El Sistema de Numeración Decimal y la continuidad de los números reales: aportes de la historia de las Matemáticas en Colombia

Gilberto **Obando** Zapata
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

En 1856 Indalecio Lievano publicó su libro *Tratado de Aritmética Elemental*. En el presenta una fundamentación de los números (naturales, racionales y reales) con base en el Sistema de Numeración Decimal. Además, aborda un problema central de las matemáticas en la primera mitad del siglo XIX: la continuidad de los números reales. Inicialmente discute las propiedades de los números y sus operaciones, la representación de los números en el Sistema de Numeración Decimal y propone una solución a la continuidad de los números reales a partir de la notación decimal de los números. Lo importante de esta solución es que se adelanta unos 20 años a las soluciones ya clásicas de Cantor (1915) y Dedekind (1927). Así, a partir de un análisis de las prácticas matemáticas (Ferreirós, 2016; Obando, 2021, 2015) en el taller discutiremos como Indalecio Liévano presenta la solución a un problema sin resolver en la época.

Palabras Clave: Historia y Educación matemática; Números reales; Sistema de numeración decimal; Pensamiento Numérico; Historia de la matemática;

El autor y su obra

Indalecio Liévano Nació en Carmen de Apicalá el 21 de mayo de 1834; Estudio en el Colegio Militar, donde fue alumno destacado de **Lino de Pombo** y de **Aimé Bergeron**. En 1856 publica su obra *Tratado de Aritmética.* También fue autor de *Investigaciones Científicas*, 1871. *Tratado de Álgebra*, 1875. Fue profesor de Matemáticas y Astronomía en el Colegio de San Bartolomé y en la Universidad Nacional. Fundador de la Sociedad Colombiana de Ingenieros.

Liévano es parte de una élite intelectual colombiana, que incluye a Lino de Pombo, Rafael Pombo, José María Villa y Julio Garavito, entre otros, que lideraron el desarrollo político del país naciente con el objetivo de proyectarlo en el mundo moderno del desarrollo industrial. Es heredero de una tradición nacionalista que buscaba los ideales de la ciencia y la política al servicio del estado a través de la ciencia y la educación. En esto sigue la influencia de próceres de la independencia como Francisco José de Caldas y de su maestro Lino de Pombo, a quien dedica su libro.

¿De qué modo podria yo corresponder a las distinguidas consideraciones con que me habeis estimulado al estudio de esta ciencia tan importante? ¿De qué modo corresponder por mi parte a vuestro ardiente celo en la enseñanza de ella, i a vuestros vehementes deseos de trasmitir a la juventud los vastos conocimientos que poseeis, contribuyendo de tal modo, el mas eficaz sin duda, al progreso i engrandecimiento de nuestra Patria? A estas preguntas que hace tiempo me dirijo a mí mismo, no he vacilado en responder siempre: "coadyuvando su celo patriótico, satisfaciendo sus filantrópicos deseos, imitando su ejemplo."

Cumplir con estos preceptos de mi gratitud ácia vos i de mi amor a la República, tales son hoi los objetos de todos mis esfuerzos.

Figura 1. Dedicatoria a su profesor Lino de Pombo (Liévano, 1856, p. 4)

Su libro, *Tratado de Aritmética,* publicado en 1856, no solo es una obra con valor científico, sino también con valor político. La figura 1 muestra un fragmento tomado de la dedicatoria a Lino de Pombo, dónde se deja ver el interés político de brindar una formación matemática a los futuros ciudadanos de la república naciente: *formar en matemáticas, para engrandecer la Patria*. Esta misma intencionalidad política se puede ver en el prólogo: "Pero estas mis perennes investigaciones, con espíritu de esactitud, *a fin de ser útil a mi patria*, me han sujerido últimamente el plan riguroso de esposicion que tengo el honor ahora de presentar al público […]"[1] (Líevano, 1856, p. 5, cursiva en el original).

El autor presenta una obra que se aparta de la tradición Euclidiana en tres aspectos principales: (i) la presentación de los números a partir de cantidades y sus medidas, (ii) la distinción entre cantidades continuas y discretas, y (iii) la forma en que trata con el infinito matemático. La obra muestra un esfuerzo por presentar conceptos intuitivos de la aritmética de manera rigurosa, basada en axiomas y teoremas con sus demostraciones. El libro "Tratado de Aritmética" se divide en dos partes con siete y cuatro lecciones respectivamente. La primera se dedica a los conceptos fundamentales de los números y sus operaciones básicas, y la segunda a la potenciación y radicación, las razones y proporciones, y algunas aplicaciones comerciales.

[1] En las citas textuales del autor, se ha conservado la grafía original, y, por lo tanto, lo que parecen faltas de redacción u ortografía son las formas adecuadas de escribir en la época.

Sobre el análisis histórico

Se asume una noción de *práctica*, entendida como:

> forma de actividad humana cooperativa socialmente establecida en la que una organización característica de las acciones y actividades (*haceres*) son comprensibles en términos de la organización de ideas relevantes en discursos característicos (*decires*), y cuando las personas y los objetos involucrados se distribuyen en organizaciones características de relaciones (*labor*), y cuando este complejo de decires, haceres y relaciones se 'ponen juntos' en un proyecto distintivo". (Kemmis, Wilkinson, Edwards-Groves, Hardy, & Grootenboer, 2014, p. 31).

En este sentido, la *práctica* es situada históricamente (en un tiempo y lugar específico); es sistemática y estructurada brindando un marco (sentido y significado) a la actividad concreta de los sujetos. Además, la actividad de los sujetos es reflexiva con respecto a la *práctica*: dispone la acción del individuo en una dirección específica (disposición), pero éste reflexiona sobre la práctica a partir de su actividad (posicionamiento), llegando incluso a transformarla (Subjetividad).

Se parte de la noción de sistemas de práctica matemática (Obando, 2015) a partir de 5 elementos: instrumentos, procedimientos, objetos, conceptos y formas de enunciación. Estas ideas se ponen en conjunción con la noción de marco presentada por Ferrreiros (2016) para caracterizar una práctica matemática: *marcos simbólicos*, *marcos teóricos*, y *agencia* (Ferreirós, 2016).

Los *marcos simbólicos* son el conjunto de construcciones culturales (instrumentos) que dan forma y estructura a la acción de los sujetos en contextos específicos de su práctica. Para las matemáticas, se tienen: las representaciones (dibujos, ideogramas, pictogramas, formas icónicas, símbolos, gráficos, tablas, etc.); los artefactos que median instrumentalmente la acción de los sujetos (instrumentos para calcular, medir, construir representaciones, comunicar – oralidad y escritura) las expresiones técnicas no necesariamente especializadas (maneras de nombrar, decir y de escribir –si la hay) y los métodos simbólicos (técnicas y procedimientos formales e informales).

Un *marco teórico* es el conjunto de discursos (no necesariamente formalizados), de lenguajes formales (si los hay), constituidos en relación con la práctica, y que le dan su soporte epistémico. En este se delimitan entonces, los objetos de conocimiento (y los conceptos elaborados sobre ellos); las formas de enunciación (explicaciones, formas de razonamiento, formas de argumentación –entre ellas la demostración–, formas discursivas, etc.) validas en el contexto de la práctica; cuestiones abiertas (problemas –de diferente naturaleza, no necesariamente matemáticos–, conjeturas, hipótesis) consideradas importantes.

La *agencia*, por su parte, relaciona los elementos de orden cultural (instrumentos, comunidades –no necesariamente científicas–, cosmovisiones, visiones matemáticas) con la actividad de los sujetos (subjetividades). En este sentido, la agencia sitúa histórica y culturalmente la práctica matemática, mostrando que la actividad matemática de los sujetos en una época y lugar no puede desligarse del complejo de las prácticas sociales de las cuales emerge.

Con los anteriores fundamentos, en un contexto histórico específico, se analizan cómo los sujetos abordan los problemas matemáticos; los instrumentos y técnicas que utilizan para resolverlo; los discursos y formas de enunciación que se utilizan, y los objetos y conceptos que se objetivan. Todo esto se examina en relación con las personas y comunidades involucradas en la práctica matemática con el fin de entender cómo se constituye y estructura la acción matemática de los sujetos. El objetivo es identificar fuentes heurísticas para planificar eventos de aprendizaje en las escuelas del futuro (Vasco, 1995).

El sistema de numeración decimal

La presentación que el autor realiza del sistema de numeración decimal se puede resumir en: presentación de las bases conceptuales de los sistemas de numeración posicional en cualquier base; la descripción detallada sobre el uso del SND para escribir los números y para nombrarlos; explicación detallada sobre los algoritmos basados en el SND para calcular los resultados de las cuatro operaciones fundamentales (adición, sustracción, multiplicación y división), inicialmente, operando solo números enteros; explicación sobre la forma de operar en sistemas de numeración diferentes al decimal; explicación del procedimiento para realizar cambios de un sistema de numeración a otro (por ejemplo, de numeración decimal a binaria o viceversa).

La lección VII inicia discutiendo la forma de extender el sistema de numeración decimal para expresar cantidades que no sean enteras, relacionando las cifras que quedan a la derecha de la coma con fracciones que tiene por denominador una potencia de 10:

> *Un número decimal no es otra cosa que un quebrado que tiene por numerador el número que se obtiene quitando la coma y por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales hai; i cuando el número decimal tiene parte entera, es también igual a un número fraccionario cuya parte entera es la parte entera del número decimal, i cuya fracción tiene por numerador la parte decimal i por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales hai.* (Liévano, 1856, p. 80, cursiva en el original).

De esta manera caracteriza tres tipos de números decimales: los finitos, los infinitos periódicos y los infinitos no periódicos. Para ello analiza el residuo de la división del numerador entre el denominador del número quebrado: si luego de varios pasos en la división el residuo es cero, entonces el número decimal que representa dicha cantidad tiene un número finito de cifras, pero si se llega a un punto en el que las cifras del cociente se repiten de la misma forma, entonces el número decimal que representa dicha cantidad tiene infinitas cifras y es periódico.

Vale la pena destacar la presentación que hace del criterio para definir si un número quebrado puede ser representado por un número decimal finito o infinito periódico: *b* no puede tener factores primos diferentes de 2 y 5. De manera similar presenta criterios para expresar en forma de quebrado un número decimal infinito periódico (multiplicando el número decimal por una potencia de 10^n según la cantidad de cifras en el periodo, y haciendo al resta del número original con el número multiplicado).

La inconmensurabilidad

De especial interés es la discusión presentada por el autor sobre “los números inconmensurables” (página 90 y siguientes): se basa en una construcción a partir de sucesiones de números racionales (fraccionarios y quebrados, en palabras del autor) que tienden al número inconmensurable dado, lo que le permite extender las propiedades ya estudiadas en los racionales, a los reales (números inconmensurables). Aunque el autor no lo expresa en estos términos, detrás de esta idea hay una noción de límite en el sentido de Cauchy, y una intuición fuerte sobre la continuidad en el sentido aritmético.

Para lo anterior, inicia analizando una característica de la notación decimal periódica infinita: si un número decimal tiene un periodo que inicia después de la cifra en la *n-ésima* posición (*n+1-ésima* posición y en adelante), y es igual a 9, entonces, las infinitas cifras equivalen a una unidad de la fracción decimal de la posición *n-ésima*. (por ejemplo, en palabras del autor (p. 90), 7,52999…=7,53 "*puesto que la porción ilimitada que queda a la derecha de los centésimos, vale esactamente 1 centésimo*"). Vale la pena destacar la conciencia que se tiene sobre los procesos infinitos (la sucesión infinita de las potencias de la forma $\frac{9}{10^n}$ en el lado derecho de la igualdad), y posibilidad de capturar dicha sucesión infinita en el número quebrado $\frac{1}{10^2}$. A partir de lo anterior afirma que, si el periodo es diferente de 9, esta parte del número no completa la unidad anterior al inicio del periodo.

Con base en los anteriores preceptos, demuestra por contradicción que, si el decimal no es periódico, entonces no puede expresarse por un número quebrado. En sus palabras:

> Esto supuesto, consideremos un número decimal ilimitado i no periódico: digo que, *la cantidad que representa este numero decimal no podrá apresarse esactamente por ningún quebrado.* En efecto, supongamos que sí hai quebrado equivalente al dicho número decimal: entonces convirtiéndolo en número decimal, se tendrán dos números decimales iguales, i en los cuales una porción cualquiera de la derecha no alcanza a valer la unidad decimal inmediatamente superior a la que se refiere la primera cifra de la izquierda; pero para que estas dos condiciones se verifiquen, es preciso que estos dos números decimales mirados de izquierda a derecha sean idénticos, luego habría quebrado que orijinaria número decimal ilimitado i no periódico, lo cual es un absurdo. Luego *la cantidad representada ·por el número decimal ilimitado i no periódico* (puesto que no puede espresarse esactamente por ningun quebrado) *no tendrá parte alícuota comun con la unidad, i será por tanto* (n.° 3) *inconmensurable con ella*. (Liévano, 1856, p. 91, cursiva en el original).

Esta demostración tiene un valor pedagógico y epistémico fundamental tanto por su sencillez, como por la profunda intuición del autor sobre el comportamiento del SND: demostrar la inconmensurabilidad con la unidad de cualquier número decimal infinito no periódico, sobre la base de las propiedades del sistema de numeración decimal. No obstante, lo anterior, el siguiente paso del autor es aún más importante desde el punto de vista epistemológico: desarrolla un método que le permite expresar un número inconmensurable a partir de sucesiones de números quebrados (en términos actuales, aproximar un número irracional por sucesiones de números racionales):

> Aunque una cantidad Inconmensurable con la unidad no puede representarse esactamente por ningún número sin embargo, si se puede obtener un quebrado que la represente con un error menor que cualquier magnitud dada. Para esto dividiremos la unidad en un número tan grande de partes iguales que cada parte sea menor que la magnitud dada (*); i entonces el quebrado que tiene por numerador el número de veces que esta pequeña parte cabe en la cantidad, i por denominador el número de partes en que se ha dividido la unidad, satisface a la condición requerida. Si ahora queremos aproximarnos más, valuaremos con un cierto error la parte inconmensurable que nos queda, i agregamos este nuevo número al número primitivo; i si esta serie de operaciones se supone prolongada indefinidamente, puede considerarse la cantidad espresada esactamente por la suma de una infinidad de números.

Llamaremos número *inconmesurable* a la espresión esacta de una cantidad inconmensurable con la unidad (Liévano, 1856, p 91, cursiva en el original).

Es de aclarar que con la expresión "número inconmensurable" el autor se refiere a lo que en el lenguaje actual se denomina "número irracional". Así, en Lievano, el "número inconmensurable" es la cantidad que expresa en términos numéricos la comparación (razón) del par de cantidades que son inconmensurables entre sí.

De otro lado, hay que resaltar la idea de aproximar un irracional a partir de sucesiones de números racionales. Si bien esta idea ya se encuentra en el Cours D'Analyse de Cauchy (1821), no hay evidencia de que el autor conociera la obra de Cauchy, pero es probable que así fuera. El procedimiento para encontrar la sucesión de números racionales que tienden a un número irracional dado, con un error menor que cualquier magnitud dada, es bastante original para la época (década de 1850). La magnitud dada que define el error considerado define un intervalo con centro en el número irracional que se quiere aproximar por la sucesión de número irracionales. Este intervalo se puede hacer tan pequeño como se desee. Luego, hay en esta idea una noción de límite, lo que se evidencia en la parte final, cuando da la definición de número inconmensurable: "Llamaremos número *inconmesurable* a la espresión esacta de una cantidad inconmensurable con la unidad". Nótese, además, que estas ideas expresan una intuición profunda sobre las propiedades topológicas de los números, además de las algebraicas.

3.° Vamos a establecer que *el producto de dos números inconmensurables, es tanto independiente de la unidad a que se refiera el multiplicando, como del órden de los factores.*

Sean A i B los dos factores inconmensurables. Como todo número inconmensurable es la suma de una infinidad de números conmensurables, podemos poner

$$A = a + a' + \ldots\ldots$$
$$B = b + b' + \ldots\ldots$$

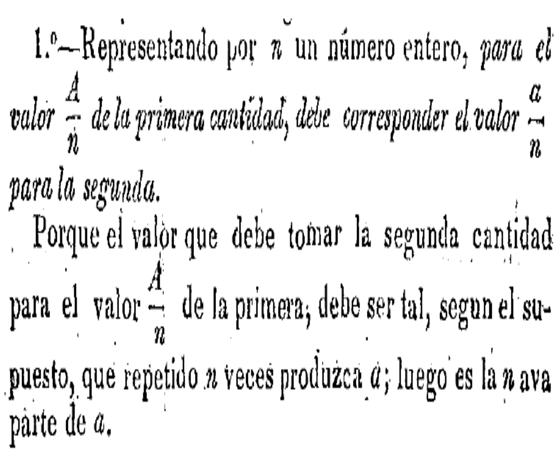
siendo $a, a' \ldots\ldots$, i $b, b' \ldots\ldots$ números conmensurables.

Figura 2. uso de las representaciones de los irracionales como sucesiones de racionales para operar con estas representaciones. (Lievano, 1856, p 91)

Demostrado lo anterior, Lievano expresa: "116. Pasamos ahora a hacer estensivas al número inconmensurable, las propiedades jenerales del número conmensurable." (Liévano, 1856, p 91). (Figura 2). Para ello demuestra las propiedades de los números inconmensurables y sus operaciones. Si bien el autor no lo expresa así, es como si tuviera conciencia de que las cantidades inconmensurables se hacen números si logra dotarlos de una estructura hacer extensivas las propiedades aritméticas de los conmensurables a los inconmensurables es novedoso en la época (y anticipado a las soluciones dadas en Europa), y se basa en una idea potente (que se hará visible en los trabajos de Cantor (1915) y Dedekind (1917)): *construir los reales a partir de los racionales, y extender las propiedades demostradas en los racionales a los nuevos objetos (los reales), con lo cual adquieren el mismo estatus numérico del sistema de origen*. De esta forma, se objetivan las cantidades inconmensurables como números al dotarlos de una estructura (para más detalles de las implicaciones de este tratado sobre los números inconmensurables ver Albis, 1976).

La lección XI, llamada "Aplicaciones de las proporciones" inicia con el teorema cumbre que redondea todo su trabajo sobre la aritmética (en esencia, un parafraseo de la definición 5, del libro V de los elementos de Euclides):

> 150. TEOREMA *Siempre que se tengan dos especies de cantidades tales, que para cada valor particular i creciente de la una, corresponda un valor particular i creciente de la otra; i está en la naturaleza de estas variaciones el corresponder para un múltiplo cualquiera de la primera el mismo múltiplo de la segunda*; estas dos cantidades gozan de la propiedad de que *dos órdenes de magnitud cualesquiera de la primera, guardan la misma relación que los correspondientes ordenes de magnitud de la segunda*. (Liévano, 1856, p 132, cursiva en el original).


1.º—Representando por n un número entero, *para el valor* $\frac{A}{n}$ *de la primera cantidad, debe corresponder el valor* $\frac{a}{n}$ *para la segunda.*

Porque el valor que debe tomar la segunda cantidad para el valor $\frac{A}{n}$ de la primera, debe ser tal, segun el supuesto, que repetido n veces produzca a; luego es la n ava parte de a.

Figura 3. caso 1 de la demostración del teorema 150

La demostración del teorema 150 se basa en que, si las dos magnitudes son conmensurables, la razón entre ellas se puede representar por un número racional, pero, si las magnitudes son inconmensurables, entonces la razón entre ellas se expresa por un número irracional. Para ello divide la demostración en tres casos. En los dos primeros, cuando la razón se establece entre cantidades conmensurables, en cuyo caso, la razón se puede expresar por un decimal finito, o infinito periódico, pero si las cantidades son inconmensurables, entonces la razón se expresa por decimal infinito no periódico.

El caso 3, se puede ver en la figura 4. En este caso, la razón entre las cantidades se expresa por un número inconmensurable (número real), y se demuestra por contradicción, que cualquier secuencia de números racionales que acote superior e inferiormente a dicho número inconmensurable, es idéntica a dicho número (ver Figura 3). En el fondo, es una demostración de la continuidad de los reales, pues demuestra que cualquier cantidad, o es un número racional, o es un número irracional, y el autor es consciente de dar solución a un problema no resuelto en Europa, como se puede ver en la extensa nota al pie de la página 133:

> Tengo la satisfacción de presentar al público la demostración rigurosa de esta proposición, manifestando que he sido conducido a ella investigando las condiciones necesarias para la proporcionalidad de las cantidades. Hasta ahora los más famosos Matemáticos se han contentado con establecer las propiedades jenerales del número conmensurable i aplicar silenciosamente estas mismas propiedades al número inconmensurable; pero este jénero de deducción está mui lejos de ser riguroso: Yo notando este vacío en la Aritmética me propuse llenarlo, i después de mui detenidas meditaciones

> he coronado completamente mis esfuerzos, pues he logrado (n° 115) hacer estensivas al número inconmensurable las propiedades jenerales del número conmensurable […]. (Lívano, 1856, p. 133)

3.°—Siendo K un número inconmensurable, *para el valor $A \times K$ de la primera, debe corresponder $a \times K$.* En efecto, si representamos por P la relacion que existe entre el valor que corresponde á $A \times K$ i la magnitud a, es claro que este valor está representadado por $a \times P$; i la cuestion se reduce a probar que P es igual a K.

Supongamos 1.°—$P > K$, i tomemos un número conmensurable p comprendido entre P i K, de modo que se tiene $P > p > K$: es evidente, en virtud de lo que precede, que siendo p un número conmensurable, al valor $A \times p$ corresponde $a \times p$; pero siendo $A \times p > A \times K$, tambien se tendrá $a \times p > a \times P$, de donde $p > P$, lo que es contradictorio, porque se tenia $P > p > K$. De la misma manera probaríamos que P no puede ser menor que K, luego se tiene $P = K$.

Figura 4. Demostración del tercer caso del teorema 150, cuando las cantidades son inconmensurables (Liévano, 1856, p 132)

Liévano propone una solución al problema de la continuidad de los números reales sin mencionar explícitamente esta continuidad. Su solución se basa en una noción general de magnitud, la razón entre cantidades y las propiedades del Sistema de numeración decimal. Con estos elementos, demuestra que las cantidades inconmensurables son números y establece una teoría general de razones y proporciones para demostrar que cualquier número es un racional o un irracional, mostrando así una comprensión profunda de las propiedades topológicas de los números. También presenta una concepción moderna en la que el número emerge de las razones entre cantidades de magnitud y todos los números tienen el mismo fundamento epistemológico.

A manera de conclusión

La aproximación elaborada por Lievano le permite, no solo presentar los viejos problemas de la aritmética en una nueva forma, sino también abordar problemas no resueltos en su momento: la continuidad de los reales. Se puede ver en su trabajo apuestas epistemológicas y ontológicas sobre el concepto de número que se posicionaron como novedosas en la época en la que fueron propuestas, que en la actualidad han pasado al olvido, pero vale la pena recuperar: las magnitudes, sus medidas y las razones entre dichas cantidades. Además, se debe llamar la atención sobre el valor pedagógico de su trabajo. En las aproximaciones actuales en la educación media (bachillerato) el estudio de los números reales tiene un obstáculo crucial: cómo presentar los números irracionales. Comprender la naturaleza del número irracional requiere problematizar la inconmensurabilidad entre cantidades y generar un mecanismo que permite establecer la razón entre dicho para de cantidades.

Metodología del taller

Propósitos del taller: El taller tiene un doble propósito: de un lado, discutir una aproximación al estudio de las prácticas matemáticas fundamentado en un perspectiva histórico-cultural del conocimiento aplicando al análisis de un texto histórica de relevancia en la historia de las matemáticas en Colombia. De otro, discutir una aproximación novedosa al estudio de la continuidad de los números reales a partir del sistema de numeración decimal la cual no solo tiene un valor epistémico importante, sino también pedagógico.

Estrategia metodológica. Se utilizarán estrategias basadas en el trabajo en pequeños grupos para el análisis y la solución de algunos problemas específicos, y se realizarán discusiones plenarias con el fin de consolidar los aspectos conceptuales y metodológicos que se esperan constituir a lo largo del taller. Para ello se tendrá a disposición de los participantes copias de los textos que serán analizados, y algunos instrumentos para sistematizar el trabajo realizado.

Agenda del taller. El taller estará organizado en tres momentos: Un momento de conexión con la problemática (20 minutos), analizando algunas posibles dificultades asociadas a la comprensión sobre la continuidad de los números reales en su estudio a lo largo de la educación básica. Un segundo momento de desarrollo (una hora), en el que se analizarán algunos apartados específicos del texto de Indalecio Liévano, y pondrán en escena las herramientas para el análisis de las prácticas matemáticas. El tercer momento de cierre (30 minutos), a través de una discusión plenaria busca sinterizar los elementos conceptuales y metodológicos abordados en el taller.

Nivel educativo al que va dirigido el taller: Secundaria: 7 a 12 grados; Superior
Número máximo de personas: 40

Agradecimientos

Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación -MINCIENCIAS-, a través de la convocatoria 891-2020, Contrato 133 – 2021, y del programa de investigación código 1115-852-70767, proyecto código 71349 financiado por MINCIENCIAS a través del Fondo Francisco José de Caldas.

Referencias Bibliográficas

Albis-González, V. S., & Soriano-Lleras, L. I. (1976). The work of Indalecio Liévano on the foundations of real numbers. *Historia Mathematica*. Historia Mathematica. http://doi.org/10.1016/0315-0860(76)90032-x

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (P. Jourdain, Trans. 1 ed.). New York: Dover Publications, INC.

Dedekind, R. (1927). Continuidad y números Irracionales. Traducción de la quinta edición (1927) por J. Bares y J. Climent. Recuperado desde http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf

Ferreirós, J. (2016). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton; Oxford: Princeton University Press. doi:10.2307/j.ctt1dr36dc

Kemmis, S., Wilkinson, J., Edwards-Groves, C., Hardy, I., Grootenboer, P.. 2014. *Changing Practices, Changing Education*. Sngapore: Springer Science+Business Media. Doi: https://doi.org/10.1007/978-981-4560-47-4

Liévano, I. (1856). *Tratado elemental de aritmetica*. Bogotá: Imprenta de Echavarría Hermanos.

Obando, G. (2021). Número y Magnitud: lecciones del Tratado de Aritmética Elemental (Indalecio Liévano, 1856). Documento no publicado.

Obando, G. (2015). Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica. (Tesis Doctoral), Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado desde http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf

Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. Maxwell West, & M. Stone Wiske (Eds.), *Software goes to school: teaching for understanding with new technologies* (pp. 56-69). New York, NY: Oxford University Press.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours D'Analyse. Analyse algebraico*. In Gauthiers-Villars (Ed.), Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. París: Gauthiers-Villars.

Albis-González, V. S., & Soriano-Lleras, L. I. (1976). The work of Indalecio Liévano on the foundations of real numbers. *Historia Mathematica*. Historia Mathematica. http://doi.org/10.1016/0315-0860(76)90032-x