



Optimización de rutas: aplicación del PVA para determinar una ruta entre volcanes de Costa Rica

Cristin **Solano** Pérez
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

cristin.solano@ucr.ac.cr

Josías **Castillo** Valdivia
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

josias.castillo@ucr.ac.cr

Lisandro **Cortes** Brenes
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

lisandro.cortes@ucr.ac.cr

Kervin **Navarro** Ortiz
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

kervin.navarro@ucr.ac.cr

Resumen

En el presente informe se retoma el proyecto de investigación realizado en el curso MA-0560 Computación y Métodos numéricos de cuarto año de la carrera Enseñanza de la Matemática, en el cual se plantea la optimización de rutas mediante el Problema del Vendedor Ambulante (PVA), aquí se propone la resolución de un problema relacionado a la optimización de una ruta entre volcanes de Costa Rica. Junto con esto, se propone un taller dirigido a estudiantes avanzados en carreras relacionadas a la docencia matemática, con la intención de que logren generar la noción de optimización y que además el estudiante reconozca las facilidades que ofrecen los softwares matemáticos ante situaciones donde el cálculo manual es casi imposible.

Palabras clave: Matemática Combinatoria; Optimización; Tecnologías Educativas; PVA; MATLAB; Resolución de Problemas; Geometría; Educación Superior; Modelización.

Introducción

El tema de este trabajo de investigación es la optimización de rutas aplicando el Problema del Vendedor Ambulante (PVA); el mismo se desarrolló como parte de la evaluación del curso MA-0560 Computación y Métodos Numéricos de cuarto año de la carrera Enseñanza de las Matemáticas con el interés de darle solución a problemas en contextualizados que implicaran dificultad al momento de resolverlos de forma manual como lo es este caso de optimización de rutas, en donde según su cantidad el problema se torna factorial lo que imposibilita los cálculos manuales.

La finalidad de este presente trabajo de investigación es brindar una herramienta tecnológica que les permita a personas en formación docente en el área de matemáticas analizar y resolver problemas de optimización con un enfoque no tradicional y, seguidamente, que con este puedan innovar en sus futuras formas de enseñanza motivando al estudiantado a la elección de carreras STEM. Además, se espera enseñar al grupo de personas a participar, la importancia de nuestro principal resultado en esta investigación.

Como metodología se pretende el desarrollo de un taller con un grupo de estudiantes avanzados en carreras relacionadas a la docencia matemática, en donde resuelvan poco a poco el problema propuesto para este proyecto con el objetivo de que descubran que el problema se vuelve imposible de resolver manualmente a partir de cinco puntos de referencia pues el problema es factorial. Se espera, además, que las personas a participar en el taller logren intuir la fórmula para determinar la cantidad de rutas óptimas que se pueden trazar con los diferentes lugares establecidos en el problema.

En cuanto a la estructura que sigue el presente informe, primeramente, se plantean los elementos teóricos en los cuales se destaca las principales ideas matemáticas del problema en cuestión; seguidamente en el apartado de la descripción se muestran los diferentes componentes de la investigación, así como el proceso de la misma; también se muestra el problema y respectiva resolución haciendo uso del software MATLAB y, finalmente, se explica el taller propuesto.

Elementos teóricos

Problema del Vendedor Ambulante

Anaya et al. (2016) definen el PVA (TSP por sus siglas en inglés) como un problema de optimización en el que una persona debe realizar un recorrido entre ciudades en donde debe considerar visitar cada ciudad una sola vez y cumplir con que el punto de llegada sea el mismo punto de partida. Así entonces, esto presenta la ruta más corta que debe seguir esa persona para realizar el recorrido entre rutas, a lo cual se le conoce como la ruta óptima.

Matemática detrás del PVA

Este problema se puede definir formalmente como lo plantea Buthainah (citado en Anaya et al. 2016) como una cadena de elementos $G[N, A, C]$ que está dada por N cantidad de nodos (puntos), A el conjunto de arcos y C matriz, con entradas c_{ij} , donde c_{ij} es el coste (distancia) de moverse de un nodo i a un nodo j ; el proceso intrínseco que sigue el problema del viajero es el mismo que se plantea con los ciclos de Hamilton, en donde se busca recorrer todos los puntos, buscando además recorrer dichos puntos con un costo mínimo.

Para este problema se establecen tres condiciones según Corral (2020), la primera de ellas es que “exactamente una ciudad debe ser visitada inmediatamente después de la ciudad i ”, la segunda condición es que “exactamente una ciudad debe ser visitada inmediatamente antes de la ciudad j ” y la tercera condición es que “Se eliminan los subtours, los cuales son aquellas rutas que tras visitar una ciudad regresan al punto de partida sin terminar el recorrido completo”.

Función objetivo: definidas las tres condiciones anteriores, es utilizada la variable C_{ij} . Esta función busca el recorrido con la distancia total más corta. Para ello, se calcula el sumatorio de todos los caminos elegidos, es decir, cuando $X_{ij} = 1$ y a estos se les multiplica la distancia que supone recorrer dicho camino.

$$\text{mín} \sum_i^n \sum_j^n C_{ij}X_{ij}$$

Tecnologías de la Información y Comunicación

El uso de las TIC en el área de las matemáticas actualmente es uno de los temas más relevantes en la educación debido al impacto que esta genera en el aprendizaje del adolescente; como beneficios de la implementación de las TIC dentro del aula, García et al. 2016 menciona que tanto para el estudiantado como para el profesorado son provechosas ya que, permite el desarrollo de competencias y del pensamiento matemático en las personas estudiantes mientras que a las personas docentes les ayuda a desenvolverse en el manejo de la tecnología así como a innovación el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Descripción del trabajo

En un inicio, se tenía cierta noción sobre el PVA; sin embargo, se desconocía tanto la matemática detrás del problema como las condiciones para desarrollar el mismo y obtener la ruta más óptima. Dado esto se resolvió el problema con puntos (A, B, C, D) de forma manual para comprender el proceso que se seguía y de esa manera llegar a obtener la ruta más óptima; con esto también logramos visualizar la cantidad de rutas que se podían trazar según la cantidad de puntos establecidos. A partir de esto es que se alcanzó conocer los distintos enfoques que tenía el problema y con eso realizar el pertinente estudio de códigos de MATLAB para seguidamente plantear el problema y el taller.

Enfoque del problema

Antes de emplear la función objetivo, se debe resaltar que el PVA puede tener dos tipos de enfoque: simétrico o antisimétrico, en donde la principal diferencia entre estos enfoques radica en la cantidad “real” de distancias que existen entre las diferentes rutas. Para el desarrollo de este trabajo se utiliza un enfoque simétrico para el cual Corral (2020) señala que es un problema en el que el coste de trasladarse de una ciudad i hasta una ciudad j es el mismo que ir de j hacia i .

Con respecto a la cantidad de rutas posibles, estas se pueden generalizar mediante la fórmula $(n - 1)!$, donde n representa el número de ciudades por visitar; con el enfoque simétrico esa cantidad total de rutas se reduce a la mitad pues al ir de un punto a otro o

viceversa, la distancia que se ocupa recorrer es la misma, utilizando entonces la fórmula $\frac{(n-1)!}{2}$.

Códigos

En cuanto al código utilizado para la solución del problema propuesto a continuación, cada integrante se dio a la tarea de revisar diferentes códigos que podrían ayudar al objetivo planteado con la investigación, en este proceso se encontraron diversos códigos, de los cuales algunos no cumplían con nuestro objetivo de trazar una ruta óptima que considerara relieves; dos de estos códigos sí cumplían con parte de las características buscadas pues en estos existían aún problemas como por ejemplo, que al correr la función se obtenía una ruta de forma poligonal y no se mostraba la distancia óptima, por esta razón se decidió aplicar el segundo código en el proyecto, el cual pese a presentar la misma problemática con la gráfica de la ruta, proporcionaba la ruta óptima y la distancia asociada a esta. Finalmente, se realizó una inspección minuciosa de las líneas del código con la intención de comprender el propósito de cada chunk de la función y determinar qué partes de este aportaban información a la investigación y solución del problema.

Planteamiento del problema

Un grupo de personas desean realizar un recorrido por los volcanes Turrialba, Irazú, Poás, Rincón de la Vieja y Miravalles. Considerando que el punto de partida puede ser cualquiera de los cinco volcanes, ¿cuál sería la ruta más óptima para realizar dicho recorrido si el punto de llegada debe ser el mismo punto de partida?

Tabla 1.

Matriz simétrica de distancias entre volcanes.

Volcanes	1.Irazú	2.Turrialba	3.Poás	4.Miravalles	5. Rincón de la Vieja
1.Irazú	0	20.4 km	91.5 km	253 km	293 km
2.Turrialba	20.4 km	0	102 km	263 km	303 km
3.Poás	91.5 km	102 km	0	198 km	239 km
4.Miravalles	253 km	263 km	198 km	0	45.6 km
5. Rincón de la Vieja	293 km	303 km	239 km	45.6 km	0

Fuente: elaboración propia

Observe que al hacer variaciones en términos de punto de partida se obtienen rutas distintas, sin embargo, estas presentan la misma distancia total a recorrer, lo cual se debe a un problema de combinatoria. A continuación, se presenta solamente una de las rutas óptimas para realizar el viaje, determinada a partir del código en MATLAB.

En este caso la ruta más óptima que brinda el programa para realizar el tour es 3 4 5 2 1, la cual en términos de volcanes sería Poás - Miravalles - Rincón de la Vieja - Turrialba - Irazú, con la cual la distancia total es de 658.5 km.

Inf	20.4000	91.5000	253.0000	293.0000
20.4000	Inf	102.0000	263.0000	303.0000
91.5000	102.0000	Inf	198.0000	239.0000
253.0000	263.0000	198.0000	Inf	45.6000
293.0000	303.0000	239.0000	45.6000	Inf

El recorrido mas corto entre los diferentes puntos es : 658.5km, el cual esta definido por la ruta : 3 4 5 2 1

Figura 1. Resultado obtenido al ejecutar el código.

Corrección en la gráfica de la ruta

Una vez elegido el código que permitía calcular la ruta más óptima, así como su respectiva distancia, se propuso implementar algún otro código o herramienta que permitiera graficar la ruta contemplando los relieves; realizar una búsqueda entre las herramientas de MATLAB se encontró una que permitía realizar un “plot” de la ruta sobre el mapa de Costa Rica con relieve. Para ello fue necesario determinar las coordenadas de los volcanes en *Google Maps*, agregarlas en un archivo Excel con el objetivo de importarlas al entorno de MATLAB para correr el código a obtener un cambio en el trazo de la ruta como se presenta a continuación.

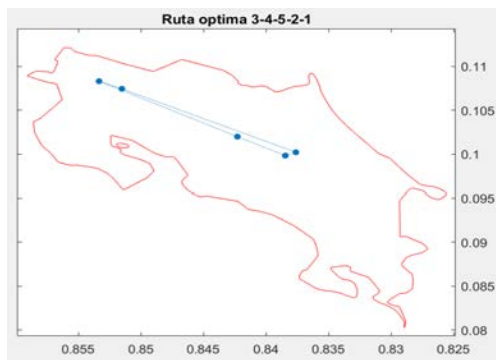


Figura 2. Trazo poligonal.

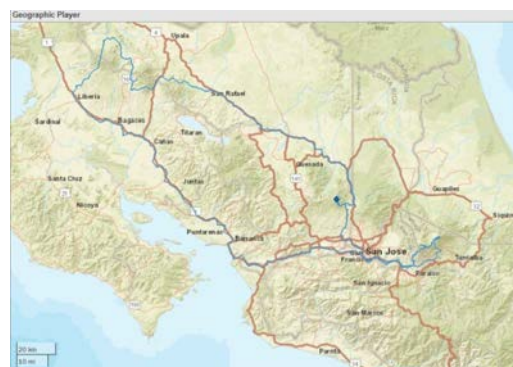


Figura 3. Trazo con relieve.

Reflexiones

En ocasiones durante el proceso de formación docente en el área de la matemática se deja de lado la implementación de tecnologías que permitan observar la matemática desde una perspectiva más aplicada lo que puede impedir al estudiantado el desarrollo de las habilidades tecnológicas y así limitar la innovación en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Con la implementación del software MATLAB en la resolución problemas se espera en el estudiantado un cambio en la forma de buscar una respuesta a una situación problema sin dejar de lado los conocimientos teóricos ya adquiridos.

Este proyecto de investigación permitió conocer y resolver el problema del PVA para aplicarlo en la resolución de problemas contextualizados, lo que permitió a su vez la

exploración del programa MATLAB, dejando en evidencia la utilidad del mismo como una herramienta didáctica dentro del aula.

Por último, en esta investigación se presenta el uso de una herramienta dentro del programa MATLAB, que no se logró observar en ninguna de las investigaciones consultadas y revisadas sobre el PVA; este aspecto resulta innovador y relevante dentro de la presente investigación.

Referencias

- Anaya, G., Hernández, E., Seck, J. y Medina, J. (2016). Solución al Problema de Secuenciación de Trabajos mediante el Problema del Agente Viajero. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 13(4), 430-437
<https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/143544/Anaya%3bHern%C3%a1ndez%3bSeck%20%20Soluci%C3%B3n%20al%20Problema%20de%20Secuenciaci%C3%B3n%20de%20Trabajos%20mediante%20el%20Problema%20del....pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Corral Sánchez, A. (2020). Estudio experimental de diferentes modelos matemáticos para resolver el problema TSP. <https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/105754/TFG-3222-CORRAL%20SANCHEZ.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- García, J. y Izquierdo, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad*, 4(7)
<https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654>