Perspectivas de exploração de propriedades da Geometria Plana em Construções no GeoGebra Discovery

Celina Aparecida Almeida Pereira **Abar**
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
abarcaap@pucsp.br
Daniel Mendes Inácio de **Souza**
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
daniel_mendes0802@hotmail.com
Alexandre Matias **Russo**
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
alexandremrusso@gmail.com

Resumo

O programa de matemática dinâmica GeoGebra sempre ofereceu, como qualquer outro Sistema de Geometria Dinâmica, possibilidades notáveis para melhorar a construção e exploração visual de objetos geométricos, arrastando elementos em uma figura, possibilitando ao aluno perceber as mudanças resultantes e relações permanentes na construção. Mais recentemente, foi incorporado ao GeoGebra, uma versão experimental denominada GeoGebra Discovery, uma coleção de recursos e comandos, as chamadas Ferramentas Automatizadas de Raciocínio (ART), que permitem uma verificação matemática e a descoberta automática de proposições gerais sobre figuras da geometria euclidiana construídas pelo usuário. Estas ferramentas permitem automaticamente conjecturas, descobertas e provas sobre diferentes elementos de uma determinada construção geométrica. O objetivo desse trabalho é apresentar, por meio de dois exemplos, perspectivas de exploração de teoremas geométricos que podem ser desenvolvidos no GeoGebra Discovery, permitindo ao usuário visualizar e interpretar os resultados da geometria plana obtidos nas construções realizadas.

Palavras-chave: Educação Matemática, Geometria plana, GeoGebra Discovery

Introdução

A digitalização traz à educação matemática novas ferramentas que requerem um novo currículo, um novo design de tarefas, e uma maior interação com outras disciplinas e neste contexto o protagonismo do aluno — com a ajuda de ferramentas digitais — é importante para seu próprio aprendizado.

Neste novo contexto educacional, os Sistemas de Geometria Dinâmica (DGS) podem ser considerados como ferramentas especificamente apropriadas e úteis pois fomentam a capacidade dos alunos sobre visualização geométrica e experimentação. Hoje em dia, alguns DGS incluem recursos para raciocínio automatizado que permitem a verificação automática e matematicamente rigorosa e a descoberta de teoremas geométricos (Kovács et al. 2018), permitindo um aprimoramento do ensino e seu aprendizado.

GeoGebra (https://www.geogebra.org/) é um conhecido programa de matemática dinâmica e sempre ofereceu, como qualquer outro DGS, algumas possibilidades notáveis para melhorar a construção e exploração visual de objetos geométricos por meio do movimento de seus elementos, permitindo a visualização das mudanças resultantes e das relações mantidas dos elementos em uma figura.

Mais recentemente foi incorporado no GeoGebra, uma versão experimental, denominada GeoGebra Discovery com uma coleção de recursos e comandos, as chamadas Ferramentas Automatizadas de Raciocínio (ART), que permitem uma verificação matemática ou a Prova Automática de Teorema (ATP) e, também, a descoberta de proposições gerais sobre figuras da geometria euclidiana construídas pelo usuário.

Estas ferramentas são acessíveis por um botão no Menu e por comandos que podem ser introduzidos na Janela de Entrada. Ao utilizar tais ferramentas o usuário tem a possibilidade de, automaticamente, fazer conjecturas, descobrir e provar declarações sobre diferentes elementos de uma determinada construção geométrica. Tais ferramentas podem apoiar o ensino de teoremas de geometria plana permitindo a prova automática e descoberta de propriedades em figuras geométricas construídas com GeoGebra.

Os recursos básicos de raciocínio automatizado estão disponível no GeoGebra, versão 5. No entanto, certas melhorias das ART e avançadas características podem ser encontradas no GeoGebra Discovery, disponível em https://github.com/kovzol/geogebra-discovery; operando sobre o GeoGebra Classic 5, para computadores e laptops, nos sistemas operacionais Windows, Mac ou Linux e no GeoGebra Classic, versão 6, portanto, válido também em tablets e smartphones. Está acessível em http://autgeo.online/geogebra-discovery/ e os exemplos, descritos neste trabalho, foram desenvolvidos na versão online disponível em https://autgeo.online/

Procedimentos para a exploração e utilização GeoGebra Discovery

Esta seção introduz, descreve e exemplifica as características técnicas de algumas ferramentas implementadas (ART) no software de matemática dinâmica GeoGebra e possíveis procedimentos didáticos para sua utilização. Como mencionado acima, essas ferramentas permitem que o usuário automaticamente conjecture, descubra e prove declarações sobre diferentes elementos de uma determinada construção geométrica.

Os exemplos, aqui apresentados, ilustram, por um lado, as funcionalidades de algumas ART e, por outro, mostram a interação necessária entre o raciocínio humano e a máquina, sintetizando o que é denominada por "inteligência aumentada" pois as informações obtidas, com as ferramentas, exigem do usuário uma interpretação matemática que configure o resultado procurado. De acordo com o Glossário Gartner:

> A inteligência aumentada é um padrão de *design* para um modelo de parceria, centrado no ser humano, de pessoas e inteligência artificial (IA) trabalhando em conjunto para melhorar o desempenho cognitivo, incluindo aprendizado, tomada de decisão e novas experiências (https://www.gartner.com/en/information-technology/glossary/augmented-intelligence)

O conjunto ART do GeoGebra Discovery, até o momento, é composto de ferramentas e comandos denominados de: *Relation, LocusEquation, Prove* e *ProveDetails, Discover* e *Compare.* Algumas delas serão desenvolvidas e apresentadas, nos dois exemplos desse trabalho, no contexto da Geometria Plana.

De acordo com os pesquisadores (Kovács et al., 2022) a ferramenta *Relation*, existente na versão oficial do GeoGebra, retorna com respostas numéricas, afirmando ou não, a possibilidade das relações ocorrerem. Na versão atual, o comando permite verificar, validar ou negar conjecturas geométricas, como também a descoberta de propriedades relacionadas a determinados objetos, pois carrega um botão adicional, chamado de "*More...*" na mensagem de verificação numérica que, de acordo com Kovács et al. (2022), ao clicá-lo é acionado o sistema ART que traduz o objeto geométrico selecionado em equações polinomiais.

O comando *LocusEquation*, conforme Kovács et al. (2022), permite, por meio das ferramentas ART, a descoberta de novos teoremas, mediante hipóteses complementares que apoia uma tese, como também, calcula a equação implícita de um ponto dada uma propriedade válida.

Conforme observado por Kovács et al. (2022) os comandos *Prove* e *ProveDetails*, disponíveis na versão oficial do GeoGebra, funcionam de maneira semelhante, ou seja, o usuário digita o comando e insere a conjectura, obtendo como resposta verdade (*True)* o falso (*False*) e o comando *Discover*, ainda exclusivo da versão experimental do GeoGebra Discovery, busca de forma automática e combinatória, possíveis relações geométricas envolvendo um determinado elemento à escolha do usuário. O comando *Compare* utiliza a comparação entre comprimentos de segmentos (desigualdades). (Kovács et al., 2021).

A seguir são apresentados dois exemplos desenvolvidos no GeoGebra Discovery e os respectivos procedimentos utilizados.

Exemplos da utilização do GeoGebra Discovery

Exemplo 1: Construa um quadrilátero qualquer ABCD e os pontos médios PQRS dos respectivos lados, como na Figura 01. Na Caixa de Entrada digite **Discover(P).** Leia as informações disponibilizadas na janela aberta. O que se pode afirmar sobre o quadrilátero PQRS? Quais informações na janela aberta permitem comprovar sua afirmação?

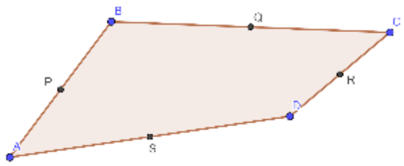

Figura 01. Screenshot do exemplo 1

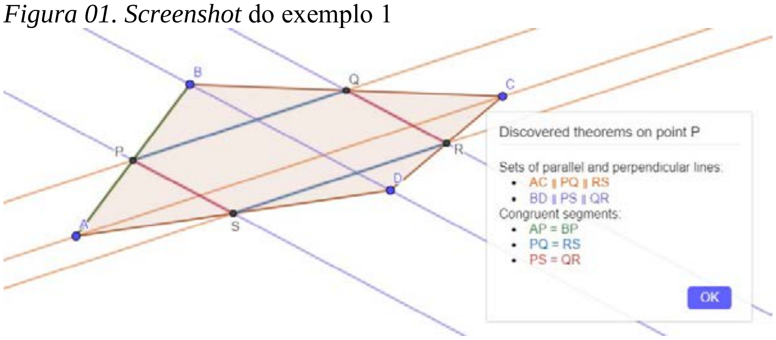

Figura 02. Screenshot dos resultados do exemplo 1 obtidos no GeoGebra Discovery

No exemplo 1, o usuário poderá concluir que PQRS é um paralelogramo ao interpretar as informações sobre paralelismo PQ||RS e PS||PQ e sobre a congruência dos segmentos PQ=RS e PS=QR (Figura 02)

Uma possível prova matemática formal pode ser desenvolvida como segue:

No quadrilátero ABCD sejam P,Q, R e S os pontos médios dos lados. Em um triângulo qualquer, se Q for o ponto médio de AB e P, o ponto médio de AD, então ΔABD ~ ΔAPQ. Então, como $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$, ΔAPQ ~ ΔABD e, portanto, $\overline{PQ} \parallel \overline{DB}$ e $\overline{PQ} = \frac{\overline{BD}}{2}$. De forma análoga, $\overline{RS} \parallel \overline{BD}$ e $\overline{RS} = \frac{\overline{BD}}{2}$. Assim, $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ e $\overline{PQ} = \overline{RS}$. Logo, PQRS é um paralelogramo.

No exemplo 2 indicamos os passos da construção no GeoGebra Discovery e as respectivas interpretações para conclusão do resultado.

Exemplo 2: Construa um triângulo qualquer ABC obtendo os segmentos a, b e c;

1. Usando a ferramenta Ponto Médio crie o ponto médio D de a;
2. Coloque um ponto E em b;
3. Crie a reta f que une D e E;
4. Pergunte ao GeoGebra sobre a exigência sobre o ponto E para ter f paralela a c digitando o comando **LocusEquation[c∥f,E]** na Entrada. Uma curva implícita d será computada e plotada (ver a janela de álgebra), e parece obter um único ponto. (Figura 03);
5. Movimente os objetos livres e conjecture sobre a posição do ponto E

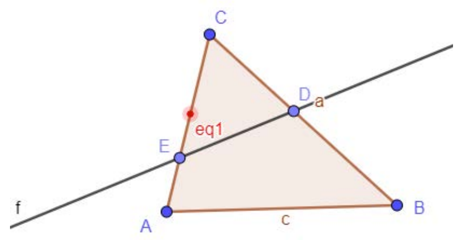

Figura 03. Screenshot do exemplo 2 obtido no GeoGebra Discovery

6. Esconda os objetos E, f e d;
7. Arraste os objetos livres novamente;
8. Para confirmar esta conjectura, crie o ponto médio F do segmento b;
9. Construa o segmento g por D e F;
10. Use a ferramenta *Relation* para comparar c e g, **Relation(c,g)**. Quais informações na janela pop-up resulta desse comando? (Figura 04);
11. Clique em **"*More* ..."** na janela pop-up. Quais informações resulta desse comando? (Figura 05).

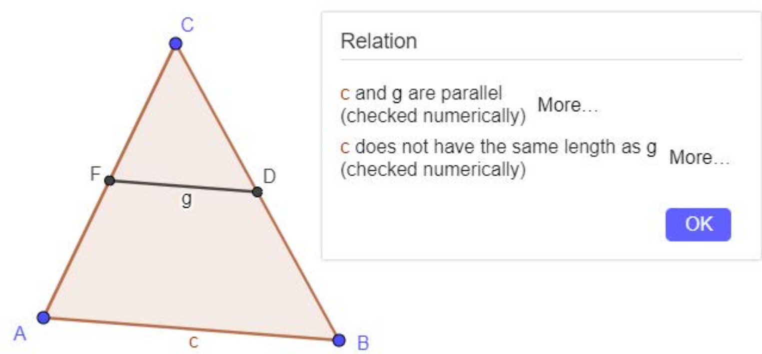

Figura 04. Screenshot do exemplo 2 obtido no GeoGebra Discovery

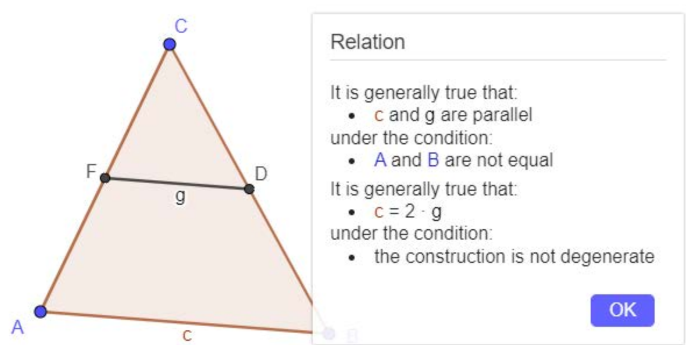

Figura 05. Screenshot do exemplo 2 obtido no GeoGebra Discovery

Assim, nesse exemplo 2, o usuário poderá concluir o teorema de Tales: *Em um triângulo, o segmento que une os pontos médios de quaisquer dois lados será paralelo ao terceiro lado e metade de seu comprimento.*

Também uma possível prova matemática formal pode ser desenvolvida como segue:

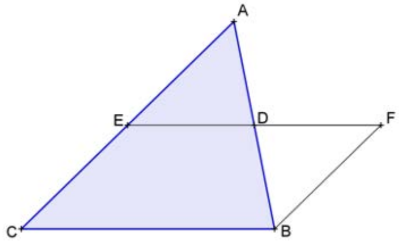

Figura 06. Screenshot da prova formal do exemplo 2

Sejam D e E os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente (Figura 06). Seja F um ponto na semirreta $\overline{ED}$, de modo que $\overline{DF} = \overline{DE}$. Como $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $A\hat{D}E = F\hat{D}B$ (ângulo oposto pelo vértice), então $\Delta ADE \sim \Delta FDB$ pelo caso LAL. Segue que $D\hat{F}B = A\hat{E}D$ e $\overline{FB} = \overline{AE}$. Como $\overline{FB} = \overline{AE}$ e $\overline{AE} = \overline{EC}$, temos que $\overline{FB} = \overline{EC}$. Logo, $\overline{FB}$ e $\overline{EC}$ são paralelos, pois $D\hat{F}B$ e $A\hat{E}D$ são ângulos alternos internos congruentes) e têm o mesmo comprimento. Como, todo quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo, concluímos que FBCE é um paralelogramo. Portanto, $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ e têm o mesmo comprimento. Como D é o ponto médio de $\overline{FE}$, então $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Considerações Finais

Apresentamos neste trabalho dois exemplos para explorar as perspectivas de descobertas de propriedades da geometria plana com as ferramentas da versão experimental do GeoGebra Discovery e argumentamos que, um estudo mais amplo possibilitará uma possível inclusão curricular destas mudanças metodológicas na prática escolar em relação aos recursos de raciocínio automatizado disponibilizados.

A descoberta por meio da visualização e interpretação dos resultados pelo usuário, ilustram as funcionalidades das ferramentas ART e mostram a interação necessária entre o raciocínio humano e a máquina, sintetizando o que é denominada por "inteligência aumentada".

É expressivo o número de usuários do GeoGebra, mais de 100 milhões em todo o mundo, e é um passo decisivo para tornar verdade a afirmação de Hohenwarter et al. (2019) de *que com calculadoras de bolso, as pessoas vão provavelmente começar a usar ART para verificar fatos geométricos sem o consenso da comunidade pedagógica em seu papel*, possibilitando, pelo avanço e disponibilidade de ferramentas digitais, o desenvolvimento de atividades matemáticas e o protagonismo do aluno.

Referências e bibliografia

Hohenwarter, M., Kovács, Z., & Recio, T. (2019). Using GeoGebra automated reasoning tools to explore geometric statements and conjectures. In G. Hanna, M. de Villiers, & D. Reid (Eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching,* series: Mathematics education in the digital era (Vol. 14, pp. 215–236). Cham: Springer.

Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M. P. (2018). Using automated reasoning tools in GeoGebra in the teaching and learning of proving in geometry. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 25(2), 33–50.

Kovács, Z., Recio, T. & Vélez, M.P. (2021). GeoGebra Discovery in Context. *Proceedings of the 13th International Conference on Automated Deduction in Geometry,* EPTCS 352, 141-147.

Kovács, Z.; Recio, T.&Vélez, M.P. (2022) Automated reasoning tools with GeoGebra: What are they good for? In: P. R. Richard, M. P. Vélez, S. Van Vaerenbergh (eds). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence*. Series: Mathematics Education in the Digital Era, 17, Springer.

Recio, T., Richard, P. R., & Vélez, M. P. (2019). Designing tasks supported by GeoGebra automated reasoning tools for the development of mathematical skills. *The International Journal for Technology in Mathematics Education,* 26(2), 81–89.