XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

La teoría de Galois en las prácticas del estructuralismo categórico

Miguel Ángel **Moreno** Ramírez
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas, Universidad del Valle
Colombia
miguel.angel.moreno@correounivalle.edu.co

Resumen

Este documento presenta la relación concreta que existe entre la teoría de Galois y la teoría de categorías, así mismo reconoce prácticas matemáticas que son protagonistas del proceso de generalización a lo largo de más de un siglo, lo cual contribuye a las reflexiones de los profesores de matemáticas respecto a la posibilidad de desarrollo de prácticas en el aula. Para tal efecto, se revisa el teorema fundamental de la teoría de Galois como caso particular de las conexiones de Galois, y estas últimas como caso particular de los funtores adjuntos.

Palabras clave: Teoría de Galois, Teorema fundamental, Conexiones de Galois, Funtores adjuntos, Práctica matemática.

Introducción

Desde mediados del siglo XIX, las matemáticas han experimentado un profundo proceso de generalización y abstracción. Se reconoce como precursor de este proceso al estructuralismo conjuntista, desarrollado desde principios del siglo XX y protagonizado por los trabajos del grupo Bourbaki, estas matemáticas, también conocidas como modernas, son las que prevalecen en los currículos universitarios; sin embargo, otro tipo de estructuralismos, entre ellos el categórico, son los que han fundamentado las matemáticas contemporáneas, por lo que existe la necesidad de estudiar esas matemáticas contemporáneas en las aulas universitarias.

Una manera particular de abordar esta transición a las matemáticas contemporáneas, rescatando los elementos que prevalecen en la educación universitaria, es estableciendo vínculos que ayuden a comprender el proceso de generalización en el que se encuentran las matemáticas actuales; en este sentido, la teoría de Galois es un caso particular de análisis, se pueden establecer vínculos en resultados como el teorema fundamental y algunos resultados asociados a las matemáticas modernas y contemporáneas. Dichos vínculos se enmarcan en prácticas identificadas a lo largo de más de un siglo y que son objeto de estudio en este trabajo.

En este sentido, se revisan los desarrollos en el álgebra previos al surgimiento de las ideas de Galois, luego se explicita la correspondencia entre estructuras que muestra el teorema fundamental, así como sus vínculos con las conexiones de Galois y los funtores adjuntos, nociones enmarcadas en las matemáticas modernas y contemporáneas respectivamente. Por último, se reflexiona respecto a las prácticas que se movilizan en el pensamiento de Galois.

El problema de la resolubilidad y el teorema fundamental de la teoría de Galois

La resolución de ecuaciones fue una preocupación desde sociedades como la egipcia y la babilónica para resolver problemas relacionados con su cotidianidad, en particular, se reconoce la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con reglas como la de “falsa posición”, la cual consiste en asignar valores concretos a una ecuación para luego resolver sistemas de ecuaciones simples (Chavarria, 2014). En el renacimiento, la actividad de resolver ecuaciones estuvo en auge con trabajos centrados en encontrar fórmulas generales para ecuaciones de grado tres y cuatro, los protagonistas en esta época fueron matemáticos como Scipione del Ferro (1465-1526), Tartaglia (1499-1557), Cardano (1501-1576) y Ferrari (1522-1565).

En esencia, el desarrollo del álgebra consistió en encontrar fórmulas algebraicas que expresaran las raíces de una ecuación de cualquier grado, dichas fórmulas eran encontradas a partir de manipular los coeficientes de la ecuación usando las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación, división y radicación. Con este fin, las fórmulas para las ecuaciones de primer, segundo, tercer y cuarto grado ya habían sido encontradas y trabajadas por matemáticos del Renacimiento; sin embargo, la ecuación de quinto grado generó incertidumbre respecto a la existencia de su fórmula general.

Fue hasta el siglo XVIII que Lagrange (1736-1813) intentó encontrar, mediante su *resolvente*[1], dicha fórmula general para las ecuaciones de quinto grado, sin embargo, después de haber aportado un razonamiento puso en duda la existencia de esta fórmula. Su conjetura fue retomada por Ruffini (1765-1822) quien propuso la prueba de la no existencia de la fórmula de quinto grado, dicha prueba luego fue completada por Abel (1802-1829) entre 1824 y 1826. Esta prueba cerró el misterio respecto a las ecuaciones de grado cinco o más: no existe una fórmula general para resolver ecuaciones de cualquier grado por radicales[2].

Con esto como base, Evariste Galois (1811-1832) lejos de pensar en que el problema de la resolubilidad finalizaba con el teorema de Abel, se propuso a estudiar las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación pueda ser resuelta por radicales, esto debido a resultados como el de Gauss (1777-1855) respecto a las ecuaciones ciclotómicas, Gauss encontró una forma de resolver por radicales las ecuaciones de la forma $x^p - 1 = 0$ cuando p es primo.

[1] La resolvente es una expresión algebraica que permite reducir el grado de una ecuación.
[2] El término resolver ecuaciones por radicales refiere a utilizar una fórmula general que exprese las raíces de la ecuación, utilizando únicamente los coeficientes de la ecuación.

Durante el estudio de Galois, fue necesaria una nueva forma de hacer matemáticas, en concreto, fue necesaria la idea de estructura, una noción centrada en estudiar las relaciones entre una agrupación de elementos[3]; en particular, Galois trabaja con las estructuras de *grupo* y de *cuerpo*, la primera consta de un conjunto con una operación binaria que cumple con una serie de axiomas centrados en las relaciones entre sus elementos, mientras que la segunda estructura, a diferencia de la de grupo, tiene dos operaciones binarias con sus respectivos axiomas. Con estas estructuras, Galois establece correspondencias entre subgrupos -grupos contenidos en un grupo más grande- y extensiones de cuerpo -cuerpos más grandes que un cuerpo inicial-.

Para que dicha correspondencia se pueda establecer, las extensiones de cuerpo que se asocian son los cuerpos más pequeños que contienen las raíces de una ecuación, como ejemplo está la ecuación $x^2 - 2 = 0$ en $\mathbb{Q}$, que no tiene solución, pero la extensión más pequeña en la que sí hay solución es $(\mathbb{Q}\sqrt{2}/\mathbb{Q})$[4]. Por otro lado, los subgrupos que se asocian son los grupos que están compuestos de automorfismos de la extensión de cuerpo, los cuales dejan invariante al cuerpo base. Retomando el ejemplo anterior, hay dos automorfismos asociados, estos son: $\sigma_1(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ y $\sigma_2(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, estos automorfismos junto con la operación composición conforman lo que se conoce como el *grupo de Galois*.

Con base en esto, la correspondencia que establece el teorema fundamental de la teoría de Galois funciona gráficamente como lo muestra el siguiente ejemplo que utiliza la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ con subcuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ y $\mathbb{Q}$; aquí el grupo de Galois es $Gal\ (\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}) = \{e, \eta_1, \eta_2, \eta_1 \circ \eta_2\}$:

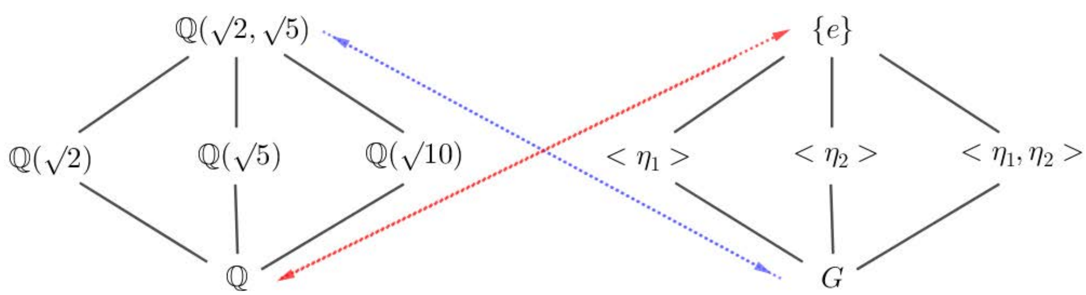

Figura 1. Correspondencia reticular del Teorema Fundamental de la teoría de Galois.

La profundidad que establece esta correspondencia es que permite resolver un problema de la teoría de cuerpos en la teoría de grupos, lo cual reduce la complejidad de la estructura. Por esta línea, Galois plantea lo que es un *grupo resoluble*, esto resulta clave, porque cuando un grupo es resoluble, entonces la ecuación puede ser resuelta por radicales.

Las conexiones de Galois y los funtores adjuntos

Posterior a la construcción del teorema fundamental, el nivel de generalización se enmarca en las matemáticas modernas con la conexión de Galois. Esta noción fue propuesta por el matemático noruego Oystein Ore (1899-1968), reconocido por su participación en la escuela de Göttingen a cargo de Emmy Noether (1882-1935). La conexión de Galois se establece con

[3] Esta definición corresponde a las matemáticas modernas.

[4] Esta notación hace referencia a que $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ es la extensión del cuerpo base $\mathbb{Q}$.

base en la definición de conjunto parcialmente ordenado -o "poset" por su abreviación en inglés-, un poset es definido como un par $(X, \preccurlyeq)$ con X no vacío y $\preccurlyeq$ una relación de orden reflexiva y transitiva; un ejemplo de poset son los números racionales junto con la desigualdad usual $(\mathbb{Q}, \leq)$. Con base en esto, la definición de conexión de Galois que presenta el mismo Ore (1994, p. 495) es la siguiente:

Definición 1: Sean P y Q dos conjuntos parcialmente ordenados. Sean $p \longrightarrow \mathfrak{Q}(p)$ y $q \longrightarrow \mathfrak{P}(q)$ correspondencias de P a Q y de Q a P, respectivamente. Estas correspondencias forman una *conexión de Galois* entre P y Q si se cumplen las siguientes condiciones:

a. Cuando $p_1 \succcurlyeq p_2$ con dos elementos en P o $q_1 \sqsupseteq q_2$ con dos elementos en Q, entonces
$$\mathfrak{Q}(p_1) \sqsubseteq \mathfrak{Q}(p_2), \qquad \mathfrak{P}(q_1) \preccurlyeq \mathfrak{P}(q_2)$$
b. Para un elemento p en P o q en Q
$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(p) \succcurlyeq p \qquad \mathfrak{Q}\mathfrak{P}(q) \sqsupseteq q$$

En esencia, esto permite generalizar las relaciones entre estructuras, únicamente teniendo como referencia las relaciones de orden, en este caso no interesa si los poset son estructuras de grupo o de cuerpo, solo interesa que cumplan con las dos propiedades de un poset, es este aspecto el que diferencia a las conexiones de Galois con el teorema fundamental.

Al relacionar esta definición de las matemáticas modernas con las matemáticas contemporáneas, la teoría de categorías permite evidenciar una generalización y abstracción; trabajos como el de Payares (2009) posibilitan mirar el desarrollo de estas ideas en las matemáticas contemporáneas -en particular con las ideas de Grothedieck (1928-2014)-; no obstante, el énfasis de este trabajo está en mirar la generalización del teorema fundamental mediante la noción de funtor adjunto -como en el trabajo de Lezama (1996)-. En este sentido, resulta necesario tener claridad respecto a dos nociones de la teoría de categorías.

En primer lugar, una categoría consta de cuatro cosas según la definición original propuesta por Eilenberg y MacLane (1945): objetos, morfismos -o flechas-, la operación composición entre morfismos y morfismos identidad para cualquier objeto. Con base en estos, una categoría debe de cumplir con cinco axiomas relacionados con los morfismos que la componen, el primer axioma consiste en que la asociatividad entre morfismos debe de cumplirse, el segundo axioma habla de que una triple composición de morfismos $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ es definida siempre que $\alpha_3\alpha_2$ y $\alpha_2\alpha_1$ estén definidas, el tercer axioma establece la existencia de un morfismo identidad para cada morfismo, el cuarto axioma establece el morfismo e_A, que corresponde a todos los morfismos identidad del objeto A, y el quinto axioma consiste en que para cada identidad de la categoría hay un único objeto de dicha categoría tal que $e_A = e$. En segundo lugar, la manera en la que se pueden relacionar dos categorías es mediante la noción de funtor que, en esencia, se puede intuir como una función[5] entre categorías y la forma en la que actúa es que va de objetos a objetos, morfismos a morfismos, etc.

Con estas ideas como base, los funtores adjuntos resultan ser objeto de estudio, en concreto, esta noción consiste en una pareja de funtores que permiten ir y volver de la manera más optima de una categoría a otra, en la intuición que permite evidenciar la teoría de conjuntos,

[5] Un funtor resulta ser más general que una función, las funciones se establecen en la teoría de conjuntos, y esta teoría resulta ser un caso particular de la teoría de categorías.

un ejemplo de funtores adjuntos es una función junto con su inversa, debido a que permite ir y volver de un conjunto a otro recuperando la mayor información posible del conjunto inicial.

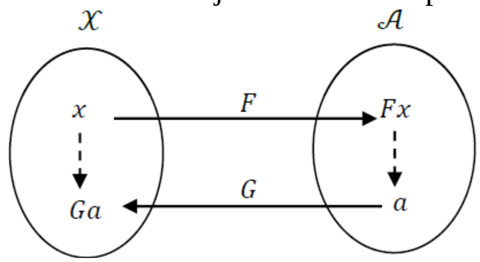

Figura 2. Representación gráfica de los funtores adjuntos[6]

Naturalmente, surge la inquietud respecto a la relación que tienen los funtores adjuntos con las conexiones de Galois, lo cual vincularía las matemáticas contemporáneas con las modernas, para estudiar esa relación es necesario ver *la categoría de los poset*, un caso particular dentro de la teoría de categorías.

En esta categoría se tienen en consideración cuatro cosas: la primera es que los objetos en esta categoría son los conjuntos, incluyendo los subconjuntos; la segunda es que los morfimos son las relaciones de orden, así la relación $a \leq b$ es el morfismo $a \to b$. La tercera consideración es que el morfismo identidad existe por la relación reflexiva del poset. Por último, esta categoría cumple la asociatividad y cada uno de los axiomas de la teoría de categorías. Con esto como base, Armstrong (2016) define la adjunción de los poset:

<u>Definición 2:</u> Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ dos posets. Un par de funciones $L\colon\ P \leftrightarrows\ Q\colon\ R$ es llamado una adjunción si para todo $p \in P$ y $q \in Q$ se tiene:

$$p \leq_p\ R(q)\ \ \Leftrightarrow\ \ L(p) \leq_Q\ q$$

En este caso se escribe $L \dashv R$ y se llama a esto un par adjunto de funciones. La función L es el adjunto izquierdo, y la función R el adjunto derecho.

No obstante, esta última definición tiene la particularidad de que no altera el orden al cambiar de una categoría a otra, es por esto que Armstrong (2016) precisa esta relación con base en la noción de *poset opuesto*, el cual invierte el orden que tiene un poset; en consecuencia, la adjunción de los poset $P \leftrightarrows Q$ es como la conexión de Galois $P \leftrightarrows Q^{op}$.

Las prácticas matemáticas en las ideas de Galois

Si bien el análisis histórico epistemológico de estas nociones resulta relevante para comprender una perspectiva de las matemáticas que se desarrollan actualmente, son importantes las reflexiones de las ideas de Galois para entender unos posibles impactos en la Educación, y en concreto en las construcciones que establecen los profesores en formación y en servicio. Una forma de llevar a cabo esta reflexión puede ser mediante el estudio de *las prácticas matemáticas*, término que refiere a una de las nuevas líneas de investigación en filosofía de las matemáticas.

[6] Tomada de Anacona (2017, p. 245)

Sin discutir respecto a lo que se define por práctica matemática, la definición de Carter (2019) parece cubrir los elementos importantes para definir una práctica matemática, en concreto, ella la define como un conjunto de “agentes” y “matemáticas” que son capturados por la dupla $\langle A, M \rangle$, considerando a los agentes como practicantes reales o idealizados, junto con sus actividades y creencias; por otro lado, las matemáticas se refieren a los contenidos en matemáticas como teoremas, métodos matemáticos, pruebas, etc.

Con esta caracterización de práctica matemática, se identifican algunas prácticas relacionadas con las ideas de Galois, por un lado, resulta interesante la práctica de generalización que se moviliza en teoría de categorías, esta práctica surge con la idea de fundamentar las matemáticas a partir de mirar cómo funcionan sus relaciones, lo que corresponde con una visión macro de las matemáticas. Galois pudo haber visto las matemáticas clásicas, centradas en resolver ecuaciones particulares, como un patrón dentro de un gran patrón llamado teoría de Galois; esta generalización construida por la necesidad de las estructuras de grupo y de cuerpo.

Por otro lado, se reconocen prácticas como las de *comparar* (Lezama, 1996) y *adjuntar*[7], en primer lugar, Galois establece una comparación entre dos estructuras de naturalezas distintas, lo cual permite bajar la complejidad de la teoría de cuerpos; en segundo lugar, la adjunción a las extensiones de cuerpo que realiza Galois, permite determinar la (ir)resolubilidad de una ecuación a partir de elementos indeterminados -los elementos adjuntos- (Santaya, 2014), esto a partir de estudiar los abismos contradictorios de la teoría (Zalamea, 2017).

Si bien, esta nueva línea de la filosofía de las matemáticas permite reconocer las anteriores prácticas en las ideas de Galois, la reflexión para los profesores de matemáticas podría estar relacionada con el desarrollo de prácticas en el aula de clase. Esto también permitiría, por un lado, explicitar obstáculos epistemológicos (Chavarria, 2014) en áreas como el álgebra, por otro lado, aportar una visión actual de las matemáticas a los profesores, haciendo énfasis en el uso de las estructuras, que tendría coherencia con modelos como el de Carrillo et al. (2014) frente a los conocimientos para los profesores de matemáticas. En este sentido, resulta necesario que el profesor amplifique otras miradas respecto a las matemáticas actuales.

Referencias y bibliografía

Anacona, M. (2017). Una mirada a los funtores adjuntos. En M. Anacona, *Los números reales en el estructuralismo bourbakista: un análisis histórico-epistemológico con fines educativos* (págs. 244-245). Cádiz, España: Universidad de Cádiz.

Armstrong, D. (2016). Adjoint Functors. En D. Armstrong, *Fancy Algebra* (págs. 1-65).

Carrillo, J., Contreras, L. C., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M. Á. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carter, J. (2019). Philosophy of mathematical practice. *Philosophia Mathematica, 27*(1), 1-32.

Chavarria, S. (2014). *De las ecuaciones a la teoría de grupos, algunos obstáculos epistemológicos.* Cali: Universidad del Valle.

[7] La adjunción entendida desde el procedimiento que hace Galois para la resolubilidad, no a la teoría de categorías.

Eilenberg, S., & MacLane, S. (1945). General Theory of Natural Equivalences. *Transactions of the American Matematical Society, 58*(2), 231-294.

Lezama, C. (1996). Conexiones de Galois. *Integración*, *XIV*(1), 1-8.

Ore, O. (1944). Galois Connexions. *Transactions of the American Mathematical Society 55*, 493-513.

Payares Guevara, C. (2009). *Conexiones de Galois en categorías.* Cartagena : Universidad de Cartagena.

Santaya, G. (2014). El procedimiento de adjunción de Évariste Galois y su presencia en la ontología Deleuziana. En J. Ferreyra, & M. Soich (Edits.), *Deleuze y las fuentes de su filosofía* (págs. 37-47). Buenos Aires.

Zalamea, F. (2017). La emergencia abismal de la matemática moderna. *Mathesis*, 1-23.