



Transposición didáctica entre instituciones: el caso de la transformada de Laplace en ingeniería mecatrónica

Diana Carolina **Flores** Gallo

Pontificia Universidad Católica del Perú

Perú

dfloresg@pucp.edu.pe

Elvis **Bustamante** Ramos

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas

Perú

ebustamater@pucp.edu.pe

Resumen

El trabajo tiene como objetivo identificar y analizar las praxeologías de la transformada de Laplace, de manera que se pueda mostrar cómo circula el saber relacionado a dicho concepto, en la carrera de ingeniería mecatrónica, entre una institución de la enseñanza de las matemáticas E(M) hacia una institución intermediaria E(DI). Para ello, desarrollamos una metodología cualitativa, donde primero se identifica la praxeología en un curso de Ecuaciones Diferenciales, luego en una segunda etapa, se identifica la praxeología en el curso de Control Clásico; en función de las etapas previas, se establece conexiones o diferencias entre las praxeologías. Como resultado de este trabajo, podemos indicar que la técnica en la E(M) no se amplía o continua en la E(DI) además la forma de validación en E(DI) no proviene de E(M) sino por un software. Además, podemos indicar que la razón de ser de la transformada de Laplace en ingeniería mecatrónica de una universidad de Perú es la resolución de ejercicios de Control Clásico mediante modelos matemáticos.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza presencial; Diseño curricular; Teoría antropológico de lo didáctico; Investigación cualitativa; Ecuaciones diferenciales; Transformada de Laplace; Perú.

Introducción

En el nivel superior, existen investigaciones cuyo foco es el análisis del contenido curricular y cómo se articula entre las matemáticas impartidas y las necesarias para la carrera como Guzmán (2016) y Silva (2017) en el marco de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD). Estos contenidos avanzados de cálculo no se muestran articulados en la mayoría de los casos; en el caso de la transformada de Laplace, en la educación superior en los cursos de las ecuaciones diferenciales, lo presentan como una forma de convertir una ecuación diferencial a una algebraica como lo indica Cordero y Miranda (2011) y no se da una razón de ser en las escuelas de ingeniería.

Marco teórico y metodología

Para poder realizar la identificación de las organizaciones de temas relacionados a la transformada de Laplace en una institución, utilizaremos herramientas proporcionadas por la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD), esta teoría se basa en una unidad llamada *praxeología*, que es un cuarteto $[T, \tau, \theta, \Theta]$ llamado la unidad mínima de análisis, compuesto por un tipo de tarea T , una técnica τ , una tecnología θ , y una teoría Θ (Chevallard, 1999). Además, en el trabajo se hace referencia a institución como lo que enmarcan las actividades humanas y al mismo tiempo las hacen posibles a través de los recursos que estas instituciones ponen a disposición de los sujetos según Castela y Romo (2011); por ejemplo, las instituciones:

- Instituciones de enseñanza de matemáticas (E(M)): Por ejemplo, los cursos de matemáticas, curso de ecuaciones diferenciales.
- Instituciones de disciplinas intermediarias (E(DI)): Son los cursos de disciplinas intermediarias, por ejemplo, el curso de Control Clásico.

Respecto a la metodología en nuestro trabajo, aplicaremos una investigación cualitativa, que nos permitirá identificar las praxeologías presentes en cada institución, desde TAD. La primera etapa de nuestra metodología es revisar la malla curricular de la carrera de ingeniería mecatrónica para saber en qué cursos está presente la transformada de Laplace, para luego hacer una descripción de libros de textos e identificar el modelo praxeológico en la E(M).

Para la segunda etapa, haremos una descripción de libros de textos de un curso de la especialidad e identificar el modelo praxeológico en la E(DI). Cabe resaltar que la elección de los textos se hace por las entrevistas de algunos docentes que dictan dichos cursos, tanto para la praxeología en la E(M) y en la E(DI), y porque los libros tienen una parte teórica muy bien explicada, y diversos ejercicios de distinta complejidad.

Los datos se organizaron de acuerdo con los temas que aparecen en el sílabo del curso, desde lo básico hasta lo más complejo que se ve en los cursos analizados. De acuerdo con dicha organización, se van encontrando las tareas que aparecen en el esquema de la figura 2 y 3, y finalmente se van analizando la manera en cómo se relacionan dichas tareas. Estos pasos nos permitirán mostrar y analizar la transposición entre instituciones además identificar la razón de ser de la transformada de Laplace. También, se realiza una triangulación de datos, ya que hay información de varias fuentes, como por ejemplo la entrevista con el docente del curso de Control Clásico, la revisión de textos, tanto del curso de Ecuaciones Diferenciales como del

curso antes mencionado, además de la información extra que se tuvo del programa que se utiliza en el curso.

Análisis praxeológico de la transformada de Laplace en E(M)

Primero, hemos revisado la malla curricular de la Escuela ingeniería mecatrónica y se identificó que el curso de Ecuaciones Diferenciales está presente el tema de la transformada de Laplace, como se observa por la Figura 1.

5. CONTINUOUS FUNCTIONS, LAPACE'S TRANSFORM / 16 HOURS
 Continuous function in segments and of exponential order. Laplace's transform, properties, theorem, calculation methods and application of Laplace's transform. Inverse Laplace transform, calculation methods. Application of the inverse Laplace's transform. Application of the inverse Laplace's transform to differential equations with constant and variable coefficients, other applications. Systems of 2x2 linear differential equations. Matrix solution for Laplace's transform.

Figura 1. Silabo del Curso de Ecuaciones Diferenciales de ingeniería Mecatrónica.

El curso de Ecuaciones Diferenciales es un curso de cuarto semestre de la carrera de ingeniería mecatrónica de una universidad de Perú y es prerrequisito del curso de Variable compleja y Análisis de Fourier, que, a su vez, es prerrequisito del curso de Control Clásico. Justamente el curso de Control Clásico pertenece al sexto semestre de la carrera de ingeniería mecatrónica, analizaremos para la E(DI).

Después de identificar el curso, se considera dos libros para el curso de Ecuaciones Diferenciales como son:

- Zill, D. G., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (No. 970-686-487-3.). México: Thomson Learning
- O'Neil, P. V. (2011). *Advanced engineering mathematics*. Nelson Education.

Podemos observar que ambos libros presentan una organización parecida, mostrando definiciones, teoremas, y ejemplos directamente aplicativos. Sin embargo, un aspecto importante es la manera en cómo se presenta dicho contenido, ya que el primer libro tiene más ejercicios y ejemplos de corte extramatemático que el segundo libro. Por último, una característica que tienen ambos libros en común es que en el tema de la transformada de Laplace presentan ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales conocidas

De acuerdo con todo lo encontrado en la descripción de dichos libros, se plantea la pregunta generatriz: *¿De qué manera podemos dar solución a una ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace?* Para dar respuesta a esta interrogante, consideraremos las técnicas que están presentes en los libros de ecuaciones diferenciales mencionados anteriormente, asociadas a la institución de la enseñanza de las matemáticas (E(M)).

Hemos encontrado 6 tipos de tareas y tienen como teoría a las Ecuaciones Diferenciales, ya que es la rama de las matemáticas que justifica cada tecnología encontrada en dicho análisis. En la figura 2, se muestra las tareas y las técnicas encontrados en Zill (2002); sin embargo, la praxeología completa se puede ver con más detalle en Flores (2021).

De acuerdo con el esquema planteado en la figura 2, las técnicas τ_2 , τ_3 y τ_6 utiliza τ_1 , señalado con líneas punteadas, porque la relación entre las técnicas es parcial, es decir, solo se utilizan algunos pasos de la técnica; lo mismo sucede τ_5 que utiliza τ_3 . También, podemos ver una línea punteada en la pregunta generatriz que se relaciona con T_4 de manera parcial, ya que en este tipo de tarea no se resuelve una ecuación diferencial, sino una ecuación integral, pero usando la transformada de Laplace.

En el tipo de tarea T_1 , relacionada a resolver una ecuación diferencial lineal se toma como base para obtener un generador de tareas GT_1 , donde las variables didácticas V_i tienen como objetivo generar subtipos de tareas más específicas, como lo es el orden de la EDO, las condiciones iniciales, cómo es la función $g(t)$ (polinomial, exponencial, seno y coseno). También, podemos ver que la técnica τ_1 y la tecnología θ_1 se utilizan en los tipos de tarea T_2 y T_3 , que también se relacionan con resolver una ecuación diferencial, pero no se utilizan todos los pasos de τ_1 ya que en T_2 y T_3 los términos de las ecuaciones diferenciales se trasladan en s o en t y surge la necesidad de aplicar otra tecnología (primer y segundo teorema de traslación) para complementar θ_1 y poder justificarla.

Por otro lado, vemos que T_2 posee más subtipos de tareas que T_1 , y, si la variable didáctica V_2 no tuviera como restricción a la constante $k \neq 0$, se podría formar un subtipo de tarea para T_1 y en ese caso, se podría decir que el alcance de la técnica τ_2 es mayor a la de τ_1 porque resolvería más tareas (como la multiplicación de dos funciones) que τ_1 .

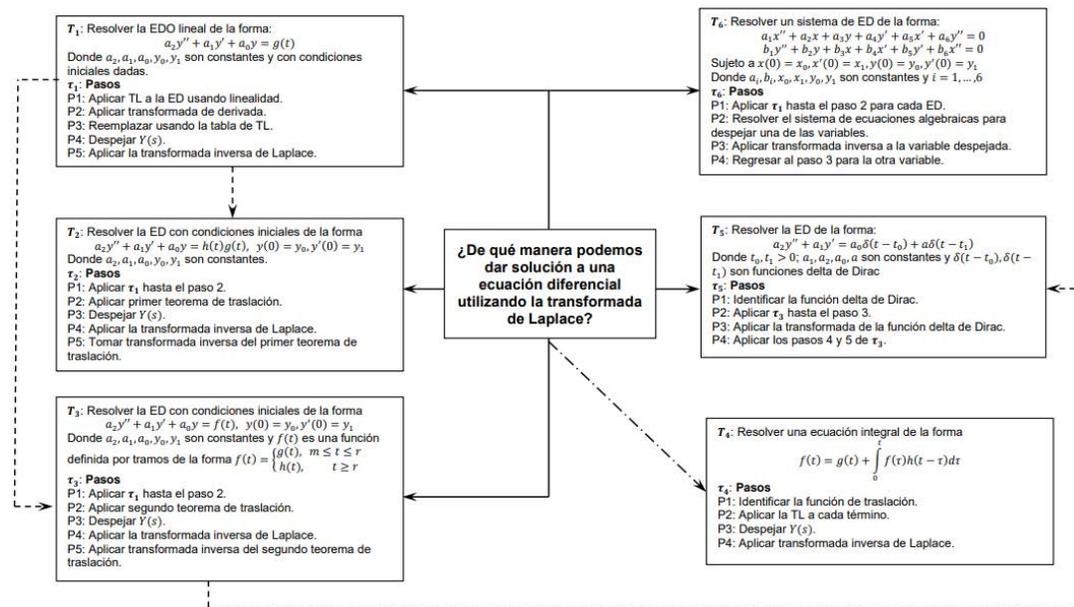


Figura 2. Esquema praxeológico de la transformada de Laplace.

El tipo de tarea T_3 se relaciona con el tipo de tarea T_5 por la técnica que utilizan como se mencionó antes; incluso podemos observar que τ_5 necesita implícitamente a τ_1 porque la técnica τ_3 llama a τ_1 . Por lo tanto, la técnica τ_3 tiene más alcance que la técnica τ_5 . Este alcance también se puede ver a través de las tecnologías empleadas para los tipos de tareas mencionados, con la diferencia que para T_5 tenemos como tecnología principal a la transformada de la función delta de Dirac.

Para el tipo de tarea T_4 que se pide resolver una ecuación integro-diferencial, se aplican herramientas propias de la transformada de Laplace, como el teorema de convolución, incluso se puede observar que la técnica τ_4 necesita implícitamente casi todos los pasos de τ_1 (excepto el paso 2 de aplicar la transformada de la derivada), y esto debido justamente a la tecnología θ_5 que aplica la convolución de funciones y también la traslación de funciones (usado en τ_2) para justificar la técnica. Sin embargo, no podemos hablar del alcance de la técnica debido a que los tipos de tareas realizadas por T_4 son diferentes a los demás tipos de tareas encontrados (T_1, T_2, T_3, T_5 y T_6).

El tipo de tarea T_6 se presenta para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, donde las dos variables didácticas V_1, V_2 generan cuatro subtipos de tareas. Debemos resaltar que en el paso 2 de la técnica τ_6 se resuelve un sistema de ecuaciones lineales, que se estudia en cursos de matemática elemental a nivel escolar, porque se debe despejar una de las variables (usando métodos vistos en álgebra sobre sistemas de ecuaciones lineales) y continuar con el proceso de la transformada de Laplace; por ende, la tecnología θ_6 para dicho paso se justificaría con técnicas ya aceptadas en otra teoría, que en ese caso sería la teoría Θ del álgebra

Podemos concluir, que, de acuerdo con la descripción de la praxeología, se puede mostrar una perspectiva general de cómo los textos de ecuaciones diferenciales abordan el tema de la transformada de Laplace mediante técnicas específicas de resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, lo cual es diferente a las tareas que dieron origen al concepto actual de la transformada de Laplace, donde si bien es cierto, también se buscaba resolver ecuaciones diferenciales, las técnicas empleadas para este fin eran distintas, porque Euler y Laplace buscaban inicialmente reducir el orden de la ecuación diferencial multiplicando el factor de la exponencial; además en sus estudios realizados no mencionaban las funciones por tramos ni condiciones iniciales.

Análisis praxeológico de la transformada de Laplace en E(DI)

Para esta parte, se ha considerado un curso esencial en la carrera de ingeniería mecatrónica que es el curso de Control Clásico del sexto semestre de la carrera mencionada. La elección de este curso para el análisis praxeológico es porque, según el sílabo, se presentan temas relacionados a la transformada de Laplace, y se evidencia claramente en los primeros temas que se desarrolla en el curso. Además, un docente principal del curso de Control Clásico nos explicó la importancia del curso, y nos brindó la bibliografía que se utiliza en dicho curso, que son los siguientes libros:

- Hernández Gaviño, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicaciones y simulación con matlab*. Pearson Educación.
- Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.

Para el análisis praxeológico, utilizaremos los libros de Hernández (2010) y Ogata (2003) ya que, según el Docente, hay ejercicios donde el estudiante puede practicar la parte teórica. Por lo tanto, de las descripciones de los libros, surge nuestra pregunta generatriz: *¿Cómo aplicar la transformada de Laplace en el curso de Control Clásico?* Y para dar respuesta a esta

interrogante identificaremos distintos tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías, asociada a la institución de disciplinas intermedias (E(DI)).

Ahora, para hacer un análisis praxeológico se va a organizar los diversos tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías utilizaremos el modelo praxeológico extendido dado por Chaachoua, Bessot, Romo & Castela (2019) y tendremos en cuenta los siguientes criterios:

- Procedimientos necesarios para resolver las tareas planteadas.
- Justificaciones que van a garantizar el procedimiento que se emplee en la resolución de la tarea planteada.
- Procedimientos que se toman en cuenta desde la matemática o la de Control Clásico.
- Teoría que justifica los procedimientos.

Para esta praxeología se identificaron siete tipos de tareas, relacionados con hallar la función de transferencia de un sistema de control determinado. Para modelar dichos sistemas de control se utilizan los conocimientos previos de cursos iniciales como Física 1, donde los estudiantes llevan temas como equilibrio, estática, dinámica, movimiento amortiguado (temas presentes en T_1^* , T_2^* , T_5^* y T_6^*). También están presentes los temas de electrostática y magnetismo en T_4^* , T_6^* y T_7^* que son temas llevados en el curso de Física 3.

En T_1^* , la variable didáctica V_1 toma algunas funciones elementales (constante, polinómica, exponencial, seno, coseno) porque son las funciones que se estudiaron en la praxeología de la E(M). La función $f(t)$ puede tomar las combinaciones lineales de las cinco funciones anteriores y la técnica τ_1 seguiría siendo efectiva, y no sería necesario aplicar algún otro método.

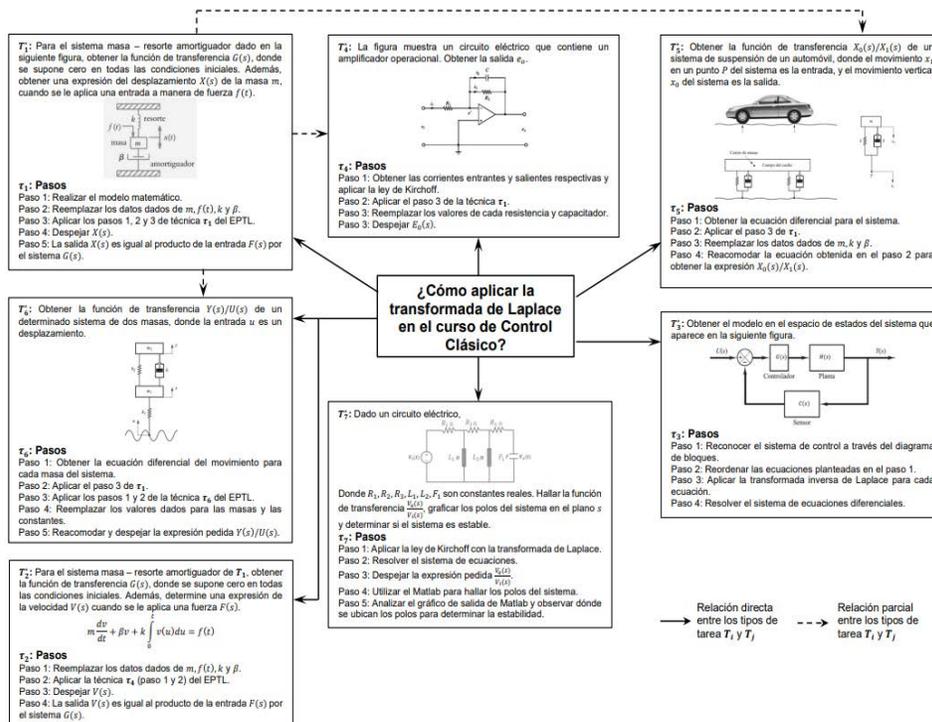


Figura 3. Esquema praxeológico de la transformada de Laplace.

En T_2^* se utiliza el mismo sistema masa – resorte amortiguado usado en T_1^* , pero con la diferencia que en T_2^* se pide hallar la velocidad $V(s)$, y justamente es lo que va a diferenciar la técnica y tecnología entre dichos tipos de tareas, ya que en T_2^* se resuelve una ecuación integrodiferencial usando τ_4 de la praxeología E(M). En T_3^* , las variables didácticas deben ser funciones racionales de una forma determinada, sin embargo, pueden ser cualquier función de transferencia y la técnica seguiría funcionando, pero el cálculo se haría más tedioso y afectaría los pasos 1 y 2 de τ_3 .

Para el tipo de tarea T_4^* , donde se presenta un circuito eléctrico, no tiene generadores de tareas, y esto es debido a que, si se aumentan o se disminuyen resistencias, capacitores y/o inductores, entonces se estaría generando otro tipo de tarea, que se podría resolver utilizando los pasos 2 y 3 de τ_4 , pero el paso 1 necesitaría de otra tecnología (circuitos RLC) y el cálculo se haría más tedioso. Los tipos de tareas T_5^* y T_6^* son parecidos, debido a que ambos utilizan un sistema de suspensión. Sin embargo, la diferencia es la cantidad de masas que se toman, ya que en T_5^* solo se toma una masa, y en T_6^* se toman dos masas, formándose para este tipo de tarea un sistema de ecuaciones diferenciales. Finalmente, para T_7^* , donde se da un circuito RLC y se pide hallar la función de transferencia, graficar los polos y determinar la estabilidad del sistema.

Cabe resaltar que el software mencionado en Hernández Gaviño, R. (2010) no se enseña en el curso en cuestión, sin embargo, el docente de curso les deja como tarea al estudiante y le brinda un manual de Matlab. Por lo tanto, el análisis realizado de los libros de Control Clásico nos brinda un panorama acerca del uso de la transformada de Laplace, mediante la función de transferencia, estabilidad de un sistema y espacios de estado de un sistema, y gracias a estos temas se le da un significado a la transformada de Laplace.

Relación y diferencias entre las praxeologías identificadas

Primero, podemos indicar que ambas instituciones E(M) y E(DI) ponen su foco de atención a la resolución de tareas aplicativas, como resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales o hallar la función de transferencia de algún sistema de control dado.

En la E(DI), se observa que la validación de cada técnica se hace debidamente respetando los conocimientos producidos en la E(M). Sin embargo, encontramos que en T_7^* , la tecnología θ_7^p se justifica con el Matlab para su técnica, esta validación no proviene de la E(M), pero se considera como válida para los ingenieros mecatrónicos en formación, es decir, la técnica y tecnología que se usa en T_7^* no proviene de la tecnología teórica, sino de la componente práctica.

Además, vemos que el componente tecnológico de la E(DI) es muy sensible al proceso de transposición, debido los discursos según el contexto donde se aplica, por ejemplo, para T_1^* vemos que θ_1^p se compone de modelos físicos establecidos, pero si se cambiara por varias masas, este modelo físico también cambiaría, haciendo que la tecnología empleada cambie.

En la figura 4 se muestran las relaciones existentes entre las praxeologías de las instituciones E(M) y E(DI) a través de los tipos de tareas. La línea punteada indica que los tipos de tareas T_3 y T_5 se relacionan de manera indirecta para calcular la función de transferencia, es decir, en algunos tipos de tareas se da una función de transferencia que proviene de una función

por tramos, ya sea de escalón unitario, de rampa, o función de Dirac. Luego se utilizan tablas para aplicar la inversa de la transformada de Laplace y regresarlo al dominio del tiempo.

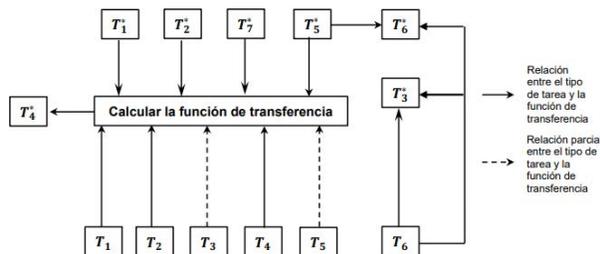


Figura 4. Esquema praxeológico para enseñar sobre la transformada de Laplace (EPESTL).

En resumen, podemos decir los pasos de la técnica que se realizan en los tipos de tarea (T_i) de la E(M) no se utilizan en los tipos de tarea (T_j^*) de la E(DI), ya que solo se llega a aplicar la transformada de Laplace, pero no la inversa, como en todos los tipos de tarea de la E(M).

Conclusiones y resultados

De acuerdo con el objetivo planteado inicialmente para nuestro trabajo, el cual era mostrar la transposición del saber relacionado a la transformada de Laplace, podemos identificar que los tipos de tareas de la E(M) son de carácter intramatemático, y la resolución de las tareas se realiza a través de las tablas de transformadas de Laplace y su inversa también, y su foco de atención se centra en resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas, para finalmente realizar ejercicios aplicativos de modelación matemática, es decir, su razón de ser.

También se pudo identificar que para el curso de Control Clásico (es decir, la E(DI)), la praxeología identificada hace uso de técnicas y tecnologías provenientes de la E(M), de manera que se pueden ejercer tareas propias del entorno profesional del ingeniero mecatrónico, es decir, la contribución de la E(M) se encuentra principalmente en el nivel del desarrollo de las tecnologías que validan las técnicas, según los criterios específicos para el área de la Teoría de Control.

Además, en el curso de Control Clásico, se puede observar en la praxeología encontrada que en la mayoría de problemas que se resuelven en el curso no se utiliza la definición formal de la transformada de Laplace a través de la integral impropia, tampoco se resuelve de manera explícita una ecuación diferencial, ya que lo único que se necesita en algunos problemas es hallar la función de transferencia tomando la transformada de Laplace en cada término y ya no buscar la solución específica, sino que trabajando solo en “s”, se busca las características del sistema (estabilidad) sin necesidad de llegar, en algunos casos, a la solución del sistema en el dominio del tiempo. También podemos ver que, incluso en el curso de Control Clásico, hay ejercicios donde ya no se utiliza la transformada de Laplace, sino que se hace a través de Matlab.

Se ha podido identificar que el concepto de la transformada de Laplace no solo tiene su foco de atención como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales, sino también como un instrumento potente para la interpretación del comportamiento básico de un sistema de control. Por tal motivo, se sugiere que en el curso de ecuaciones diferenciales se deban considerar más tipos de tareas basadas en modelación matemática, de modo que el estudiante se adapte a las

técnicas y tecnologías que se aplican, como en los tipos de tareas T_1, T_2, T_4, T_5, T_6 y T_7 donde se modelan sistemas que requieren conocimientos básicos de física y con ayuda de la E(M).

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas – línea de epistemología de las matemáticas en didáctica de las matemáticas, por el apoyo brindado en la realización de la investigación.

Referencias y bibliografía

- Castela, C. & Romo, A. (2011). *Des Mathématiques A L'Automatique: Etude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 31(1), 79-130.
- Chaachoua, H., & Bessot, A. (2019). *La notion de variable dans le modèle praxéologique*. Educação Matemática Pesquisa (EMP), 21(4), 234-247.
- Cordero, F., Valle, T. & Morales, A. (2019). *Uses of the optimization of engineers in training: the role of mechatronic engineering and the work of Lagrange*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 22(2). 185-2012.
- Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2005). *Sistemas de control moderno*. Pearson.
- Flores, D. (2021). *Un modelo praxeológico para el estudio de la transformada de Laplace en ingeniería mecatrónica*. [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional – Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Guzmán, P. (2016). *Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio institucional – Instituto Politécnico Nacional.
- Hernández, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicaciones y simulación con matlab*. Pearson Educación.
- Miranda, E. (2011). *Epistemología de la Transformada de Laplace y sus Implicaciones en la Didáctica de las Matemáticas*. Didac, (56-57), 76-81. Recuperado de <https://biblat.unam.mx/es/revista/didac/articulo/epistemologia-de-la-transformada-de-laplace-y-sus-implicaciones-en-la-didactica-de-las-matematicas>
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Quinta Edición. Madrid: Pearson Educación, S.A.
- O'neil, P. V. (2011). *Advanced engineering mathematics*. Nelson Education.
- Silva, L. T. (2017). *El diseño de un desfibrilador: una actividad de modelización matemática para la formación de ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio institucional – Instituto Politécnico Nacional.
- Zill, D. G., Hernández, A. E. G., & López, E. F. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (No. 970-686-487-3.). México: Thomson Learning