

## Límite de funciones desde la teoría de puntos de acumulación y criterio $\varepsilon$ - $\delta$ . Propuesta didáctica usando GeoGebra.

Hamlet H. **Castillo** Alvino  
 Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra  
 República Dominicana  
[hcastillo@pucmm.edu.do](mailto:hcastillo@pucmm.edu.do)  
 Antonio **Alexanderson** Rivero  
 Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra  
 República Dominicana  
[arivero@pucmm.edu.do](mailto:arivero@pucmm.edu.do)

### Resumen

El proceso de enseñanza-aprendizaje (EA) para abordar el concepto de límite de funciones en variables reales conlleva a una trascendencia desde la abstracción en los procesos cognitivos del análisis matemático hasta una forma de EA práctica. Este reto obliga complementar el proceso EA con recursos que faciliten la comprensión de los conceptos, sin dejar vacíos cognitivos en los estudiantes (cuadrado Baez, 2021) Es por esto por lo que la utilización de recursos tecnológicos nos lleva a crear estrategias EA tipo talleres para la construcción de recursos que permitan a los estudiantes integrar conceptos mediante otras representaciones, logrando un aprendizaje significativo. Este taller tiene como objetivo abordar el concepto de entorno, punto de acumulación, junto con la definición de intervalos Epsilon-delta en límites de funciones en variables reales utilizando Software libre GeoGebra como recurso tecnológico de este taller para la creación y exploración de objetos matemáticos de una manera dinámica.

*Palabras clave:* Entorno o vecindad; Punto de acumulación; Criterio Epsilon-delta; Representación gráfica; Límite de funciones; Aprendizaje significativo.

### Introducción

Cuando abordamos el concepto de límite de funciones en nuestra planificación tomamos en cuenta variables categóricas como el tiempo, recursos, generalidad del estudiantado, entre otros, que podrían desviar el concepto matemático en su totalidad si no son tomadas apropiadamente en cuenta. En este sentido, en ocasiones partimos de una manera informal para explicar el concepto.

De ahí en caer a la igualdad del concepto “Imagen de la función igual al límite de la función”, es decir, de no llegar a una interpretación correcta intuitivamente:

Dada una función  $f$  definida en un intervalo  $I$ , donde  $c \in I$ , salvo posiblemente en  $c$ .

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$$

Si bien es cierto, que hacer uso de la representación numérica y gráfica de las funciones en el pizarrón ayudan a construir parte del significado del concepto del concepto (Pecharromanm, 2014), abordarlo solamente de esta forma, existen elementos teóricos que necesitan explicitarse para tener una construcción más completa y un significado más profundo del concepto de límite.

El taller en Límite de funciones, desde la teoría de puntos de acumulación y criterio  $\varepsilon$ - $\delta$ , es una propuesta didáctica que utilizar la herramienta tecnológica GeoGebra, tomando en cuenta un proceso sistemático que integra los conceptos iniciales de vecindad, puntos de acumulación y el criterio de  $\varepsilon$ - $\delta$ , para construir los recursos apropiados conectando dichos conceptos mediante el software libre GeoGebra.

De esta manera, esta actividad tiene los procesos de construcción siguientes mediante el uso de GeoGebra:

- 1- Definir el concepto vecindad o entorno y punto de acumulación.
- 2- Construir un recurso para presentar el concepto de puntos de acumulación.
- 3- Partir de la definición intuitiva del concepto de límite informalmente.
- 4- Representar de manera dinámica el concepto de límite de una función de manera numérica y gráfica de manera exploratoria mediante la construcción de un recurso.
- 5- Construir un recurso didáctico que muestre un concepto integrado del criterio  $\varepsilon$ - $\delta$ , punto de acumulación y el uso de tecnología para la representación de límites de funciones en variables reales.

### Objetivos

- I. Aplicar el software GeoGebra para construir los conceptos de vecindad y entorno para la comprensión de límite de función.
- II. Conectar la definición informal y la definición formal matemática de límite de funciones.
- III. Aplicar el software GeoGebra para construir los conceptos de límite de función y criterio  $\varepsilon$ - $\delta$
- IV. Comparar las respectivas definiciones que ayuden a contrastar tanto la definición formal como la informal de límite de funciones.

### Marco teórico

El tema objeto de estudio está dirigido a la implementación del taller Límite de funciones desde la teoría de puntos de acumulación y criterio  $\varepsilon$ - $\delta$ . Propuesta didáctica usando GeoGebra.

Es importante señalar que desde la propia concepción del concepto de límite de funciones podemos iniciar mediante una recuperación de saberes desde la mera concepción de valor absoluto y sus propiedades, conceptos de distancias y los conceptos de espacios métricos desde una perspectiva práctica de radio  $r$  y centro  $a$ , es decir, bajo la notación  $V_r(a)$  hasta retomar los conceptos de Supremo e ínfimo hasta (Castillo,2022). De este modo, construir el concepto de entorno  $V_\varepsilon(a)$  definido en la recta real como la vecindad  $a$  no es más que el conjunto  $V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ , es decir, distancia y conceptos ligado al concepto de supremo e ínfimo. Así que la construcción del punto de acumulación definido en (Castillo,2022)] como:

**Definición 1 (punto de acumulación):** Sea  $A$  un subconjunto del conjunto de los reales  $\mathbb{R}$  donde el conjunto  $A$  es acotado. Además, sea  $x$  que pertenece al conjunto de los reales es un punto de acumulación de  $A$  si para cualquier entorno reducido conjunto  $V_\varepsilon'(x)$ , contiene algún punto de  $A$ .

Bajo las nuevas tendencias de cálculo se plantea el concepto de límite de funciones desde una perspectiva intuitiva como lo resalta el autor (Larson, R. & Hostetler, R. P.,2010) y luego toma directamente la definición formal del criterio  $\varepsilon$ - $\delta$ . Acorde a lo expuesto es importante resaltar el concepto de acotación bajo la recuperación de saberes y la definición 1. En este sentido, mediante una reflexión para analizar una forma más trascendente sobre qué actividades o recursos serían importante poner en evidencia para crear un aprendizaje significativo, esto nos lleva a la intensión del uso de las TIC, ya que juega un papel preponderante para alcanzar dicho aprendizaje utilizando nuevas formas de enseñanza y hacer matemática. En este sentido, (Goudez Maita,2005) destaca la potencialidad de interacción entre los protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje que conlleva a los estudiantes a crear situaciones de aprendizajes para conducirlo crear sus propios conocimientos. Para [8] otra ventaja de utilizar GeoGebra en las matemáticas es que genera la posibilidad de crear una estructura dinámica en la construcción, es decir, en un procedimiento geométrico en movimiento; así que la utilización de las TIC hace que exista una trascendencia más que plasmar un mero contenido a nuestros estudiantes.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto y en relación con la implementación de talleres como estrategia didáctica para promover un aprendizaje constructivo, dicha estrategia contiene características como promoción del dialogo, participación entre los protagonistas del proceso EA, aprendizaje funcional y significativo, a través de actividades lúdicas y sobre todo integrador propiciando de manera armónica una conexión entre el uso de las TIC y talleres como estrategia didáctica.

## Metodología

### **Primer momento: (Construcción de los conocimientos previos) (20 Minutos)**

En este primer momento los participantes del taller reciben la información inicial referente a los objetivos y la importancia de la actividad para aplicar el uso de GeoGebra trabajar de manera constructiva el tema de límite de funciones. Como parte inicial se abordará un conversatorio con la intención de lograr una retroalimentación de los saberes previos aplicando las estrategias para diagnósticas tanto de los conocimientos matemáticos como el uso de GeoGebra como base de la construcción dinámica en el software.

Partimos sobre los conceptos teóricos de valor absoluto, así como sus propiedades, para llegar al concepto de la definición de entorno o vecindad. De esta manera, conectar con los elementos de ínfimo y supremo. Finalmente, cerramos con el concepto de punto de acumulación de manera conceptual

**Segundo momento: (Construcción del concepto de punto de acumulación)** (20 minutos)

Los participantes realizarán una construcción guiada por parte del facilitador en el software GeoGebra iniciando con la adecuación del espacio en la recta real para construir el concepto de punto de acumulación colocando deslizadores dinámicos, rotulados visualizados en las pantallas con los controladores y modo gráfico. Una vez construido los parámetros y variables del concepto de punto de acumulación realizaremos la relación existente entre el punto de acumulación y el valor  $\varepsilon > 0$ , analizando varios ejemplos ilustrativos.

**Tercer Momento: (Construcción intuitiva de la definición de límite)** (40 minutos)

Los participantes analizarán la definición informal de límite de una función, dada por el facilitador, a modo que exploratorio, que ayude a construir el concepto de límite, tomando en cuenta la idea de aproximación para un valor del dominio de la función  $f$  en  $x = c$ . En esta fase, el facilitador orientará cada paso para la construcción intuitiva mediante el uso de GeoGebra.

En esta parte, queda plasmado el concepto de límite de una función, con el objetivo de integrar el concepto de acumulación y el criterio  $\varepsilon$ - $\delta$ . El facilitador hará énfasis en desarrollar actividades que permitan interactuar con el recurso tecnológico y profundizar en la integración de estos conceptos. (O alguna idea que hable un poco sobre cómo se logrará la innovación de conectar ambos conceptos)

**Cuarto Momento: (El criterio  $\varepsilon$ - $\delta$  y comparación)** (40 minutos)

Una vez los participantes hayan construido la definición en el tercer momento, el facilitador utilizará la función escogida del momento anterior para conectar el criterio  $\varepsilon$ - $\delta$  y puntos de acumulación, de tal manera, que ilustre una comparación entre los momentos (3) y (4).

### **Recursos y actividad en el aula**

Cada momento del taller el facilitador proporciona una guía que incluye cada consigna de trabajo por cada momento, además de los recursos que deberán utilizarse.

El curso está diseñado para 18 participantes, distribuido grupalmente en tres estudiantes por grupo.

Cada grupo debe tener por lo menos una computadora estacionaria o portátil con el software libre GeoGebra instalado enlace <https://www.geogebra.org/download> , GeoGebra clásico 5 como mínimo para el desarrollo de la actividad.

Se proporcionará materiales como lápices, hojas de trabajo, folders, material físico por el facilitador.

## Referencias y bibliografía

- Bartle, R., Sherbert, D. (2010). Capítulo 4. Límite de funciones. En Introducción al análisis matemático de una variable (pp.124-132). Limusa Wiley. <https://bit.ly/35beIQx>
- Castillo, H. (2022). Los números reales. Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://bit.ly/3GWyUSQ>
- Castillo, H. (2022). Punto de acumulación y ejemplos [documento]. Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://bit.ly/3Mmmk3t>
- Cuadrado Baez, L., Crespo García, R., (2021). Matemática en el aula de secundaria. La gaceta de la RSME, Volumen (24) Núm. 2, Págs. 383-398. <http://bit.ly/3AUmXgx>
- Goudez Maita, M., (2005). El aprendizaje de funciones reales con el uso de un software educativo una experiencia didáctica con estudiantes de educación de la ULA-Táchira. Acción pedagógica, Volumen 12, Núm. 1, pp. 38-49. <http://bit.ly/3GWAqbq>
- Larson, R., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., Roa, M. D. C. H., López, E. F., Bernal, M. R., & Palacios, E. (2010). Límites y sus propiedades. Cálculo esencial. pp. 38-47. Cengage Learning.
- Llopis, T. Q., & Zabala, J. G. (2016). Uso de GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, Volumen (71), pp. 4-6. <http://bit.ly/3ERm4Gm>
- Pecharrománm C., (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. Educación matemática, Volumen (26) Núm. 2, Págs. 111-133. <http://bit.ly/3XLE5yz>