

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Ajuste de curvas com o GeoGebra

Odair José Teixeira da **Fonseca**

Universidade Federal de Rondônia

Brasil

odairfonseca@unir.br

Rubens **Pazim**

Universidade Federal de Mato Grosso

Brasil

pazim@ufmt.br

Resumo

Nesta oficina apresentamos uma proposta de ensino sobre ajustes de curvas com a utilização do *software* livre GeoGebra. Propomos atividades de ajustes de modelos: ajuste linear, potência e logístico, aplicados a dois problemas experimentais relacionados à engenharia de processos e um problema sobre órbitas planetárias. A escolha pelo GeoGebra se justifica pela praticidade de sua funcionalidade por meio de interfaces gráficas, algébricas e planilhas. O objetivo é aproximar o conhecimento científico ao ensino em sala de aula por meio de recursos computacionais, evidenciando a importância da utilização desse mecanismo no processo de ensino e aprendizagem de matemática, além das possíveis contribuições com a divulgação científica.

Palavras-chave: Ajuste de Curvas; Regressão Linear; GeoGebra; Recurso Computacional; Dados Experimentais.

Introdução

Ao desenvolver atividades experimentais o pesquisador pode obter um conjunto de valores a partir das observações realizadas. Muitas vezes esses valores fornecem informações importantes sobre como o fenômeno observado se comporta ao longo do tempo ou durante o período investigado. Dessa forma, pode ser do interesse do pesquisador construir um modelo matemático que possa descrever o comportamento do problema estudado, a partir dos dados coletados. Neste caso, uma das formas de construir o modelo é por meio do ajuste de curvas. O tipo de ajuste dependerá do comportamento característico dos pontos dispostos no diagrama de dispersão (Pazim & Fonseca, 2022).

Considerando que os valores experimentais podem envolver uma quantidade relativamente grande de dados, a utilização de recurso computacional assume um papel importante como facilitador no desenvolvimento de cálculos, bem como na representação gráfica. Neste caso, indicamos as planilhas eletrônicas como um dos recursos computacionais disponíveis. Dentre as várias possibilidades, destacamos a planilha do GeoGebra, um *software* livre, “cuja interface [dinâmica] possibilita o trabalho com várias áreas da matemática, tanto do ponto de vista geométrico quanto algébrico” (Pazim & Fonseca, 2022, p. 4). Assim, além da vantagem de ser um programa de acesso livre, o caráter dinâmico de sua interface torna-o uma ótima opção do ponto de vista didático. Dessa forma, propomos nessa oficina, o desenvolvimento de atividades com o GeoGebra para implementação de métodos de ajustes de curvas.

Vários pesquisadores destacaram a importância da utilização de recursos computacionais em aulas de matemática. Por exemplo, Fey (1989) aponta que a aplicação de ferramentas computacionais a conceitos mais avançados de matemática mostra sua vantagem mais clara em qualquer situação que envolva muitas variáveis inter-relacionadas ou grandes conjuntos de dados. Assim, o acesso a computadores permite que os alunos trabalhem com coleções interessantes e realistas de dados numéricos (Fey, 1989). A pesquisa de Rojano (1996) aponta que a utilização de planilhas em ambiente de ensino ajudou os alunos na transição do pensamento específico para o geral. Borba (2009) afirma que o uso de *software* na sala de aula altera o *status* da visualização da aula, uma vez que o processo “mais chamativo”, mais dinâmico e interativo de desenhar gráficos de funções e diferentes figuras geométricas está se tornando mais comum nas aulas.

Souza e Calejon (2019) enfatizam que “o uso do “*software* GeoGebra” busca a interatividade auxiliando professor-aluno no processo de ensino – aprendizagem, procurando novas formas de solucionar as atividades propostas em sala de aula” (p. 232). O referido aplicativo é muito versátil e pode “ser utilizado em todos os níveis de ensino, onde combina a geometria, álgebra, elaboração de tabelas, formação de gráficos, e cálculos estatísticos em uma única aplicação” (Souza & Calejon, 2019, p. 232). Isto posto, o respectivo aplicativo pode ser considerado como uma ferramenta computacional tanto na comunicação/divulgação científica, quanto no ambiente escolar com o objetivo de contribuir com o ensino e aprendizado de conteúdos matemáticos.

Nesse sentido, considerando as potencialidades didáticas do *software*, nesta oficina buscamos evidenciar possibilidades de aproximação entre teoria e prática, seja no âmbito da pesquisa ou de ensino. Nas atividades, usaremos a versão on-line do respectivo aplicativo (<https://www.geogebra.org>). No que segue delineamos brevemente os procedimentos metodológicos do desenvolvimento da oficina. Advertimos que utilizaremos o ponto (.) como separador decimal para padronizar com a linguagem do GeoGebra.

Procedimentos metodológicos

Os procedimentos utilizados na realização das atividades são os descritos por Pazim e Fonseca (2022). Conforme descrito pelos autores, o GeoGebra se destaca pela praticidade e integração dinâmica entre planilhas e representações analíticas (pontos descritos como coordenadas) e geométricas (diagrama de dispersão) de dados experimentais. Assim, para uma diretriz a ser seguida na oficina, descrevemos brevemente esta integração. Na apresentação dos procedimentos metodológicos utilizaremos os dados da Tabela 1.

Planilha - para exibir a planilha eletrônica efetuamos as respectivas etapas: “*menu*” (barras horizontais no canto superior direito), posteriormente “*exibir*” e por fim selecionar a caixa de diálogo da planilha. Veja a Figura 1.

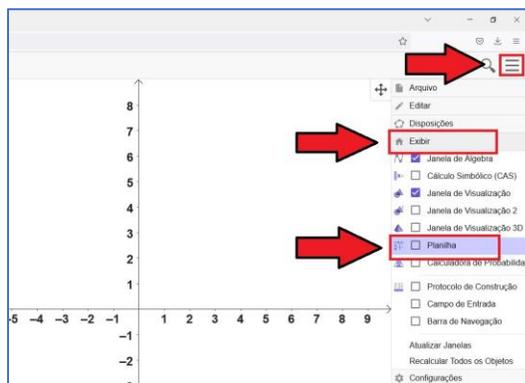


Figura 1. Acessando a planilha do GeoGebra.

Após a ativação/exibição da planilha, inserimos os valores da Tabela 1 e criamos uma lista de pontos efetuando as seguintes etapas: selecionamos as duas colunas e com o cursor do *mouse* no canto inferior direito das respectivas células deverá aparecer um sinal de “+”, clique com o botão direito, vá para “criar” e posteriormente “lista de pontos”. Automaticamente o GeoGebra irá exibir o diagrama de dispersão dos dados na janela de visualização e a representação analítica dos respectivos pontos na janela de álgebra. Veja a Figura 2: à esquerda exibimos os dados na planilha e à direita temos o diagrama de dispersão. Se necessário, redimensione os eixos cartesianos para uma melhor visualização geométrica (aqui, usamos a proporção 5:1).

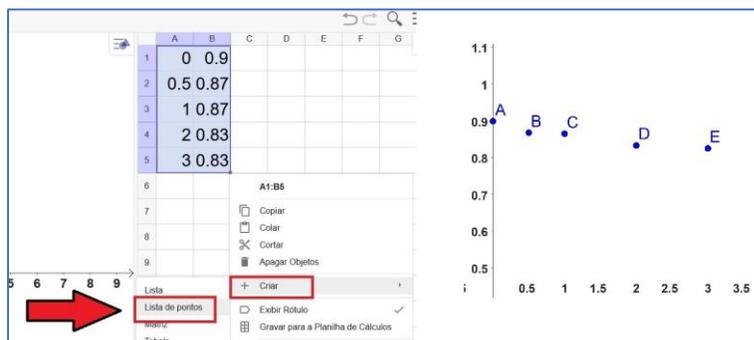


Figura 2. Criando lista de pontos com o GeoGebra.

Regressão - com a ferramenta “*Regressão Linear(Lista de Pontos)*” na janela de álgebra obtemos a reta de regressão dos respectivos dados. Simultaneamente é gerada a equação da reta na janela álgebra e a representação geométrica correspondente na janela de visualização. Veja as Figuras 3 e 5.

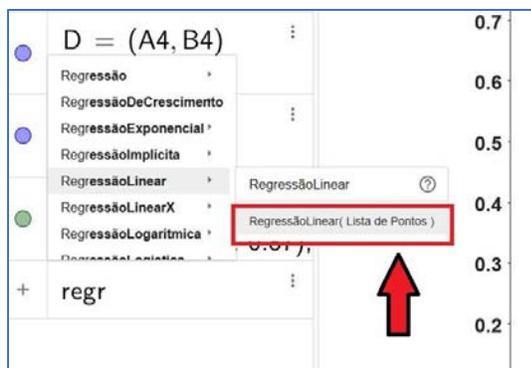


Figura 3. Acessando os recursos de regressão no GeoGebra.

Coefficiente de determinação - para obter o coeficiente de determinação R^2 da curva de regressão associada aos dados correlatos, usamos o comando “RQuadrado(Lista de Pontos, Função)” na janela de álgebra. Veja Figura 4.

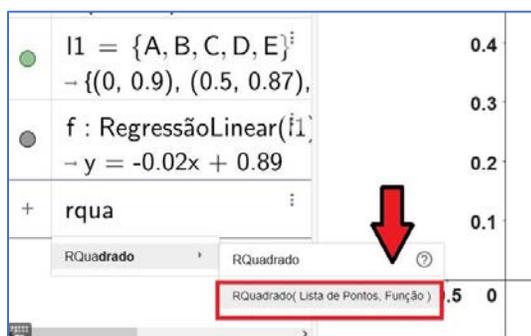


Figura 4. Acessando o recurso para o cálculo de R^2 no GeoGebra.

Atividades

Nesta seção propomos três atividades a serem desenvolvidas na oficina. As atividades, envolvem dados experimentais relacionados com problemas de engenharias de processos e distâncias médias entre os planetas e o sol.

Atividade 1

Na dissertação intitulada *Desidratação osmótica e secagem de maçãs: I. Comportamento do tecido em soluções osmóticas. II. Modelagem matemática de difusão*, o pesquisador desenvolve uma pesquisa, cujo objetivo consistiu em “avaliar a integridade celular de maçãs em função de tratamentos em soluções osmóticas de sacarose e elucidar sua influência sobre as cinéticas de desidratação osmótica e de secagem” (Rodrigues, 2003, p. 19). Na Tabela 1, apresentamos os dados sobre a concentração volumétrica de água para desidratação osmótica (DO) de maçãs em solução com 40% de sacarose.

Tabela 1

Concentração volumétrica de água na DO de maçãs em solução com 40% de sacarose.

Tempo (horas)	Concentração volumétrica de água (g/ml)
0	0.899
0.5	0.868
1	0.865
2	0.833
3	0.825

Fonte: Adaptado de Rodrigues (2003, p. 51).

Considerando os valores dispostos na Tabela 1, vamos utilizar o GeoGebra para construir o diagrama de dispersão e a respectiva curva de regressão. Após a inserção dos valores na planilha e a construção da lista de pontos, conforme delineado na seção anterior, observamos que os valores apresentam um comportamento linear. Assim, o ajuste por uma reta parece ser ideal. Para realizarmos esse tipo de ajuste, acessamos o “campo de entrada” na janela de álgebra e utilizamos a opção regressão linear, como a lista de pontos já foi construída e nomeada automaticamente por “l1”, basta digitar “RegressãoLinear(l1)” que o *software* irá exibir o gráfico da reta de regressão na janela de visualização e a expressão algébrica na janela de álgebra, neste caso a reta obtida e o respectivo coeficiente de determinação são

$$y = -0.024x + 0.889 \text{ e } R^2 = 0.913$$

Na Figura 5, exibimos o diagrama de dispersão, a reta de regressão e o respectivo valor de R^2 . O leitor interessado pode acessar o arquivo on-line com a construção da regressão para esta atividade através do link <https://www.geogebra.org/classic/jgq6caew>.

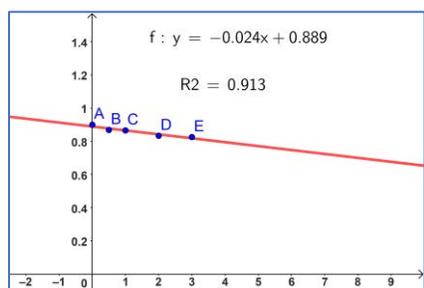


Figura 5. Diagrama de dispersão, reta de regressão e o coeficiente R^2 para os dados da Tabela 1.

Atividade 2

Na dissertação de mestrado intitulada *Efeito do congelamento e da temperatura de armazenamento na cinética de crescimento de Listeria monocytogenes em salsichas*, Massia (2022) desenvolve uma pesquisa com o objetivo de investigar:

a cinética do crescimento de *Listeria monocytogenes* inoculadas em salsichas comerciais do tipo *hot dog* para entender o efeito do armazenamento sob congelamento no posterior desenvolvimento desta bactéria em temperaturas desde a refrigeração até próximo da condição ótima de crescimento (Massia, 2022, p. 17).

Para facilitar a visualização dos valores no GeoGebra, apresentaremos os valores ajustados por uma escala conveniente. Na Tabela 2, disponibilizamos os valores experimentais obtidos pela pesquisadora.

Tabela 2

Contagens de *L. monocytogenes* em salsicha para temperatura de 15 °C com congelamento prévio de 30 dias.

Tempo (hora)	UFC/cm ² (× 10 ⁴)	Tempo (hora)	UFC/cm ² (× 10 ⁴)
0	0.01000	108	1.40471
12	0.01133	132	2.84291
24	0.01197	144	6.07894
36	0.01624	156	10.96633
60	0.08891	180	11.35695
84	0.33448	–	–

Fonte: Adaptado de Massia (2022).

Ao inserir os valores da Tabela 2 na planilha e criar a lista de pontos, observa-se que os dados apresentam um crescimento amortecido (veja Figura 6), sugerindo um comportamento logístico. Dessa forma, uma regressão logística parece bastante adequada, neste caso, utilizamos o recurso “Regressão Logística(Lista de Pontos)”, digitando Regressão Logística(11), no “campo de entrada”. Neste caso a curva obtida e o respectivo coeficiente de determinação são

$$y = \frac{11.86263}{1 + 68706645.76831e^{-0.12712x}} \quad e \quad R^2 = 0.98508$$

Na Figura 6, exibimos o diagrama de dispersão, a curva de regressão e o respectivo valor do coeficiente R². O leitor interessado pode acessar o arquivo on-line com a construção da regressão para esta atividade através do link <https://www.geogebra.org/classic/hbyx34yn>.

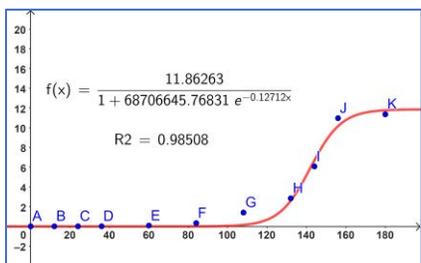


Figura 6. Diagrama de dispersão, curva de regressão e R² para os dados da Tabela 2.

Atividade 3

Considerando a Terceira Lei de Kepler “o quadrado período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita” (Tipler & Mosca, 2002, p. 301), ou seja, $T^2 = ka^3$, em que a é o comprimento do semieixo maior. Um modo funcional de relacionarmos o período com semieixo maior é

$$T = ka^{3/2}$$

Na sequência, apresentamos a Tabela 3 com a distância média dos planetas ao Sol e seus períodos de translação. Tendo em conta que as excentricidades das órbitas dos respectivos planetas são próximas de zero (McFadden et al, 2007), podemos considerar o valor da distância média de cada planeta ao Sol como sendo o comprimento do semieixo maior da respectiva órbita.

Tabela 3

Distância média dos planetas ao Sol ($10^{11}m$) com o período de revolução (em anos).

Planeta	Distância ($10^{11}m$)	Período (anos)
Mercúrio	0.58	0.24
Vênus	1.1	0.61
Terra	1.5	1
Marte	2.3	1.9

Planeta	Distância ($10^{11}m$)	Período (anos)
Júpiter	7.8	12
Saturno	14	29
Urano	29	84
Netuno	45	160

Fonte: Tipler e Mosca (2002) e Stewart (2009).

Com o uso do recurso “RegressãoPotência(lista de pontos)” construímos a regressão potência dos dados da Tabela 3. Neste caso a curva obtida e o respectivo coeficiente de determinação são

$$T = 0.54a^{1.5} \text{ e } R^2 = 1$$

Já esperávamos $R^2 = 1$, visto que os dados não são empíricos, mas sim referem-se a elementos teóricos. Vale destacar que a potência, valor equivalente a 1.5, já era conhecida previamente.

Dessa forma, podemos utilizar uma regressão com apenas um grau de liberdade para os parâmetros, no caso da função $T = ka^{3/2}$, o único parâmetro a ser calculado é k . Para isto, conforme descrito em Pazim e Fonseca (2022), inserimos a respectiva função na janela de álgebra com o parâmetro k na forma de controle deslizante e com o uso do recurso “Regressão(lista de pontos , função)” obtemos

$$T = 0.53a^{1.5} \text{ e } R^2 = 1$$

Note que os resultados são praticamente os mesmos, o que já era esperado. Entretanto, se aumentarmos a precisão para cinco algarismos significativos obtemos:

$$T = 0.54211a^{1.4994} \text{ e } R^2 = 0.9950 \text{ (regressão com dois graus de liberdade)}$$

$$T = 0.53227a^{1.5} \text{ e } R^2 = 0.99989 \text{ (regressão com um grau de liberdade)}$$

Destacamos que a segunda equação é mais apropriada para o ambiente planetário de Kepler. Na Figura 7 exibimos o diagrama de dispersão, da curva de regressão e o respectivo valor do coeficiente R^2 . O leitor interessado pode acessar o arquivo on-line com a construção das regressões para esta atividade através do link <https://www.geogebra.org/classic/tjvbbpjh>.

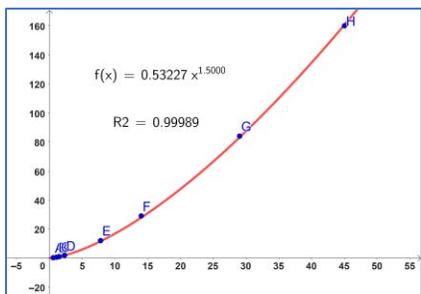


Figura 7. Diagrama de dispersão, curva de regressão e R^2 para os dados da Tabela 3.

Considerações finais

Nesta oficina propomos o desenvolvimento de atividades sobre ajustes de curvas com o GeoGebra. A ideia central é evidenciar a potencialidade do *software* como ferramenta computacional que pode contribuir com o ensino de análise de regressão, bem como o potencial do aplicativo na divulgação científica.

O foco principal consistiu em apresentar algumas funcionalidades do GeoGebra para em seguida desenvolver atividades sobre ajuste de curvas a dados tabelados. As atividades propostas contemplam três tipos específicos de ajustes de curvas: ajuste linear, ajuste logístico e ajuste potência. Em cada uma das práticas, após a construção do diagrama de dispersão, foi realizado o respectivo ajuste aos dados com os recursos do aplicativo.

As atividades podem ser desenvolvidas em cursos de graduação, e também, podem ser adaptadas para o ensino médio, visto que não demanda a discussão de conceitos matemáticos muito sofisticados, pois o foco principal está na utilização do aplicativo. A característica dinâmica da interface do GeoGebra permite que várias possibilidades possam ser explanadas.

Referências e bibliografia

- Borba, M. C. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, 41, 453–465. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0188-2>.
- Fey, J. T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educ Stud Math*. 20, 237–272. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00310873>.
- Massia, A. G. (2022). *Efeito do congelamento e da temperatura de armazenamento na cinética de crescimento de Listeria monocytogenes em salsichas*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina). Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFSC. <https://tede.ufsc.br/teses/PEAL0404-D.pdf>.
- McFadden, L. A., Weissman, P. R., & Johnson, T. V. (2007). *Encyclopedia of the Solar System*. (2a ed.). Elsevier.
- Pazim, R., & Fonseca, O. J. T. (2022). *Modelos matemáticos: análise de regressão com o GeoGebra*. (1a ed.). Fundação Uniselva. (MT Ciência – Série livros). <https://www.mtciencia.com.br/editora/livros>.
- Rodrigues, A. E. (2003). *Desidratação osmótica e secagem de maçãs: I. Comportamento do tecido em soluções osmóticas. II. Modelagem matemática de difusão*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista). Repositório Institucional da UNESP. <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/90791>
- Rojano, T. (1996). Developing Algebraic Aspects of Problem Solving within a Spreadsheet Environment. In: N. Bernarz, C. Kieran, L. Lee, (eds) *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*. (pp. 137–146) Mathematics Education Library, vol 18. Springer.
- Souza, R., & Calejon, L. (2019). Uso da tecnologia da informação e comunicação em uma sequência didática incluindo software GeoGebra no Ensino da Estatística Descritiva. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10 (4), 227–244. <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2432>.
- Stewart, J. (2009). *Cálculo Vol 1* (6a ed.). Cengage Learning.
- Tipler, P. A., & Mosca, G (2000). *Física para Cientistas e Engenheiros Vol. 1*, (4a ed.). LTC.