



## Avaliando investigações de Geometria com o GeoGebra 3D

**William Vieira**

Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN).  
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Guarulhos  
Brasil

[wvieira@ifsp.edu.br](mailto:wvieira@ifsp.edu.br)

**Esther Vanessa do Nascimento Santos**

Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN).  
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Guarulhos  
Brasil

[esther.vanessa@aluno.ifsp.edu.br](mailto:esther.vanessa@aluno.ifsp.edu.br)

**Roberto Seidi Imafuku**

Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN).  
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Guarulhos  
Brasil

[roberto.imafuku@ifsp.edu.br](mailto:roberto.imafuku@ifsp.edu.br)

**Emanoel Fabiano Menezes Pereira**

Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN).  
Instituto Federal de São Paulo – IFSP – Guarulhos  
Brasil

[emanoel.pereira@ifsp.edu.br](mailto:emanoel.pereira@ifsp.edu.br)

### Resumo

Discute-se, neste artigo, as potencialidades envolvidas em uma atividade investigativa com o GeoGebra 3D, que trata do levantamento de hipóteses a partir de um problema que combina as Geometrias Plana e Espacial. Para atingir este objetivo, foi proposto uma oficina online sobre o GeoGebra 3D para 17 licenciandos em Matemática, que foi seguida da aplicação da investigação para um dos participantes. Nas análises, utiliza-se os Três Mundos da Matemática. Os resultados indicam potencialidades da atividade em colocar em evidência conhecimentos e dificuldades dos participantes sobre elementos de Geometria Plana e Espacial.

*Palavras-chave:* Ensino e Aprendizagem de Geometria; GeoGebra 3D; Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação; Três Mundos da Matemática.

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) estão cada vez mais presentes no cotidiano e tiveram sua relevância acentuada nos últimos anos devido ao período pandêmico. A área da Educação Matemática também vem sendo impactada pelas TDIC, e professores e pesquisadores têm se debruçado sobre as possibilidades para os processos de ensino e de aprendizagem que são colocadas com o desenvolvimento de novos recursos tecnológicos. Essa perspectiva também se reflete nos documentos oficiais dos diversos países. No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) destaca que os estudantes devem exercitar a curiosidade intelectual, utilizando as tecnologias como incentivadora à resolução de diferentes tipos de problema, de forma crítica e significativa.

No caso da Geometria, pesquisadores têm apontado a importância do uso de recursos tecnológicos, em especial os softwares de geometria dinâmica, no ensino de seus diversos temas, que são potencializados nos processos de visualização de objetos, na identificação de conceitos e nas propriedades e formulação de conjecturas (Sousa, Alves, Fontenele, 2020; Soares, Santana, Santos, 2022).

Apesar dos diversos avanços recentes no ensino com o uso de tecnologias, Lecker e Pazuch (2020) apontam que pesquisas que desenvolvam atividades de ensino com o uso de softwares de geometria dinâmica e que investiguem a formação de futuros professores precisam ser expandidas. Procurando apresentar respostas para as demandas colocadas por estes autores, em (Santos, Vieira, Imafuku, Pereira, 2021; 2022) apresentamos atividades de ensino sobre Geometria Espacial aplicadas em oficina com futuros professores de Matemática com o uso de GeoGebra 3D. Nosso objetivo, neste artigo, é o de discutir uma das atividades que compõem essa investigação e que trata do levantamento de hipóteses a partir de um problema que combina as Geometrias Plana e Espacial. Os Três Mundos da Matemática é o referencial teórico adotado na análise.

### **Materiais e Métodos**

Para que nosso objetivo fosse atingido, realizamos uma oficina de duas horas e meia para 17 licenciandos em Matemática de uma instituição pública de ensino. Na oficina, foram apresentadas funcionalidades básicas do GeoGebra 3D, a fim de nivelar os conhecimentos dos participantes sobre as ferramentas que seriam necessárias para a realização das atividades de investigação. A oficina foi realizada de forma online, no período da pandemia, via a plataforma Google Meet, e os participantes puderam realizar as atividades pelos aparelhos que melhor se adequassem às suas realidades (tablets, notebooks, celulares ou computadores). Ao todo foram aplicadas três atividades de ensino. A atividade 1 foi realizada na plataforma GeoGebra Classroom (Santos et al., 2021; 2022), a atividade 2 e a atividade 3 foram realizadas no GeoGebra 3D.

Na parte inicial da oficina, a segunda autora deste artigo fez uma exposição do GeoGebra 3D, explicando como identificar e manipular os eixos coordenados, como exibir e esconder o plano xy (plano cinza) e os objetos construídos, e também apresentou-se a divisão e as possíveis utilizações da janela de álgebra e janela gráfica.

Neste artigo, discutimos a resolução do estudante D, um dos participantes da investigação. Ele utilizou seu computador pessoal para acessar o GeoGebra 3D online e compartilhou sua tela

na plataforma Google Meet, na qual foi acompanhado e questionado por um dos pesquisadores. Toda a discussão foi gravada com o programa OBS Studio. Os Três Mundos da Matemática (Tall, 2013) é o referencial teórico adotado nas análises. Essa teoria diz que o conhecimento matemático se desenvolve a partir de uma jornada pelos mundos: corporificado, que é o mundo em que a partir das percepções e ações sobre os objetos matemáticos: construções, imagens, figuras e objetos físicos ou virtuais, se desenvolvem imagens mentais; pelo mundo simbólico, que é o mundo dos símbolos, a partir dos quais se tornam possíveis a manipulação dos objetos e operações matemática (algébricas/aritméticas), e no qual os símbolos podem ser os próprios objetos matemáticos; e pelo mundo formal, no qual ocorre a construção dos conceitos, definições, axiomas, justificativas e demonstrações matemáticas, de acordo com a Teoria dos Conjuntos.

### **Discussão dos Resultados**

No que segue, apresentamos uma análise didática da atividade 2 e discutimos as respostas apresentadas pelo estudante D, nosso participante.

Com a construção proposta na atividade (Figura 1), nosso objetivo é o de avaliar se e como os participantes da investigação fazem a transição entre objetos simbólicos-formais, presentes no enunciado da atividade, e os objetos do mundo corporificado, caracterizado pela construção a ser realizada na janela de visualização do GeoGebra 3D. Com o item a, pretendemos observar se a partir da manipulação dos objetos (mundo corporificado), os participantes são capazes de identificar e classificar o hexágono regular (mundo formal). No item b, estamos interessados em avaliar a presença, ou não, de características formais nos argumentos utilizados pelos participantes para justificar que a figura construída no passo 3 é plana. Entendemos que uma das maneiras para justificar esse fato pode ser realizada com o auxílio da ferramenta de construção de Plano por três pontos (mundo corporificado-formal) e da Janela de Álgebra do GeoGebra 3D (características do mundo simbólico-formal).

**Atividade 2**

Construa, no GeoGebra, as figuras descritas abaixo e depois responda às questões.

Construção – Passos:

1. Desenhe um cubo ABCDEFGH, de aresta 1, com base ABCD no plano xy. Mantenha o cubo sem preenchimento.
2. Marque os pontos médios das arestas AD, DC, CG, GF, FE e EA.
3. Trace os segmentos que unem os pontos médios obtidos no Passo 2 na sequência em que aparecem.

Agora, responda:

- a) Qual a figura formada pela união dos segmentos traçados no Passo 3? Justifique sua resposta.
- b) A figura formada é plana? Justifique sua resposta.

*Figura 1.* Passos da construção e perguntas da Atividade 2

O participante D apresentou dificuldades na interpretação do enunciado e na construção proposta no item 1. Após construir o cubo destacado na Figura 2(a), foi questionado pelo pesquisador sobre as dificuldades que estava enfrentando, disse “Tá sendo colocar a aresta 1”.

Neste momento, o pesquisador o lembrou sobre o uso dos eixos coordenados como uma referência para a construção desejada; então, clicou na origem e em seguida no ponto  $(0, 1, 0)$  e obteve o cubo destacado na Figura 2(b). Essa construção foi seguida do comentário “Ahhh... entendi”.

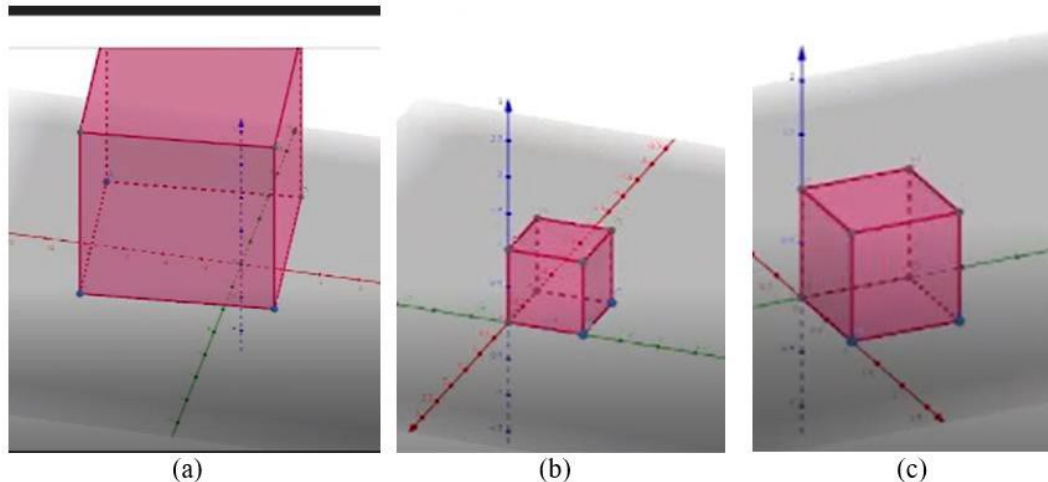


Figura 2. Construções realizadas pelo estudante D para o passo 1.

O participante, então, observa que o cubo construído está na parte negativa do eixo  $x$ , apaga a construção e a refaz (Figura 2(c)), clicando no ponto  $(1, 0, 0)$ . Questionado se o cubo poderia ser construído sobre a parte negativa do eixo  $x$ , disse “Poderia, eu acho... é, porque falou aresta ... é, na verdade poderia, pois a aresta é 1 de qualquer jeito, mesmo estando sobre o  $-1$ ”. Embora tenha apresentado dificuldades em seguir alguns passos, o estudante D mobiliza características do mundo simbólico-formal para realizar a construção proposta (mundo corporificado).

Nosso participante não teve dificuldades com o passo 2 da construção (pontos médios), porém se confundiu novamente no passo 3 (Figura 1), e precisou ser convidado a reler as orientações. A Figura 3 apresenta algumas etapas da construção realizada pelo participante.

Ao finalizar a construção, disse “Legal! Não sabia que formava essa figura não”.

Perguntado sobre o que achava ‘legal’, disse “Eu achei interessante, porque, eu não sei se estou falando certo, mas é legal que forma outro polígono dentro”. Questionado sobre qual seria o outro polígono, corrigiu-se “Não... é... o cubo é um poliedro. Forma um polígono dentro”. Neste ponto, entramos na discussão sobre qual é a figura formada e se ela é plana, propostas nos itens a e b da atividade 2 (Figura 1).

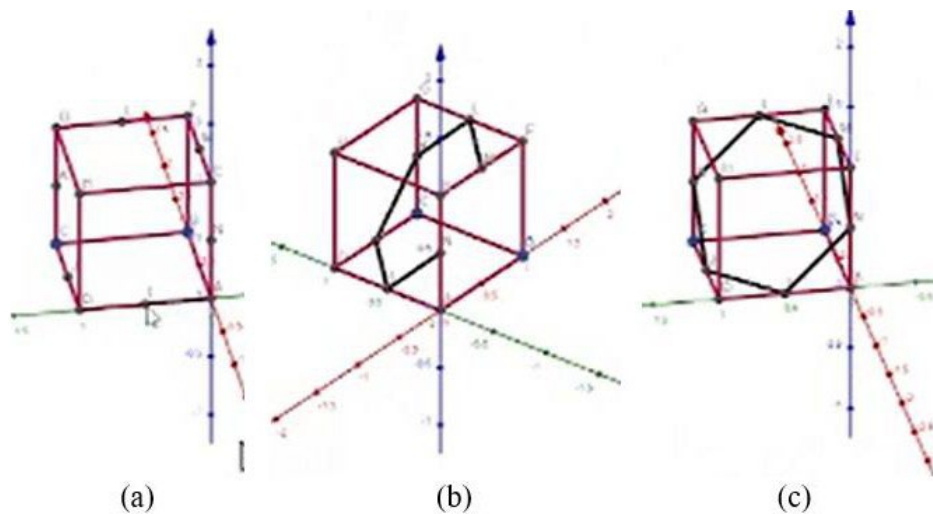


Figura 3. Construção dos passos 2 e 3 realizadas pelo estudante D.

Questionado, disse que “Eu sei que é um hexaedro. Mas... é um polígono né? O hexaedro é um polígono... deixa eu ver...”, em seguida, conta os lados da figura de 1 a 6 e reitera “É... é um hexaedro”. Neste ponto, optamos por não corrigir a linguagem do participante e, perguntado se a figura era plana, reiterou que “É uma figura plana... justamente por não ser uma figura tridimensional, né, ser uma figura plana, não é um poliedro, então... Eu classifico assim, se é plano é um polígono e se é tridimensional é um poliedro.”. Instigado a justificar sua posição, tentou apresentar a definição de polígono “Eu não lembro direito, mas ... Pra mim, assim, o polígono ele tem que ser plano e ter o mesmo número de lados e de ângulos, não é?”. Apesar da linguagem inadequada (não usa o termo hexágono) e de alguns equívocos relacionados ao Mundo Formal (a ideia de plano ou espacial não servem para identificar polígonos ou poliedros, pois há figuras planas que não são polígonos), o participante revela características do mundo simbólico-formal sobre polígonos e poliedros, mas não consegue estabelecer uma relação para justificar que a figura construída (mundo corporificado) é plana.

Ao dizermos que não estávamos convencidos de que a figura era plana com a justificativa apresentada, nosso participante ficou em dúvida e disse “É, aí me pegou... Na verdade ela está viajando pelas três dimensões aqui... assim, pra mim ela não tem volume, ela está dentro de um cubo, mas ela não tem volume, então acho que é plana”. Neste ponto, lembramos o participante da opção do GeoGebra para omitir objetos. Ele faz isso (Figura 4(a)) e então diz “Uhum não, ela é 3D... sei lá, fiquei confuso”. Perguntado sobre o que significa uma figura ser plana, disse “Que ela está só no eixo xy, né?” e, com base nessa ideia, reiterou “É... ela não é plana”. Então, questionado se não existem outros planos, voltou a apresentar dúvidas e confusões em sua análise, então, o informamos que uma figura ser plana significa estar contida em um plano.

Nesse sentido, o participante revela incompreensões sobre características formais relacionadas a Geometria Espacial, uma vez que houve a necessidade de uma intervenção para que se lembrasse da existência de outros planos.

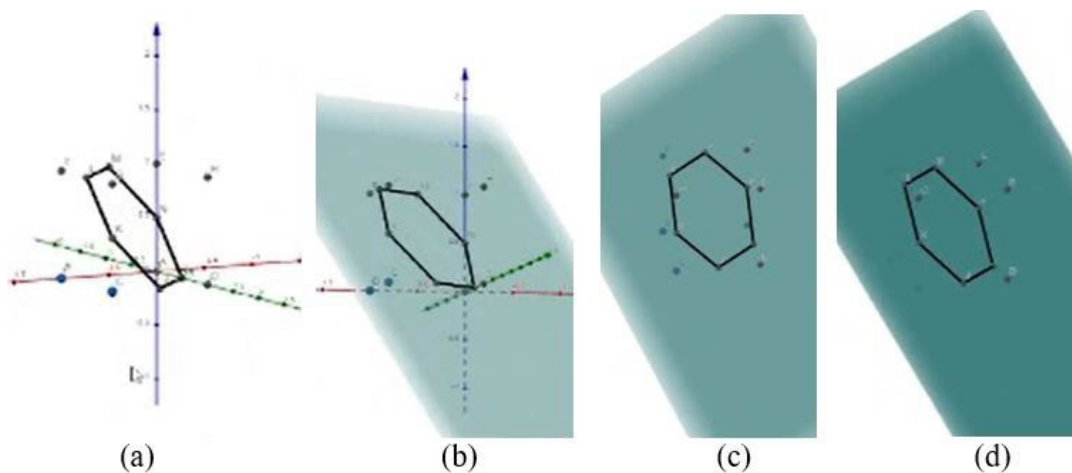


Figura 4. Construção de planos a partir do hexágono realizada pelo estudante D

Quase instantaneamente ao ouvir essa informação, disse “Ahhh... eu acho que se eu fizer... espera aí...”, busca a ferramenta Plano do GeoGebra 3D, clica em dois lados não consecutivos do polígono, gerando a imagem destaca na Figura 4(b), e diz “Aí eu criei outro plano, não é?”.

Perguntado se essa imagem garante que a figura é plana, disse “Olhando assim, se eu tirar os eixos [esconde os eixos coordenados], ela está contida em um plano, então ela é plana”. Neste caso, o estudante D se ampara na definição da ferramenta Plano do GeoGebra e na imagem construída (mundo corporificado-formal) para justificar sua decisão. No entanto, questionado novamente se a imagem garante o fato da figura ser plana, voltou a ter dúvidas “Aí eu não sei dizer”.

Neste ponto, perguntado se o fato de ter escolhido dois lados do polígono garante que os demais também estejam no plano obtido, nosso participante construiu um novo plano, usando outros dois lados não consecutivos (Figura 4(c)) e afirmou que continuava o mesmo plano.

Perguntado sobre a justificativa para isso, utilizou a Janela de álgebra do GeoGebra 3D e disse “Aqui ó, esse foi primeiro plano que eu criei [plano p na Figura 5(b)]  $0,25x, 0,25y, 0,25z$  e o outro que eu criei [plano q] tem as mesmas coordenadas [e isso garante] que são o mesmo plano, na minha opinião”. Embora use uma linguagem inadequada para se referir a equação do plano, o estudante D se vale de características do mundo simbólico (equações da janela de álgebra) para sustentar sua posição.

Questionado uma vez mais se esses dois planos bastavam, voltou a apresentar dúvidas e disse “Não... eu acho que tenho que fazer com todos os lados... mas eu acho que eu peguei os lados errados, eu acho que tenho que usar os lados opostos”, mas não soube explicar o porquê dessa posição.

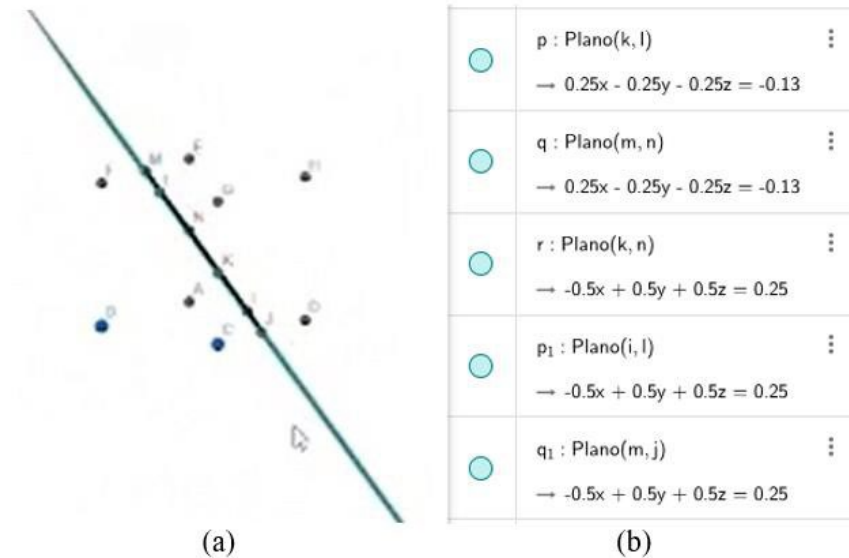


Figura 5. Visualização e Janela de álgebra usadas pelo estudante D

Em seguida a essa posição, constrói novos planos usando pares de lados opostos paralelos do hexágono (Figura 4(d)), volta a Janela de álgebra e se surpreende com as novas equações obtidas e diz “Ah não! Não, não! São planos diferentes”. Convidado a explicar a diferença entre eles, disse que “Quando eu usei dois lados opostos, as coordenadas são diferentes, olha [aponta a Figura 5(b)] antes era 0,25 no x e agora é 0,5”.

Neste ponto, insistimos para que nosso participante comparasse as imagens obtidas (Figura 4) e questionamos se ainda achava que os planos eram diferentes e ele disse que “Ah! Parecem o mesmo plano, não consigo ver diferença, mas... eu estou confuso por causa das variáveis, são diferentes, 0,25 e 0,5, e isso faz parecer que são diferentes, mas se eu olho a figura, parecem o mesmo plano, talvez tenha alguma equivalência, não sei, entre esses planos”. Nosso participante não conseguiu decidir-se sobre as diferenças observadas nas equações (mundo simbólico) e as imagens obtidas (mundo corporificado) e, sustentando-se nas imagens, reafirmou que a figura é plana.

### Considerações finais

De maneira geral, a atividade proposta apresentou potencialidades para o desenvolvimento de características dos mundos corporificado, simbólico e formal. De fato, ao longo da discussão, nosso participante pôde externalizar diversos conhecimentos sobre Geometria Plana e Espacial, e também muitas dúvidas. Em diversas situações, o estudante D conseguiu tomar decisões realizando uma jornada pelos diferentes mundos, em outras, contudo, dificuldades em transitar entre mundos possibilitaram que dúvidas de natureza conceitual (mundo simbólico-formal) fossem evidenciadas. As construções propostas (mundo corporificado) também se mostraram potenciadoras de discussões sobre conceitos e ideias (mundo formal).

Nesse sentido, seguindo (Sousa et al., 2020; Soares et al., 2022) os resultados da investigação também evidenciam potencialidades para o desenvolvimento do processo de visualização de objetos, a identificação de conceitos e a elaboração de conjecturas.

Ao final da atividade, as soluções, dificuldades e incongruências colocadas pelo estudante D foram discutidas coletivamente e permitiram que todo o grupo de estudantes avançasse na reflexão sobre os conceitos e ideias discutidos na atividade proposta.

### **Referências e bibliografia**

- Brasil. (2018). Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio. Brasília: MEC.
- Leclerc, O. P. V. G. y Pazuch, V. (2020). O ensino de Geometria Espacial: um panorama de pesquisas por meio de uma metassíntese. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 20(9), 38-61.
- Santos, E. V. N., Vieira, W., Imafuku, R. S. & Pereira, E. F. M. (2021). O uso do GeoGebra 3D no estudo de poliedros e suas propriedades: uma investigação com professores de matemática em formação inicial. *Anais do 12º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia – CONICT – IFSP Cubatão*, 12.
- Santos, E. V. N., Vieira, W., Imafuku, R. S. & Pereira, E. F. M. (2022). Uma investigação do uso do GeoGebra 3D no estudo de propriedades de poliedros. *Revista Ciência em Evidência*, 2, 3-16.
- Soares, F. R., Santana, J. R. & Santos, M. J. C. (2022). A realidade aumentada na aprendizagem de Geometria Espacial e as contribuições da Sequência Fedathi. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 13(4), 1-25.
- Sousa, R. C., Alves, F. R. V. & Fontenele, F. (2020). Aspectos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) Aplicada ao Ensino de Geometria Espacial Referente às Questões do ENEM com Amparo do Software GeoGebra. *ALEXANDRIA: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, 13(2), 123-142.
- Tall, D. O. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. 1. Ed. New York: Cambridge University Press.