XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Una caracterización de las prácticas estocásticas en el texto de Thomas Bayes (1763)

Cristian G. **Paredes-Cancino**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
México
cristian.paredes@cinvestav.mx
Gisela **Montiel-Espinosa**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
México
gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

En este trabajo reportamos un estudio documental cuyo objetivo es caracterizar las prácticas estocásticas que subyacen a la actividad matemática del Teorema de Bayes. Para su desarrollo se siguió un esquema metodológico para estudios histórico-epistemológicos desde la Socioepistemología que se fundamenta en el análisis cualitativo de contenido. Como resultados se ha identificado que la práctica a nivel de actividad vinculada con la emergencia del Teorema de Bayes se sitúa en la medición de la probabilidad de una conjetura realizada sobre la probabilidad desconocida de un suceso y esta se desarrolla a partir de algunas prácticas del nivel acción como experimentar, registrar datos y conjeturar.

Palabras clave: Matemática Educativa; Educación media superior; Enseñanza; Desarrollo curricular; Socioepistemología; Investigación documental; Estocástica.

Introducción

En el marco de los significados de probabilidad, se ha reportado la supremacía en la enseñanza de los significados laplaciano o clásico y frecuentista de la probabilidad, dejando de lado el significado subjetivo. Respecto al frecuentista, Borovnick (2021) señala que ha sido la base para el desarrollo teórico del paradigma de la inferencia informal, sin embargo, destaca que la inferencia es más natural de entender desde la integración de elementos bayesianos y el riesgo – como contexto y sentido de la probabilidad–. Al respecto de la probabilidad bayesiana, algunos estudios, como el de Carranza (2014), señalan que en el escenario escolar se prioriza la mirada procedimental por encima de los aspectos asociados a su significado. A su vez, Borovcnik (2012) y Vancsó et al. (2021) destacan la falta de trabajo sobre el vínculo de la probabilidad con la inferencia y que las ideas bayesianas están excluidas de los planes de estudio e incluso de la investigación didáctica.

Entonces, con el fin de incidir en esta área del campo, nos proponemos analizar la naturaleza subjetiva del significado y el vínculo entre la probabilidad y la inferencia desde una perspectiva bayesiana, en particular, en su génesis para profundizar en la actividad matemática que le da origen y le caracteriza. Así, presentamos parte de una investigación documental de corte histórico cuyo objetivo es: *identificar las prácticas estocásticas que emergen en la actividad matemática de la génesis del Teorema de Bayes.*

La investigación sobre el Teorema de Bayes se ha posicionado desde dos enfoques, uno cognitivo y otro didáctico. El primero se ha centrado en explicar las formas de razonar de los individuos ante la incertidumbre, lo que ha dado paso a la tipificación de sesgos y heurísticas. Por otra parte, en lo didáctico se hace un llamado a la centración en ciertos recursos (como las visualizaciones, la naturaleza y formato de los datos) como medios para mejorar el razonamiento bayesiano. Dentro de esta, el señalamiento sobre el riesgo pone foco en el papel del contexto, lo que resulta interesante para realizar un acercamiento diferente a las formas desde y cómo se ha realizado la investigación sobre el Teorema de Bayes, en particular, un enfoque social desde el cual el contexto juega un rol sustancial para entender la actividad humana.

En relevancia con lo anterior, la noción de *prácticas* ha sido una manera mediante la cual se han realizado acercamientos en el campo de la Matemática Educativa con una mirada social. Dicha noción podemos situarla en las teorías de prácticas y es un constructo empleado para comprender y explicar la actividad humana en el mundo social. En nuestra disciplina la mirada centrada en prácticas se ha introducido desde diferentes perspectivas teóricas, como ejemplo, podemos considerar las investigaciones de Dogruer y Akyuz (2020), Triantafillou y Potari (2010) y Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (2022) quienes respectivamente se interesan por reconocer las *prácticas matemáticas* asociadas a ciertos contenidos en el *escenario escolar*, en el *lugar de trabajo* y a través de *fuentes históricas*. Esto habla de que “las prácticas matemáticas no son singulares, monolíticas u homogéneas … y que incluyen múltiples formas …” (Moschkovich, 2013, p. 264).

En este sentido, hemos considerado abordar dicho constructo desde la perspectiva de la Socioepistemología, al reconocer la actividad matemática como actividad humana y por la consideración de distintos tipos de saberes (culto, técnico y popular).

Elementos teóricos

La Teoría Socioepistemológica se ha interesado por estudiar la *construcción social del conocimiento matemático* a través de las *prácticas* (matemáticas) que acompañan y anteceden la producción de conocimiento, es decir, es una perspectiva cuyo interés es estudiar la forma en la que las circunstancias sociales y culturales de la actividad humana enmarcan, regulan y constituyen la producción de conocimiento matemático.

Prácticas matemáticas desde la Socioepistemología

La construcción de conocimiento desde este enfoque queda revelada en una *progresión pragmática de prácticas* también conocida como *anidación de prácticas*. Dicho modelo se compone de la práctica en el nivel acción, seguida por la práctica en el nivel actividad y la práctica socialmente compartida. Así, se entiende la *práctica* (matemática) siguiendo a Schatzki (1996) como el hacer (matemático) organizado de las personas, que se estructura de acuerdo con el contexto donde están situadas y a su vez da significado a lo que se hace. En particular, estamos interesados en reconocer aquellas *prácticas* de *naturaleza estocástica* (las relacionadas con la estadística y la probabilidad) en un escenario histórico. Es decir, se quiere comprender la epistemología intrínseca del Teorema de Bayes a partir de prácticas mediante un análisis del texto original de Thomas Bayes (1763).

Elementos metodológicos

Para el desarrollo del estudio se realizó un análisis cualitativo de datos siguiendo la propuesta de Vargas-Zambrano y Montiel-Espinosa (2022), diseñado para estudios de corte histórico-epistemológico desde la Socioepistemología. Estos autores proponen un esquema metodológico de cinco momentos: 1) determinación del propósito y texto de análisis; 2) recolección, selección y organización de fuentes de datos; 3) pre-análisis de los datos; 4) análisis de datos o historización; 5) interpretación e inferencia.

Por extensión, en este reporte profundizamos en el momento de historización, del que se desprenden directamente los resultados y las conclusiones que aquí presentamos.

Historización

La historización es “el estudio histórico-crítico de la epistemología situada que describe la construcción y constitución del saber matemático” (Vargas-Zambrano y Montiel-Espinosa, 2022, p. 7). Este se realiza mediante un acercamiento histórico-matemático a las matemáticas del pasado y se constituye de manera general por un análisis contextual y otro textual. Como producto de la historización se genera una reconstrucción racional de la actividad matemática atendiendo a sus aspectos situacionales y se identifican las prácticas matemáticas asociadas a la construcción social de un conocimiento matemático específico. Los elementos que conforman la historización pueden verse en la Tabla 1.

Tabla 1
Elementos del análisis histórico-epistemológico

Historización como historia crítica del saber	
Análisis contextual Historia crítica externa del saber a través del contexto de significación	Análisis textual Historia crítica interna del saber a través de la reconstrucción de la actividad matemática
▪ Contexto cultural: características sociales de grupos culturales que reflejan necesidades ideológicas, políticas, cosmovisiones y que rigen su racionalidad. ▪ Contexto situacional: factores o circunstancias espacio–temporales que inciden sobre el sujeto relacionado el saber matemático de interés. ▪ Contexto de la situación específica: actividad matemática específica que origina problemas y soluciones vinculadas con la emergencia del saber.	▪ Acción: es la práctica derivada de las transformaciones realizadas sobre los objetos, dirigidas por un sujeto y suscitadas por el objetivo de la tarea matemática. ▪ Actividad: es la práctica resultante de la organización de acciones articuladas intencionalmente hacia un objetivo de la tarea matemática.

Resultados

Para desarrollar el estudio histórico-epistemológico se seleccionó la obra *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* de Bayes (1763), la cual se reconoce como el primer texto donde se encuentra establecida la construcción de la primera versión del método actualmente conocido como Teorema de Bayes y que muestra un tratamiento de la inferencia inductiva.

Análisis contextual

El *contexto cultural* se enmarca en la Ilustración temprana, período que genera un movimiento hacia la comprensión del mundo (conocimiento humano) a través del pensamiento racional, en lugar de las creencias religiosas. Algunas características de este período son: las luchas religiosas entre miembros de la iglesia establecida en Inglaterra y los disidentes o inconformistas, de la cual la familia Bayes era partidaria; uno de los principales representantes científicos fue Newton sobre el cual el propio Bayes escribe una obra; el desarrollo de la doctrina filosófica denominada empirismo, promovida por Locke y Hume. En particular, la visión empirista de Hume da paso al llamado problema de la inducción, el cual es un rechazo a la inferencia inductiva. De acuerdo con Stigler (2013) el trabajo de Bayes busca ser una herramienta defensiva para combatir las afirmaciones de Hume mediante la probabilidad.

En relación con el *contexto situacional*, este está impregnado por el desarrollo y progreso de la naturaleza de los tipos de problemas de probabilidad hacia el *siglo XVIII*: pasando por el análisis de situaciones simétricas, transitando por situaciones asimétricas y de probabilidad conocida y finalizando en situaciones de probabilidad desconocida.

El *contexto de la situación específica* se caracteriza por una inversión en los análisis de probabilidad de Bernoulli y de Moivre. Dicha forma de análisis era un tránsito de razonar a partir *de las causas a los efectos* a *de los efectos a las causas*. El problema matemático del texto puede sintetizarse de la siguiente forma: si se sabe que en n pruebas un suceso se ha observado p veces, ¿qué se puede decir de la probabilidad del suceso? Cabe destacar que para el desarrollo de las proposiciones a través de las cuales se da solución al problema, Bayes propone un modelo físico que consta de una mesa plana y cuadrada, sobre la que se lanzan bolas sin apuntar y la medida de probabilidad está en relación con las propiedades geométricas del modelo. De acuerdo con Daston (1988), el método construido en el texto de Bayes permite "determinar 'en qué grado' las observaciones confirman una conjetura dada y así *medir* 'la fuerza del razonamiento analógico o inductivo'" (p. 256, resaltado en el original).

Análisis textual

Para llevar a cabo este análisis tomamos como referencia el texto original de Bayes (1763), traducciones del texto original (Bayes, 1763/2001) e interpretaciones del texto (Dale, 1999). El análisis textual se llevó a cabo mediante el desarrollo de tres momentos: una etapa descriptiva, una analítica y una inferencial. A manera de ejemplo, mostraremos el análisis de la proposición 8:

> Si sobre BA se alza la figura $BghikmA$ con la siguiente propiedad de que … $y = Ex^p r^q$, entonces digo que antes de lanzar la bola W, la probabilidad de que el punto o se encuentre entre f y b, dos puntos cualesquiera de la línea AB, suponiendo que el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces en $p + q$ pruebas, es la razón entre $fghikmb$ … y CA el cuadrado sobre AB. (Bayes, 1763, p. 388)

En la primera etapa se reconoció la estructura discursiva del texto en general y de cada una de las proposiciones con el fin de tener un conocimiento del contenido, construir bloques de proposiciones con un objetivo común y hacer una reconstrucción de estas vinculada con la solución del problema matemático. La obra de Bayes se divide en cuatro partes principales: 1) planteamiento del problema; 2) teoría base (definiciones y proposiciones); 3) construcción del método solución; 4) empleo del método en situaciones específicas. La Figura 1 muestra la estructura de la proposición 8 (tercera sección), una descripción de los elementos que la conforman y la red de proposiciones y lemas con las que se vincula.

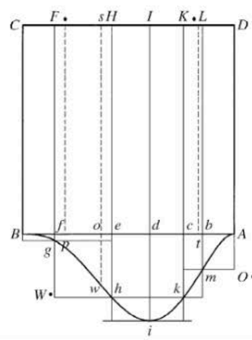
PRIMER NIVEL DE ANÁLISIS			
Mini-genero	**Preguntas**		**Proposición 8**
Enunciado	**¿Qué hace?**	¿Qué se quiere demostrar?	Que la probabilidad de que el punto o se encuentre entre f y b en AB y que el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces, es la razón entre $fghikmb$ y CA.
Exposición	**¿Qué hace?**	¿Qué objetos estocásticos tiene para demostrarlo?	**Sucesos**: **Primer suceso**: el punto o esté entre f y b (el punto o define el suceso M); **Segundo suceso**: el suceso M ocurre p veces y no ocurre q veces en un total de $p + q$ pruebas. **Distribución**: con la propiedad de que $y = Ex^p r^q$ donde y,x,r representan respectivamente las razones de $y = bm/AB$, $x = Ab/AB$, $r = Bb/AB$ y E es el coeficiente del término en el que aparece $a^p b^q$ cuando se desarrolla el binomio $(a + b)^{p+q}$. 
Especificación	**¿Qué hace?**	¿Qué se hace en la proposición?	Demostrar por contradicción mediante la comparación de probabilidad conjunta de los dos sucesos para distintas regiones entre f y b, que las medidas de probabilidad en conjunto no son mayor ni menor que cierta razón supuesta.
Demostración	**¿Cómo lo hace?**	¿Cuáles herramientas matemáticas utiliza para demostrar?	**Lema 1**: Medición de la probabilidad. **Lema 2**: Probabilidad del suceso éxito (suceso M). **Proposición 1 – Corolario**: Probabilidad del suceso fallo para sucesos inconsistentes. **Proposición 3**: Probabilidad conjunta para sucesos dependientes. **Proposición 7**: Probabilidad binomial.
Conclusión	**¿Para qué lo hace?**	¿Cuál o cuáles intenciones tiene la proposición?	Establecer la medida de la probabilidad conjunta de dos sucesos dependientes.

Figura 1. Primer análisis de la proposición 8 del texto de Bayes (1763)

En la segunda etapa se hizo una reconstrucción en términos de acciones y actividades mediante las preguntas analíticas ¿qué hace?, ¿cómo lo hace? y ¿para qué hace lo que hace?, que permiten reconocer los aspectos intencionales, operativos y funcionales. En la Figura 2, se muestra el análisis de la actividad matemática de la proposición 8, en la cual se identifica que la práctica a nivel actividad es la medición de la probabilidad conjunta y se organiza a través de prácticas de nivel acción como la definición de sucesos, la conjetura, la medición de las probabilidades de los sucesos. Cabe destacar que en esta proposición subyacen distintas medidas de probabilidad a cuantificar para obtener una nueva medida de probabilidad.

SEGUNDO NIVEL DE ANÁLISIS
Acciones ¿Qué hace? ¿Cómo lo hace?
A partir de la consideración de un *punto o* en AB que define el suceso M (región sobre *Ao*), se determina la ***medida de probabilidad del suceso M*** empleando el *Lema 2*. Luego se determina la ***medida de probabilidad del suceso contrario***, es decir, la probabilidad de que no ocurra el suceso *M* (región sobre *Bo*) empleando el *corolario de la proposición 1*. Considerando estas medidas, se establece la ***medida de probabilidad de la ocurrencia del suceso M en*** $\boldsymbol{n = p + q}$ ***pruebas*** mediante la *proposición 7*. A partir de lo anterior quedan definidos dos sucesos: el primero sobre la posición del punto *o* y el segundo sobre la ocurrencia del suceso M en n pruebas en relación con la posición del punto *o*. Ahora se ***conjetura*** un intervalo en el que se encuentra el punto *o* que define el suceso M. Se hace una partición del intervalo y de forma homóloga para cada intervalo se sigue lo siguiente: se determina la medida de probabilidad de que el punto *o* esté en cierto intervalo de la partición y la medida de probabilidad del suceso en $p + q$ pruebas, supuesta la ocurrencia del primer suceso. Y mediante la *proposición 3* se cuantifica la ***medida de probabilidad conjunta*** de los sucesos. Luego, bajo la consideración de la *proposición 1* se establece la ***medida de probabilidad de sucesos inconsistentes*** (cada uno de los intervalos de la partición).
Actividades ¿Para qué lo hace?
Se determina la *medida de probabilidad de ambos sucesos* para los distintos intervalos con el objetivo de establecer la **medida de probabilidad conjunta** para la variable posición del punto *o* en AB (en el intervalo supuesto) y la variable número de ocurrencias del suceso M en n pruebas.

Figura 2. Segundo análisis de la proposición 8 del texto de Bayes (1763)

La tercera etapa, ha permitido identificar que el objetivo principal de Bayes era partir de ciertas observaciones para el estudio de la probabilidad del suceso y para ello se necesitaba de una conjetura sobre la probabilidad desconocida como punto de partida. Por otra parte, el significado de la medida de probabilidad está asociado con el experimento y refiere al grado de certeza que tiene la conjetura dada, sobre la verdadera probabilidad.

Conclusiones

Derivado de la historización se han reconocido algunas prácticas estocásticas asociadas con el Teorema de Bayes en el escenario histórico, como: experimentar, registrar datos, conjeturar, medir la probabilidad de la conjetura. De manera puntual, la práctica de medir la probabilidad de la conjetura adquiere el nivel de actividad y las restantes prácticas el estatus de acciones. El análisis también nos ha permitido identificar que la actividad matemática en la génesis del Teorema de Bayes está permeada por la noción de equiprobabilidad y asociada con un experimento de naturaleza binomial, lo que resulta en un modelo que atiende a una situación específica y cuya estructura es menos compleja a la forma en que se aborda este conocimiento matemático en el escenario escolar.

Por otra parte, estos elementos identificados en el estudio pretenden ser la base de un modelo epistemológico específico para el Teorema de Bayes a partir de prácticas estocásticas que describa la construcción social de este conocimiento matemático. El modelo busca ser un referente para la construcción de diseños para el aula y como herramienta analítica para el estudio de la actividad estocástica en el escenario escolar.

Referencias y bibliografía

Bayes, T. (1763). An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. *Philosophical Transactions*, *53*, 370–418. https://doi.org/10.1098/rstl.1763.0053

Bayes, T. (2001). Un ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina del azar (M. A. Gómez Villegas, F. J. Girón, M. L. Martínez y D. Ríos Insua, Traducción). *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales* (Esp), 95(1-2), 63-80. (Trabajo original publicado en 1763).

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2, 5-27. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.32

Borovcnik, M. (2021). Corner pillars of Probability Literacy. En *Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress* (pp. 602-607). International Statistical Institute.

Carranza, P. (2014). Presencia de interpretaciones bayesiana y frecuentista de la probabilidad en libros de estudio en francia. *Educação Matemática Pesquisa*, *16*(3), 1071-1087. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/21597

Cruz-Márquez, G. y Montiel-Espinosa, G. (2022). Medición Indirecta de Distancias y el Trabajo Geométrico en la Construcción de las Nociones Trigonométricas. *Acta Scientiae*, *24*(4), 81–108. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911

Dale, A. (1999). *A history of inverse probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson* (2ª ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8652-8

Daston, L. (1988). *Classical Probability in the Enlightenment*. Princeton University Press.

Dogruer, S. S. y Akyuz, D. (2020). Mathematical Practices of Eighth Graders about 3D Shapes in an Argumentation, Technology, and Design-Based Classroom Environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*, 1485–1505. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10028-x

Moschkovich, J. N. (2013). Issues regarding the concept of mathematical practices. En Y. Li y J. N. Moschkovich (Eds.), *Proficiency and Beliefs in Learning and Teaching* (pp. 257–275). Sense Publishers.

Schatzki, T. R. (1996). *Social practices: a wittgensteinian approach to human activity and the social*. Cambridge University Press.

Stigler, S. M. (2013). The True Title of Bayes's Essay. *Statistical Science*, *28*(3), 283–288. https://doi.org/10.1214/13-STS438

Triantafillou, C. y Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics, 74*(3), 275–294. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9237-6

Vancsó, O., Borocnik, M. y Fejes-Tóth, P. (2021). A complex concept about statistical inference and a planned school experiment based on it. En *Proceedings 63rd ISI World Statistics Congress* (pp. 596-601). International Statistical Institute.

Vargas-Zambrano, L. C. y Montiel-Espinosa, G. (2022). Los cortes del cono en la Geometría Griega: una caracterización de usos y significados más allá de la anécdota. *Revista de História da Educação Matemática*, *8*, 1-23. https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/514