos. *Lo veo pero no lo creo* escribió G. Cantor en una carta a R. Dedekind frente a este fenómeno de los conjuntos infinitos (Zimmerman, 2013, p. 452). Los participantes, como le había ocurrido a Cantor, lo veían pero se sentían forzados a aceptar (aunque no lo creyeran) este comportamiento de los conjuntos infinitos, que rompía con la añeja intuición de que el todo era siempre mayor que cada una de sus partes.

Las intuiciones son las consecuencias inarticuladas de la corporización —que adquirimos a través de nuestras experiencias en el mundo humano, aunque no podamos hacerlas explícitas. No las podemos cambiar a voluntad. Ocurre que nuestras intuiciones (sobre un tema más o menos conocido por ejemplo) no están sometidas a un estricto control lógico-deductivo y por ello, su nivel de coherencia es local. Si decimos el todo es mayor que cada una de sus partes, nos parece aceptable hasta que recordamos o aprendemos que podemos poner en correspondencia los naturales con los pares. Entonces tenemos que fijar límites para esa proposición que parecía tan natural como para tomarla como universal.

A través de la educación llega el momento cuando la parte lógica de nuestro pensamiento– de nuestra racionalidad–se *impone* (al menos transitoriamente) sobre nuestras intuiciones, si se nos permite decirlo así. Aunque esta parte lógica de nuestro pensamiento esconde posiblemente siempre, una intuición fragmentada o separada del tren inicial de nuestro pensar.

Nuestras experiencias en el salón de clases hicieron tangible la certeza que, para los estudiantes, el aprender lo básico sobre el infinito era enfrentarse de manera abrupta a un territorio accidentado a lo largo del cual resultaba riesgoso y allí sentían que estaban sin los recursos necesarios para abordar los problemas que planteaba la nueva demanda cognitiva. Entonces: *¿cómo podíamos enfrentar el problema didáctico de iniciar el estudio del infinito entendiendo que el problema de fondo es el desarrollo del significado una vez que los estudiantes se enfrentan a un terreno formalizado?* Frente a la tensión subyacente, era necesaria una transición. La transición de una fluidez instrumental a una fluidez cognitiva es un problema educativo de interés global. En efecto, lo simple desde el punto de vista lógico, formal, no necesariamente coincide con lo simple desde el punto de vista cognitivo. Aunque ambos aspectos son partes constitutivas de la cognición humana.

Experimentación y búsqueda

La actividad de *El infinito en el espejo* es parte de una secuencia de actividades que tiene como propósito reconocer el vaivén entre la concepción intuitiva del concepto de infinito y la formalización que genera la necesidad de concretar una respuesta lógicamente matemática (lo formal). (La actividad es tomada y adaptada de: Prieto Sánchez, J.A., Fernández Escalona, C. ,2017).

Reflexión de Omar en la actividad *El infinito en el espejo*

Al reflexionar sobre cómo serían los reflejos de las bolas en el espejo si se van quitando de una en una Omar hace la comparación directa entre las cantidades de bolas que se reflejan.

> Omar: Intuitivamente los infinitos son más grandes y eso depende, si es uno (se refiere a una bolita) entonces va a ser más chiquito que un infinito de nueve (se refiere a nueve bolas), pero al mismo tiempo no puede ser más grande porque al ser números naturales siguen perteneciendo a un mismo infinito.

En esta afirmación Omar especifica claramente que su intuición le hace pesar en que sería dos infinitos de distintos tamaños, pero al reconocer que en ambos casos la cantidad de bolas están relacionada con los números naturales notamos como su conocimiento matemático más formal lo lleva a la conclusión de que serían infinitos del mismo tamaño.

Omar continua con su reflexión.

> Omar: *O sea, intuitivamente parece que es más grande, pero si le metemos matemáticas no sigue siendo el mismo infinito de números naturales y no puede haber infinitos diferentes de numero naturales porque es un mismo infinito*.

Decir "pero si le metemos matemáticas" deja ver como él busca la justificación desde el enfoque lógico que la brinda su educación matemática.

Dentro de la reflexión que Omar continuó desarrollando en la actividad de los espejos habla de la existencia de distintos tamaños de infinitos:

> Omar: *Había dicho que hay infinitos más grandes como los de los números reales que es porque hay números irracionales como pi y fracciones como1/4 que cada uno se dispara a infinito. Entonces cada uno tiene sus infinitos y por eso es un infinito más grande. Porque son como muchos infinitos combinados en uno solo entonces es más grande que un solo infinito de una solo cosa, los números naturales*.

Omar expresa de forma intuitiva lo que para él son los números reales y nos permite ver que ahora su intuición está relacionada con conceptos matemáticos (una intuición *refinada*).

> Omar: *Entonces, intuitivamente si pones más bolas es un infinito más grande, pero si les pones matemáticas pues no. Pero después de los que discutimos ahorita, pues no, sigo en conflicto pensando que la teoría puede funcionar, si es teórico es posible*.

Aunque muestra en su reflexión el vaivén entre la intuición y la formalización para él resulta difícil concretarlo en una sola idea, él busca separar lo que identifica como material y existente en los conceptos abstractos.

> Omar: *Es que no es factible que exista un infinito material, ni siquiera el espacio que sabemos que se está expandiendo, puede que vaya creciendo a cierto ritmo, pero no sabemos si es infinito o no porque si sigue creciendo significa que no ha parado y si para no sabremos nunca porque no nos daríamos cuenta. Entonces por eso no es factible medir un infinito porque no tenemos un infinito material*.

En la reflexión que lleva a cabo Omar se ve el vaivén entre los intuitivo y lo formalizado, pues incluso él identifica la necesidad de (sus términos) "meterle matemáticas". Podemos ver que para él no es suficiente la intuición física para explicar lo que ve de manera material si esto se proyecta a un proceso infinito. También podemos observar la necesidad de herramientas cognitivas que lo ayuden a interpretar y conjugar su experiencia física con sus conocimientos matemáticos acerca de los números naturales y los reales.

Conclusión y perspectivas

Dentro de la experimentación llevada a cabo con los estudiantes de la licenciatura en matemáticas aplicadas se puede distinguir ya la tensión entre las intuiciones y el acercamiento formal vía la correspondencia biunívoca al explorar el infinito actual. Nuestro trabajo se localiza en el campo de la *cognición corporizada*, tal como ha sido desarrollada por M. Donald y Lakoff-Núñez en los libros referenciados en este trabajo. La noción de infinito actual vive su vida conceptual entre la experiencia sensoriomotriz y las formulaciones simbólicas propias de las matemáticas. Pero el reemplazo prematuro de las ideas intuitivas —que en realidad son consecuencias inarticuladas de la corporización, por la formalización cantoriana genera obstrucciones cognitivas difíciles de superar para los estudiantes. Allí emerge como una necesidad didáctica, la noción de metáfora conceptual (Lakoff-Núñez) que vincule las intuiciones con su eventual formalización. Todos los casos de infinito en matemáticas, de acuerdo con Lakoff-Núñez (p. 158) por ejemplo, límites, series infinitas, conjuntos infinitos y demás, corresponden a procesos que no terminan pero que nosotros los conceptualizamos como si en efecto, tuviesen un final. De nuevo: los seres humanos podemos *imaginar* el resultado de un proceso que no termina. Es el caso de la existencia de los números irracionales definidos mediante una colección infinita de dígitos que ni siquiera podemos *conocer* completamente, excepto en esa otra dimensión de nuestras experiencias cognitivas como lo es la realidad virtual de las matemáticas y demás mundos simbólicos creados.

Referencias y bibliografía

Duval, R. (1983). L´obstacle du dedoublement des objects mathemátique. Educational Studies in Mathematics 14 (358-414)

Galilei. G. (1638/1954). Discourses and Mathematical Demostrations, concerning two new sciences.Dover edition, New York.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. Basic Books, New York.

Maor, E. (1987). To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite. Birkha¨user, Boston.

Pierpont, J. (1899). On the arithmetization of mathematics. Bulletin of the American Mathematical Society, 5(8), 394-406.

Prieto Sánchez, J.A., Fernández -Escalona, C. (2017). Estudio del infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano con la ayuda de una experiencia física de espejos paralelos. En Codina A., Puig, L., Arnau, D., Sánchez, M.T., Montoro, A. B., Claros, J., Arnal, M., Baeza, M. A. (Eds.) Investigación en pensamiento numérico y algebraico (pp. 11-18). Madrid: Universidad Rey Juan Carlos, SEIEM.

Tall, D. (2001). Conceptual and Formal Infinities. Educational Studies in Mathematics 48: 199–238.

Zimmerman, S. (2013). I believe it, but I don´t see it. International Journal of Mathematic Education in Science and Technology, 44(3), 452-456.