
# Los modos de pensar las superficies cuadráticas y el uso del GeoGebra

Felipe de Jesús **Jacobo** Alfaro
Universidad de Guadalajara
México
felipe.jacobo2948@alumnos.udg.mx
María Guadalupe **Vera-Soria**
Universidad de Guadalajara
México
guadalupe.vera@academicos.udg.mx
Marcela **Parraguez** González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

**Resumen**

Se presentan los primeros resultados de una investigación que indaga la comprensión de Superficies Cuadráticas (SC) en estudiantes de Ingeniería que realizan actividades didácticas que incluyen el uso del software *GeoGebra*. La fundamentación teórica son los modos de pensamiento Sintético – Geométrico (SG), Analítico – Aritmético (AA) y Analítico – Estructural (AE). Se trata de un estudio cualitativo–interpretativo que analiza evidencia extraída de seis entrevistas y cinco actividades, para mostrar la construcción del concepto a través de los elementos matemáticos articuladores que se involucran al transitar entre los elementos matemáticos diferentes modos de pensar. Los hallazgos que se muestran en este reporte, dan cuenta los elementos matemáticos que los estudiantes entrevistados involucraron para articular los tres modos de pensar las superficies cuadráticas SG-SC, AA-SC y AE-SC, como trazas, proyección, plano en el espacio y sustitución.

*Palabras clave:* Comprensión conceptual; Modos de pensamiento; Estudio interpretativo; Articuladores; Superficies Cuadráticas.

## Introducción

En esta investigación que forma parte de un proyecto de maestría, se estudia la comprensión de superficies cuadráticas en estudiantes de Ingeniería que resuelven actividades didácticas en el entorno geométrico-algebraico del *GeoGebra*. Las superficies cuadráticas o cuádricas son gráficas en el espacio de ecuaciones de segundo grado en $x$, $y$ y $z$, consideradas como análogos tridimensionales de las secciones cónicas, que bajo ciertas condiciones representan a las funciones de dos variables (Larson y Edwards, 2016; Thomas, 2015).

En las publicaciones sobre el aprendizaje de objetos de la geometría analítica del espacio, se advierte que la mayoría se enfocan en las funciones de dos variables, y que la documentación sobre el razonamiento de los estudiantes respecto a las superficies cuadráticas, prerrequisito curricular de dichas funciones, es limitada.

Lo que se sabe es que el aprendizaje de funciones de dos variables requiere la conversión entre representaciones gráficas y algebraicas de planos, funciones de una variable y sustitución de valores de variable, y que la transición a la comprensión de objetos en tres dimensiones a partir de los representados en dos dimensiones podría verse favorecido mediante el uso de tecnología.

Por ejemplo, varios estudios llevados a cabo por Martínez-Planell y Trigueros en Puerto Rico y México (2007, 2010, 2013 y 2019), indagan sobre las construcciones mentales y dificultades que los estudiantes enfrentan en el aprendizaje de funciones de dos variables. Los autores realizaron tres ciclos de investigación tomando como fundamento el marco teórico de las acciones, procesos, objetos y esquemas (APOE) (Arnon et al., 2014) y la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 1999, 2006).

En su proyecto, acorde al ciclo de investigación determinado por el modelo de APOE, desarrollaron una descomposición genética que fueron refinando conforme avanzaban en el proyecto, poniendo en evidencia información relevante sobre los mecanismos mentales y los objetos matemáticos involucrados en la construcción conceptual de las funciones de dos variables.

En el primer ciclo de investigación, se condujeron entrevistas a estudiantes que habían asistido a un curso de cálculo de varias variables, con el fin de ahondar en sus respuestas de un cuestionario diseñado para probar las construcciones mentales previstas en la descomposición genética. Como resultado del análisis de las entrevistas, se encontró que las dificultades más comunes en la comprensión de funciones de dos variables fueron provocadas por deficiencias en la comprensión del esquema de $R^3$. Señalaron que los estudiantes deberían tener una noción de objeto de planos fundamentales (planos verticales y horizontales de la forma $x=c$, $y=c$ y $z=c$).

Para el segundo ciclo de investigación, se encontró que en la construcción de gráficas de funciones de dos variables es necesario reconocer transformaciones de funciones de una variable, obtenidas a partir de sustituir valores por una variable en $z=f(x,y)$, debido que es necesario reconocer los cambios que se van produciendo en las secciones transversales que se forman con funciones de una variable, obtenidas conforme se va cambiando sucesivamente el valor de la constante $c$ de planos fundamentales paralelos entre sí.

Y en el tercer ciclo de investigación de este proyecto, se incluyó además una discusión respecto las transformaciones de funciones de una variable y sobre el proceso de intersecar la gráfica de funciones que tienen una variable ausente con planos fundamentales (Martínez-Planell y Trigueros, 2019). Los hallazgos mostraron que la mayoría de estudiantes que utilizaron las actividades diseñadas con base en la descomposición genética, trabajo colaborativo y discusiones grupales lograron demostrar una concepción de proceso de funciones de dos variables.

Por otra parte, Weber y Thompson (2014) realizaron una investigación en Estados Unidos, relacionada con la comprensión de gráficas de funciones de dos variables a partir del conocimiento de gráficas de funciones de una variable. El análisis de las respuestas a las tareas asignadas a dos estudiantes, concluyeron que "el razonamiento covariacional proporcionó un medio para que los estudiantes generalicen su comprensión de funciones y gráficas" (Weber y Thompson, 2014, p. 82).

Y respecto a un trabajo identificado que indaga sobre la comprensión de superficies cuadráticas; en la tesis de López-Vega (2018) de la Pontificia Universidad Católica de Perú, se describe el análisis a priori y a posteriori de las respuestas a las actividades de un estudiante, en las que se explora el proceso de génesis instrumental del hiperboloide, cuando se desarrolla una secuencia didáctica mediada por el software *GeoGebra*. En este estudio se estableció que el uso del *GeoGebra* hizo posible el reconocimiento de propiedades del hiperboloide, como reconocer la relación entre la ecuación y la orientación de la superficie, la identificación de cómo afectan los parámetros de su ecuación a la superficie y a señalar las características del hiperboloide a partir de los cortes en secciones transversales.

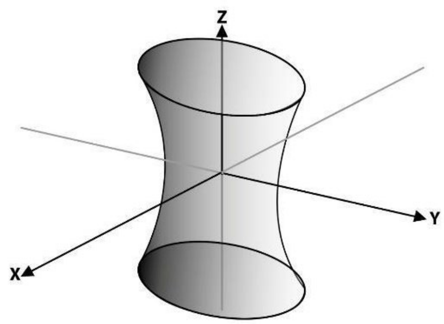
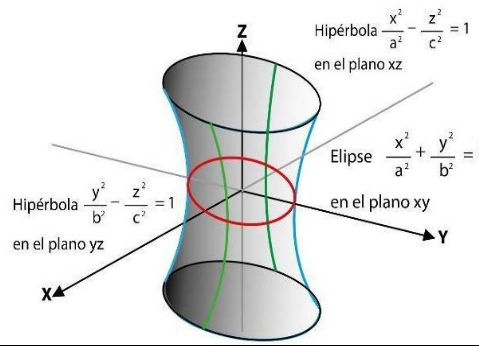
Mediante los hallazgos que se presentan en este trabajo, se aporta al estado del conocimiento sobre la comprensión del concepto matemático de superficies cuadráticas. Desde una perspectiva teórica no reportada, se profundiza en el papel de los diferentes modos de pensar las superficies cuadráticas y la mediación de la tecnología en el proceso de construcción cognitiva del concepto. De manera específica, se tiene el propósito de describir los modos de pensar las superficies cuadráticas que estudiantes de ingeniería emplean usan en situaciones matemáticas propuestas y para tal fin, se determinan los tránsitos que ellos logran entre los diferentes modos de pensar las superficies, dando cuenta de los elementos matemáticos que involucran en el proceso.

El planteamiento desde el cual se examina la comprensión de las superficies cuadráticas son los modos de pensamiento Sintético–Geométrico (SG), Analítico–Aritmético (AA) y Analítico–Estructural (AE) (Sierpinska, 2000), cuya perspectiva propone que la comprensión de un concepto se logra al transitar articuladamente por estos tres modos de pensar.

Los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos. En el modo de pensamiento SG los objetos son descritos directamente mediante visualización y se abstraen a través de sus características geométricas, mientras que en el modo de pensamiento AA los objetos se construyen de manera indirecta mediante la percepción de relaciones por medio de operaciones y procedimientos. Y en cuanto al modo de pensamiento AE, los objetos matemáticos se explican a partir de sus propiedades y características más generales. En la tabla 1, se caracterizan los modos de pensar las superficies cuadráticas, que se distinguen en la epistemología del concepto.

Tabla 1

*Los modos de pensar las SC*

| ***Sintético-Geométrico (SG-SC)*** | ***Analítico-Aritmético (AA-SC)*** | ***Analítico-Estructural (AE-SC)*** |
|---|---|---|
|   | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ |   |

*Nota.* Elaboración propia.

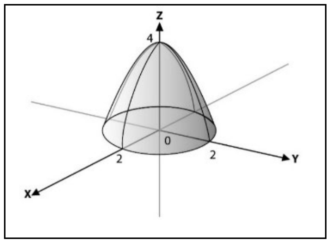
En el modo de pensamiento SG-SC se reconocen formas o figuras en el espacio tridimensional, mientras que en el modo AA-SC, se identifica una ecuación que relaciona diferentes variables y parámetros. Y en el modo AE-SC, lo que se identifican son familias de curvas que conforman una superficie cuadrática y se diferencian los rasgos que caracterizan a las diferentes superficies cuadráticas.

## Metodología

El estudio es de corte cualitativo con la estrategia específica del método interpretativo básico (Martínez, 2006), que se desarrolla en tres etapas:

1. En la primera etapa se revisa la literatura del tema y se realiza un estudio epistemológico de las superficies cuadráticas para diseñar las actividades de exploración del concepto que incluyen el uso del software *GeoGebra*.
2. Posteriormente, en la segunda etapa del estudio se implementan las actividades diseñadas en un grupo de 38 estudiantes de ingeniería, de entre 19 a 21 años, inscritos en un curso de Cálculo de Varias Variables en una universidad pública estatal en México. Se eligen cinco de las actividades aplicadas, para evidenciar el trabajo de los estudiantes en los modos de pensar las superficies cuadráticas. La tabla 2 presenta una de las actividades que se describen en los resultados de este reporte.

Tabla 2
*Actividad A3 de análisis*

| Actividad | Pregunta | Modos de pensar y tránsitos a observar |
|---|---|---|
| A3 | Considera la superficie cuadrática de la siguiente figura:   Dibuja y describe verbalmente lo más detalladamente posible, la curva de intersección de la superficie cuadrática con el plano $z = 1$. | SG-SC → AE-SC |

*Nota.* Elaboración propia.

También en esta etapa se condujeron entrevistas semiestructuradas (Kvale, 2011) a seis estudiantes (E1, E2, E3, E4, E5 y E6) que desarrollaron las actividades de exploración, elegidos de acuerdo a los diferentes modos de pensar las SC y elementos matemáticos que involucran en sus respuestas.

3. Y en la tercera etapa, se analizan los argumentos presentados por los estudiantes en 1) las respuestas de los estudiantes en las actividades elegidas para análisis y 2) en las transcripciones de las entrevistas para evidenciar los elementos matemáticos como curvas, planos o familias de curvas, entre otros, que los estudiantes involucraron en los tránsitos entre los modos de pensar SG-SC, AA-SC y/o AE-SC, en diferentes trayectorias o rutas cognitivas que se interpretaron desde el modelo de los modos de pensamiento.

## Resultados

La evidencia muestra que los estudiantes que articularon los tres diferentes modos de pensar las superficies cuadráticas, llevaron a cabo en un proceso en el cual, se parte de la identificación de la forma de una superficie o de su ecuación, y mediante una transformación gráfica o algebraica se realiza una comparación para relacionarla con la fórmula de la ecuación estándar de una superficie cuadrática, luego se sustituyen en ésta valores de variable para obtener una ecuación de dos variables en la que se identifican los parámetros con los que establecen las simetrías de una curva que se proyecta en un plano de dos dimensiones, y que posteriormente se ubica en la intersección de la superficie con un plano en el espacio tridimensional; esta curva se percibe como el conjunto de puntos que configuran una de las trazas de una superficie cuadrática. Finalmente, es posible distinguir diferentes trazas situadas análogamente en el espacio con las que se genera la superficie cuadrática.

Lo anterior se pudo advertir al analizar se verifica al evaluar y comparar los argumentos que los estudiantes exponen al desarrollar las actividades y participar en las entrevistas. Por ejemplo, en la actividad A3 se solicitó a los estudiantes dibujar y describir verbalmente lo más detalladamente posible, la curva de intersección de la superficie cuadrática (paraboloide elíptico) que se da geométricamente, con el plano fundamental $z = 1$. Y para resolverla, E3 se sitúa en el modo SG-SC, ya que primero reconoce la forma de la superficie cuadrática como un paraboloide elíptico, luego, identifica el vértice de este paraboloide con coordenadas en el espacio $V(0,0,4)$, además, escribe la fórmula de la ecuación estándar de la superficie cuadrática $\left(-(z-j) = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}\right)$, misma que comienza a analizar a partir de la forma gráfica del paraboloide, como se muestra en la figura 1.

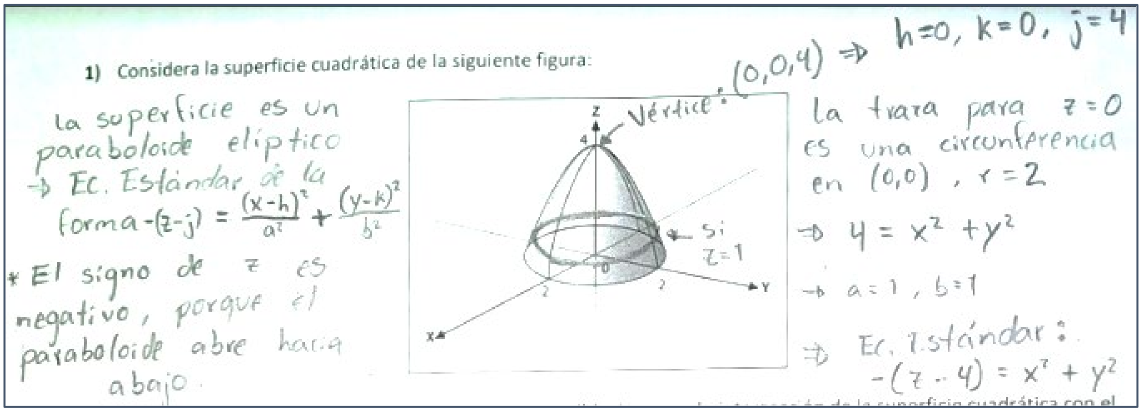



*Figura 1.* Respuesta del Estudiante E3 en la Actividad A2

Después, en el análisis que realiza el estudiante E3, logra articular al modo AA-SC por medio de transformaciones gráficas, pues, como se observa en la figura 1, E3 habla del signo negativo en $z$ porque el paraboloide abre hacia abajo, además, de que identifica el punto en el espacio con coordenadas $(0,0,4)$ que es el vértice del paraboloide, y lo relaciona con los parámetros $h, k$ y $j$ de la ecuación estándar, de manera que, E3 sustituye los valores de $h, k$ y $j$ en la ecuación (figura 2), logrando obtener algunos parámetros de la ecuación estándar de la figura dada.

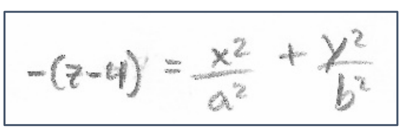



*Figura 2.* Ecuación Obtenida por el Estudiante E3 en la Actividad A3

Luego, E3 transita al modo AE-SC al realizar la sustitución de $z = 0$ en la ecuación $-(z-4) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (figura 3).

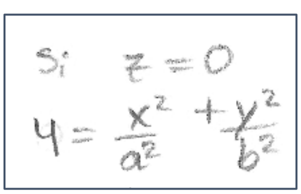



*Figura 3.* Sustitución Realizada por el Estudiante E3 en la Actividad A3

Y señalar que con la sustitución se obtiene la traza en forma de circunferencia en el plano $XY$, con centro en el punto $(0,0)$ y radio $r = 2$ (figura 4).

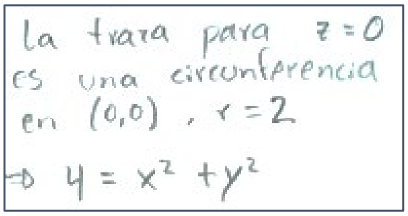



*Figura 4.* Descripción del Resultado Obtenido en la Sustitución por parte del Estudiante E3 en la Actividad A3

Y a partir de este razonamiento, E3 compara la ecuación $4 = x^2 + y^2$ (figura 4), con la ecuación $4 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (figura 2), para establecer que los parámetros faltantes son $a = b = 1$. Lo anterior se corrobora en el siguiente extracto de la entrevista de E3:

> **E3:** Entonces aquí… lo que se me ocurre es tomar el punto Z igual a cero, que es donde se forma esta circunferencia. (Señala la traza que se forma cuando $z = 0$).
> **Entrevistador:** Mjum.
> **E3:** Entonces… (Murmura)... sí Z es igual a cero, la ecuación nos queda cero igual a equis cuadrada más Y cuadrada, sobre algo también… Y… como esta ecuación debería de ser… (Murmura) … (Anota sí $z = 0, 4 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$). Ahora, si nos vamos más bien al revés, ésta es una circunferencia, que su ecuación debería de ser equis cuadrada más Y cuadrada igual a cuatro, ¿no? (Señala la traza en el paraboloide).
> **Entrevistador:** Mjum.
> **E3:** Porque el radio es dos. Entonces… Ok, quiere decir entonces que aquí debería de ser menos ese cuatro (Murmura). Menos… algo así… Y entonces, ya queda el cuatro y quiere decir, para que esta sea la misma ecuación que esta, que a y b, pues es uno. (Anota $-(z - 4) = x^2 + y^2$).

Así, al realizar la sustitución de los valores $a = 1$ y $b = 1$, E3 se ubica nuevamente en el modo AA-SC logrando obtener la ecuación estándar del paraboloide elíptico, como se muestra en la figura 5.

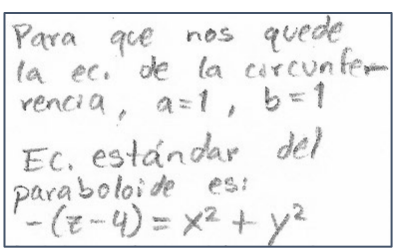



*Figura 5.* Respuesta Escrita en la Entrevista por el Estudiante E3 en la Actividad A3

Finalmente, E3 transita al modo AE-SC al sustituir el valor de $z = 1$ sobre la ecuación estándar obtenida en la figura 5, de manera que, E3 señala que la traza es una circunferencia con ecuación $3 = x^2 + y^2$, radio $r = \sqrt{3}$ y centro en $(0,0)$ en $R^2$ (plano $XY$) y $(0,0,1)$ en $R^3$. Como se puede observar en la figura 6.

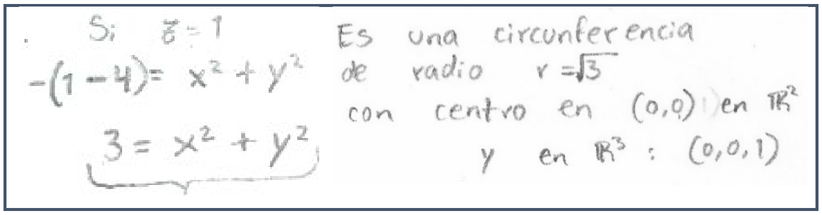



*Figura 6.* Sustitución Realizada en la Entrevista por el Estudiante E3 en la Actividad A3

Asimismo, con el fin de establecer la traza o curva de intersección del paraboloide con el plano fundamental $z = 1$, E3 dibuja la proyección de la traza en el plano $XY$, para posteriormente, trazar la curva en el espacio tridimensional, como lo muestra la figura 7.

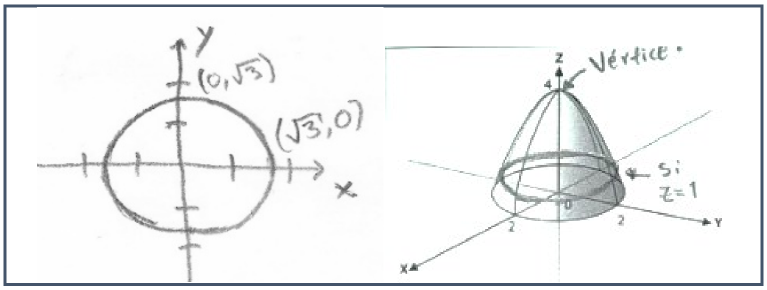



*Figura 7.* Respuesta en la Entrevista del Estudiante E3 en la Actividad A3

## Conclusiones

Los primeros hallazgos de este estudio sobre la comprensión de superficies cuadráticas, que se fundamenta en el modelo de los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000), indican que el tránsito entre los modos SG-SC, AA-SC y AE-SC, se logra cuando los estudiantes logran identificar elementos matemáticos como transformaciones gráficas/algebraicas, ecuación estándar, parámetros, sustitución, ecuación de dos variables, simetrías, proyección, plano en el espacio y trazas.

Actualmente, se trabaja en el análisis de las dificultades que algunos de los participantes experimentaron para lograr el tránsito hacia el modo de pensar AE-SC, por ejemplo, las que se originan por la tendencia a privilegiar exclusivamente alguno de los modos de pensar SG-SC o AA-SG, y que impiden llegar a la comprensión del concepto. Así mismo, se encuentra en revisión indagar el papel del software *GeoGebra* en la identificación por parte de los estudiantes de los elementos matemáticos articuladores de los modos de pensar las SC.

## Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the XXI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3-26.

Duval, R. (2006). *A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131. Springer.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa.* Ediciones Morata.

Larson, R. y Edwards, B. (2016). *Cálculo. Tomo II. Décima edición.* Cengage Learning.

López-Vega, P. (2018). *Génesis instrumental del hiperboloide en estudiantes de arquitectura mediada con el GeoGebra.* [Tesis doctoral no publicada]. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Martínez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Segunda edición (reimpresión 2013). México: Trillas.

Martínez-Planell, R. & Trigueros, M. (2013). Graphs of functions of two variables: results from the design of instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 663-672.

Martínez-Planell, R. & Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior, 55,* 1-22. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students´ Thinking in Linear Algebra. In: J.L. Dorier (ed) *On the Theaching of Linear Algebra, 23*, 209-246. Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/0-306-47224-4_8

Thomas, G. (2015). *Cálculo varias variables. Treceava edición.* Pearson Education.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2007). Visualization and abstraction: Geometric representation of functions of two variables. In T. Lamberg &L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 100-107.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 3-19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5