



Habilidades de visualización dinámica tridimensional: el caso de los lugares geométricos 3D

Edinsson **Fernández-Mosquera**

Universidad del Valle – Universidad de Nariño
Colombia

edinfer@udenar.edu.co

Marisol **Santacruz-Rodríguez**

Universidad del Valle
Colombia

marisol.santacruz@correounivalle.edu.co

Resumen

Estudiamos la adquisición de habilidades de visualización dinámica tridimensional de estudiantes universitarios cuando resuelven problemas de lugares geométricos en el espacio usando geometría dinámica. Para ello, presentamos resultados de la implementación de dos actividades, propuestas en el marco de una trayectoria hipotética de aprendizaje, fundamentadas en analogías entre objetos del plano y del espacio. Con estas actividades se buscó fomentar habilidades de visualización, tales como, control teórico, predicción geométrica y cristalización. De manera preliminar nuestros resultados muestran que los estudiantes presentan dificultades en imaginar lugares geométricos en el espacio que se van generando de manera dinámica. Sin embargo, el uso de la geometría dinámica se ha convertido en una ayuda para que los estudiantes desarrollen habilidades de visualización en geometría 3D tales como la predicción y construcción geométrica en la resolución de problemas geométricos.

Palabras clave: Habilidades de Visualización, Aprendizaje; Lugares Geométricos 3D; Analogías del Plano y Espacio; Geometría Dinámica 3D; Educación superior.

Introducción

Investigaciones recientes en educación geométrica (Jones et al., 2019) señalan la atención creciente a la geometría tridimensional, promovida, en parte, por el estudio de los usos didácticos de la geometría dinámica y otros artefactos digitales 3D en el ámbito escolar (Sinclair et al., 2016). En particular, se ha resaltado el papel fundamental de las habilidades de visualización en

el aprendizaje de la geometría 3D y la pertinencia de abordar el desarrollo de habilidades de visualización en todos los niveles escolares (Sinclair et al., 2016). Sin embargo, los resultados de investigación en visualización 3D a nivel universitario aún son pocos y parciales, y, por tanto, constituyen un foco de interés para la educación geométrica actual (Eisenberg & Dreyfus, 1991; Jones et al., 2019).

Aunque Sabena et al. (2020) ratificaron que la visualización es un componente vital para la comprensión conceptual, el razonamiento y la resolución de problemas en matemáticas, la investigación ha exhibido que los profesores universitarios hacen poco uso de imágenes en sus clases de matemáticas, favoreciendo el desarrollo de pensamiento algorítmico por encima del pensamiento visual (Eisenberg & Dreyfus, 1991; Hitt, 1998; Presmeg, 2020).

Adicionalmente, se sabe que el pensamiento visual y el aprendizaje de las geometría 3D se ven altamente beneficiadas por el uso de geometría dinámica ya que proporciona una variedad de riqueza visual de imágenes espaciales, que no se consigue en representaciones estáticas en el papel y, en algunos casos, ni en el espacio físico (Pittalis & Christou, 2010). Al respecto, la investigación recomienda fomentar tareas matemáticas que favorezcan las habilidades de visualización dinámica en la geometría tridimensional (Ferrara & Mammana, 2014; Gutiérrez & Jaime, 2015; Jones & Tzekaki, 2016; Ng & Ferrara, 2020).

Así pues, la revisión de literatura nos permitió encontrar que existe necesidad de investigaciones sobre cómo las personas visualizan lugares geométricos en geometría tridimensional. Por lo tanto, estamos interesados en investigar cómo se fomentan las habilidades de visualización dinámica tridimensional cuando se resuelven problemas de lugares geométricos en tres dimensiones por medio de combinar analogías entre lo que sucede en geometría plana y en geometría espacial usando geometría dinámica 3D.

Habilidades de Visualización

Son entendidas como un conjunto de productos cognitivos (Arcavi, 2003) que les permiten a las personas imaginar, manipular, representar, construir y reflexionar sobre imágenes 2D o 3D, sean estáticas o en movimiento. Adicionalmente, investigadores (Bruce et al., 2017; Jones & Tzekaki, 2016; Sinclair et al., 2016) han señalado la existencia de diversos tipos de habilidades de visualización (susceptibles a ser desarrolladas a cualquier edad). En ese sentido, Mariotti y Baccaglini-Frank (2018) identifican ocho habilidades de visualización: 1. identificación; 2. reconstrucción; 3. construcción; 4. conciencia parcial-total; 5. manipulación; 6. control teórico; 7. predicción geométrica, y, 8. cristalización.

La Visualización dinámica tridimensional. Corresponden a habilidades que se requieren para razonar sobre estímulos en movimiento. Muchos autores (Boz, 2005; Morrow, 1997) señalan que la visualización dinámica llega a constituirse en una herramienta poderosa para lograr una mayor comprensión de muchos conceptos matemáticos o como recurso para resolver problemas; sin embargo, los estudiantes universitarios solo logran aprender a crear imágenes mentales estáticas de objetos 3D (Vallo & Zahorska, 2016), sin lograr desarrollar habilidades para visualizar figuras tridimensionales de manera dinámica (García-Dominguez et al., 2012; (Kösa, 2016a). En ese sentido, la visualización dinámica que ofrece el computador estimula la

capacidad para manipular mentalmente los objetos espaciales y mejoran sus procesos de visualización al construir imágenes visuales dinámicas de formas 3D (Boz, 2005; Gutiérrez & Jaime, 2015; Kepceoglu, 2018; Kösa, 2016a; Kösa & Karakuş, 2010; Morrow, 1997; Pittalis & Christou, 2010).

Los Lugares geométricos. Desde un punto de vista curricular, los lugares geométricos constituyen una *idea matemática fundamental* (Schweiger, 2006), aunque poco investigada (Fernández-Mosquera, 2011; Jahn, 2000, 2002; Laborde et al., 2006; Nagy-Kondor, 2017), que despierta interés por el mismo potencial de fomentar la visualización (Gómez-Chacón et al., 2016). La enseñanza de los lugares geométricos usualmente va ligada o bien a las construcciones con regla y compás o acompañada del estudio de gráficas de relaciones funcionales cuando se trabaja como trayectorias de movimiento. Un tema principal de la geometría analítica es la descripción algebraica de curvas geométricas y la solución algebraica de los problemas geométricos. Tanto Schumann (2003) como Gómez-Chacón y Escribano (2014), afirman que los lugares geométricos tienen un carácter educativo general, que se vuelve más atractivo y las soluciones son más fáciles para los estudiantes y profesores cuando utilizan software de geometría dinámica.

Las Analogías. Nagy-Kondor (2017) recomienda fomentar analogías de lugares geométricos desde 2D a 3D para desarrollar habilidades de visualización dinámica tridimensional. Así pues, el uso de analogía resulta valioso porque representa un puente que crea un vínculo significativo entre 2D y 3D (Mammana et al., 2012). En esa perspectiva, se entiende una analogía como “*una especie de similitud entre objetos distintos. Objetos similares coinciden entre sí en algunos aspectos, objetos análogos coinciden en relaciones claramente definibles de sus respectivas partes*” (Polya, 1989). Para resolver un problema, puede usar la solución de un problema análogo más simple y usar su método, su resultado o ambos, método y resultado (Budai, 2013; Mammana, 2019; Mammana et al., 2012). En nuestro caso, usamos analogías entre objetos del plano y el espacio para estudiar algunas propiedades de los lugares geométricos 3D que se generan por movimiento de una recta o superficie.

Aspectos Metodológicos

Esta investigación está orientada por una ruta enmarcada en el paradigma *cualitativo, interpretativo y descriptivo* (Villarreal, 2003). Así, consideramos apropiado adoptar la metodología de *Investigación Basada en el Diseño* (Bakker, 2018; Bakker & van Eerde, 2015; Cobb et al., 2017). La brecha encontrada la revisión de la literatura nos condujo a considerar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) como un constructo teórico y metodológico (Simon, 2020; Simon & Tzur, 2004) sobre el aprendizaje conceptual (lugar geométrico) y procedimental (habilidades de visualización), en esta investigación. Según Simon (1995) la THA tiene tres componentes: Una meta de aprendizaje; Un conjunto de actividades de aprendizaje y un proceso de aprendizaje hipotético. En esta ponencia hablaremos de estos tres aspectos más en detalle.

Las tareas diseñadas se aplicaron con tres grupos de estudiantes distintos. Las tareas serán presenciales y virtuales, usando salas de computadores y prácticas de uso del computador. Y según la IBD, se presentará los resultados de primer ciclo con un grupo de 15 estudiantes. En las

dos actividades, se pondrán a prueba las hipótesis de aprendizaje formuladas. A manera de pilotaje, se constituirá en el primer ciclo del experimento.

El diseño de las Actividades de aprendizaje

Detrás del diseño, están las ideas de Nagy-Kondor (2017) quien caracterizó las habilidades de visualización espacial usando las potencialidades de la geometría dinámica 3D para expandir el círculo de problemas en la educación geométrica. En particular, ella recomienda realizar más estudios educativos en fomentar analogías de lugares geométricos desde 2D a 3D para desarrollar habilidades de visualización espacial.

Las dos actividades que se presentarán y analizarán son sobre lugares geométricos en 2D y luego en 3D. La idea general de las dos actividades es primero visualizar geoméricamente en las mentes de los estudiantes las figuras geométricas solicitadas. Se parte de generar una figura geométrica a partir del movimiento. Primero de un punto para generar una recta. Luego, a partir de una recta, generar una superficie.

La primera actividad de aprendizaje propuesta integra geometría dinámica 3D con la intención de construir lugares geométricos. En este caso, la *mediatriz* a partir de sus propiedades de equidistancia para finalmente resolver el problema construyendo un *plano mediador* usando el arrastre, por medio de un lugar geométrico análogo y construido en primera instancia en 2D para luego construirlo en 3D. Ver Figura 1.

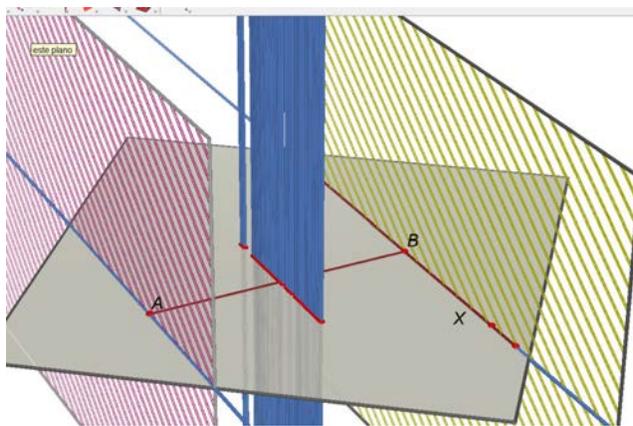


Figura 1. El plano mediador generado como el lugar geométrico de una recta perpendicular al lugar geométrico en 2D.

La segunda actividad busca encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos planos dados que se cortan. De igual forma que en la primera actividad, en ésta, por analogía, se trata de tener en cuenta la generación de una bisectriz de un ángulo, en el plano, y luego que los estudiantes universitarios puedan extender esta misma construcción de manera dinámica.

En ambas, se busca fomentar habilidades de visualización, tales como, control teórico, predicción geométrica y cristalización (Mariotti & Baccaglioni-Frank, 2018) con el propósito de

promover la transferencia por analogía, de hechos geométricos 2D al espacio tridimensional con el uso de Cabri 3D.

Algunas reflexiones finales

Nuestros resultados muestran que, en la educación geométrica a nivel universitario, existen muchas dificultades y obstáculos para visualizar figuras espaciales. Por ejemplo, para los estudiantes resulta particularmente difícil imaginar objetos, procesos y conceptos de temas de geometría analítica del espacio como los lugares geométricos 3D (Kösa, 2016b; Kösa & Karakuş, 2010; Nagy-Kondor, 2017).

Otra conclusión fue que el uso de la geometría dinámica se ha convertido en una herramienta pedagógica promisoría que apoya el desarrollo de habilidades de visualización en geometría 3D en los estudiantes, y, por ende, ayuda en la resolución de problemas geométricos (Budai, 2013; Jones & Tzekaki, 2016; Kösa, 2016b, 2016a; Kösa & Karakuş, 2010).

Referencias y bibliografía

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Bakker, A. (2018). What is design research in education? In *Design Research in Education. A practical guide for early career researchers* (1st ed., pp. 3–23). Routledge Taylor & Francis Group. <https://doi.org/10.4324/9780203701010>
- Bakker, A. & van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example From Statistics Education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (Issue Chapter 16, pp. 429–466). Springer Dordrecht. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6>
- Boz, N. (2005). Dynamic visualization and software environments. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 4(1), 26–32. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1102654.pdf>
- Bruce, C., Davis, B., Sinclair, N., McGarvey, L., Hallowell, D., Drefs, M., Francis, K., Hawes, Z., Moss, J., Mulligan, J., Okamoto, Y., Whiteley, W. & Woolcott, G. (2017). Understanding gaps in research networks: using “spatial reasoning” as a window into the importance of networked educational research. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 143–161. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9743-2>
- Budai, L. (2013). Improving Problem-Solving Skills with the Help of Plane-Space Analogies. *Center for Educational Policy Studies Journal*, 3(4), 79–98.
- Cobb, P., Jackson, K. & Dunlap, C. (2017). Conducting Design Studies to Investigate and Support Mathematics Students’ and Teachers’ Learning. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 208–233). National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.
- Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25–37). Mathematical Association of America Service Center. MAA Notes Number 19.
- Fernández-Mosquera, E. (2011). Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II Plus [Universidad del Valle]. In *Tesis de Maestría*. <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/3901>

- Ferrara, F. & Mammana, M. F. (2014). Seeing in space is difficult: an approach to 3D geometry through a DGE. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, 3, 57–64. <http://www.pme38.com/>
- García-Domínguez, M., Martín-Gutiérrez, J., Roca-González, C. & Mato-Corredeaguas, C. (2012). Methodologies and Tools to Improve Spatial Ability. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 51, 736–744. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.08.233>
- Gómez-Chacón, I. M., Botana, F., Escribano, J. & Abánades, M. (2016). Concepto de lugar geométrico. Génesis de utilización personal y profesional con distintas herramientas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 30(54), 67–94. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a04>
- Gómez-Chacón, I. M. & Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-ionic visualization and instrumental genesis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 17(4–2), 361–383. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33554784008>
- Gutiérrez, Á. & Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53–83. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/34155>
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, 10(2), 23–45. <http://funes.uniandes.edu.co/10137/1/Visualizacion1998Hitt.pdf>
- Jahn, A. P. (2000). New tools, new attitudes to knowledge: the case of geometric loci and transformations in dynamic geometry environments. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hiroshima, Japan* (Vol. 1, pp. 91–102). Hiroshima University and PME. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED452031.pdf#page=126>
- Jahn, A. P. (2002). “Locus” and “Trace” in Cabri géomètre: Relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *ZDM, Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, International Journal on Mathematics Education*, 34(3), 78–84. <https://doi.org/10.1007/BF02655710>
- Jones, K., Maschietto, M., Mithalal, J. & Papadaki, C. (2019). Introduction to the papers of TWG04: Geometry Teaching and Learning. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 11*, 1–4. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02402091/>
- Jones, K. & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In Á. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109–149). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4
- Kepceoğlu, İ. (2018). Effect of Dynamic Geometry Software on 3-Dimensional Geometric Shape Drawing Skills. *Journal of Education and Training Studies*, 6(10), 98–106. <https://doi.org/10.11114/jets.v6i10.3197>
- Kösa, T. (2016a). Effects of using dynamic mathematics software on pre-service mathematics teachers spatial visualization skills: The case of spatial analytic geometry. *Educational Research and Reviews*, 11(7), 449–458. <https://doi.org/10.5897/err2016.2686>
- Kösa, T. (2016b). The Effect of Using Dynamic Mathematics Software: Cross Section and Visualization. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 24(4), 121–128. <https://doi.org/https://doi.org/10.1564/tme>
- Kösa, T. & Karakuş, F. (2010). Using dynamic geometry software Cabri 3D for teaching analytic geometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 1385–1389. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.204>
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (Vol. 1, pp. 275–304). Sense Publishers. https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789087901127_011

- Mammana, M. F. (2019). The Modernity of the Meraner Lehrplan for Teaching Geometry Today in Grades 10–11: Exploiting the Power of Dynamic Geometry Systems. In H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand & G. Schubring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein, ICME-13 Monographs* (1st ed., pp. 153–166). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7>
- Mammana, M. F., Micale, B. & Pennisi, M. (2012). Analogy and dynamic geometry system used to introduce three-dimensional geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(6), 818–830. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.662286>
- Mariotti, M. A. & Baccaglini-Frank, A. (2018). Developing the Mathematical Eye Through Problem-Solving in a Dynamic Geometry Environment. In N. Amado, S. Carreira & K. Jones (Eds.), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving. A Focus on Technology, Creativity and Affect. Research in Mathematics Education Series*. (pp. 153–176). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_7
- Morrow, J. (1997). What is Dynamic Visualization? In *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research* (pp. 47–54). The Mathematical Association of America.
- Nagy-Kondor, R. (2017). Spatial Ability: Measurement and Development. In M. S. Khine (Ed.), *Visual-spatial Ability in STEM Education: Transforming Research into Practice* (pp. 35–58). Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44385-0>
- Ng, O. L. & Ferrara, F. (2020). Towards a Materialist Vision of ‘Learning as Making’: the Case of 3D Printing Pens in School Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(5), 925–944. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10000-9>
- Pittalis, M. & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 191–212. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8>
- Polya, G. (1989). Como plantear y resolver problemas. In J. Zugazagoitia (Trans.), *Serie de Matemáticas* (15th ed.). Trillas.
- Presmeg, N. (2020). Visualization and Learning in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd ed., pp. 900–904). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_161
- Schumann, H. (2003). Computer aided treatment of 3dproblems in analytic geometry. *ZDM, Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, International Journal on Mathematics Education*, 35(1), 7–13. <https://doi.org/10.1007/BF02652760>
- Schweiger, F. (2006). Fundamental Ideas: A Bridge Between Mathematics and Mathematical Education. In J. Maasz & W. Schölglmann (Eds.), *New Mathematics Education Research and Practice* (pp. 51–62). Sense Publishers. <https://doi.org/10.1163/9789087903510>
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145.
- Sinclair, N., Bartolini-Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM, Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, International Journal on Mathematics Education*, 48(5), 691–719. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>
- Vallo, D. & Zahorska, J. (2016). Geometry software cabri 3D in teaching stereometry. *2016 IEEE 10th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT) Conference Proceedings*, 1–4. <https://doi.org/10.1109/ICAICT.2016.7991805>
- Villarreal, M. (2003). La investigación en educación matemática: ¿qué ocurre en Argentina? *Premisa*, 16(December), 4–12. <http://funes.uniandes.edu.co/23155/>