Razonamiento covariacional en el estudio de una función lineal mediante el uso de GeoGebra

Mihály **Martínez-Miraval**
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
martinez.ma@pucp.edu.pe
Daysi **García-Cuéllar**
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
garcia.daysi@pucp.pe

Resumen

El presente estudio tuvo por objetivo identificar las acciones mentales que ponen en juego los estudiantes al realizar una tarea que involucra una relación funcional con GeoGebra. Se consideraron aspectos teóricos del razonamiento covariacional, relacionado con la idea de acción mental. Se identificaron diversas acciones mentales al resolver una tarea que involucraba la relación entre las variables volumen de agua que ingresa a un recipiente y altura de agua dentro del recipiente, mediante el uso de un applet: expresar que al aumentar el volumen del agua, la altura se incrementa, o que construir un gráfico de puntos como un nuevo elemento que relaciona los valores individuales de ambas variables, o reconocer una covariación continua entre ellas. Se concluye que es factible identificar cómo un estudiante exterioriza sus acciones mentales con GeoGebra, lo que permite dar información de cómo un sujeto razona covariacionalmente a través de un software matemático.

Palabras clave: Acciones mentales; razonamiento covariacional, función lineal, GeoGebra, nivel universitario

Introducción

En la literatura el razonamiento covariacional se identifica como esencial para la comprensión de conceptos fundamentales de Cálculo (Carlson et al., 2002). En el tema de funciones, este tipo de razonamiento es importante para lograr una comprensión madura de este concepto (Oehrtman, Carlson y Thompson, 2008), que se da, al entender cómo se coordinan los cambios entre dos o más variables.

La coordinación simultánea de los cambios de una variable respecto de los cambios de otra variable, es factible analizarla desde una perspectiva del razonamiento covariacional. La comprensión del concepto de función desde esta perspectiva, involucra la habilidad de representar e interpretar las características de una función a partir de los cambios dinámicos entre sus variables (Mateus-Nieves y Moreno, 2021), lo que permitiría introducir su definición de una forma más cualitativa, como una covariación dinámica entre los cambios de los valores de dos variables (Antonini y Lisarelli, 2021), lo que no implica reemplazar su definición como una regla de correspondencia que asocia a un valor de entrada, un único valor de salida, se trata de complementar ambas ideas.

Por esta razón, se realizó esta investigación que tuvo como objetivo identificar las acciones mentales que ponen en juego los estudiantes al realizar una tarea de covariación que involucra una relación funcional con GeoGebra.

Aspectos teóricos

En el estudio se emplean aspectos de la aproximación teórica del razonamiento covariacional, centrado en la identificación de las acciones mentales que los estudiantes ponen en juego cuando desarrollan una tarea de covariación. Para ello, se identifican los comportamientos que exteriorizan los estudiantes que son asociados con el conjunto de acciones mentales identificadas por Martínez-Miraval y García-Rodríguez (2022), en el trabajo de los estudiantes sobre un tema de cálculo al mediar su aprendizaje con GeoGebra (Tabla 1).

Tabla 1
Acciones mentales y comportamientos al trabajar una tarea de covariación con GeoGebra.

Nivel	Comportamientos
Covariación continua suave	AM6: Extender la idea de coordinación simultánea entre la medida de la base de cada rectángulo y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos (S_L) cuando el valor de k tiende a infinito.
Covariación continua a trozos	AM5: Extender la idea de coordinación simultánea entre el número de rectángulos y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos con la intención de aproximar el área de la región R, al aumentar el valor de k.
Coordinación de valores	AM4: Imaginar que los valores individuales de las cantidades van juntos.
Coordinación gruesa de valores	AM3: Expresar verbalmente cómo coordinan los cambios entre el número de rectángulos y la suma de sus áreas en términos de aumentos o disminuciones.
Pre-coordinación de valores	AM2: Establecer de forma asincrónica relaciones entre los valores de diversas magnitudes, como el número de rectángulos y la suma de áreas de rectángulos; la cantidad de regiones no cubiertas (triángulos pequeños) y sus áreas.
Sin coordinación	AM1: Realizar operaciones aritméticas para dar sentido a los valores mostrados por el programa, como la suma de áreas de los rectángulos

Nota. Extraído de Autor (2022)

Aspectos Metodológicos

La investigación es de corte cualitativo. Denzin y Lincoln (2011) señalan que en este tipo de investigaciones, el foco se coloca en las interpretaciones y significados que los sujetos construyen relacionados con el fenómeno estudiado, y para ello, el investigador se basa en su análisis de información recolectada en videos, grabaciones, entrevistas, entre otras herramientas de recolección de datos.

Se trabajó con un estudiante al que llamaremos Pedro, de la facultad de Educación de una universidad privada de Lima-Perú, quien respondía a las preguntas que le hacía el investigador a medida que manipulaba herramientas de GeoGebra para dar su respuesta. El estudio se desarrolló en un formato de entrevista semiestructurada. Las tareas planteadas y su resolución se hicieron en una sola clase, en el lapso de hora y media. La figura 1 muestra el entorno de GeoGebra que se presentó al estudiante.

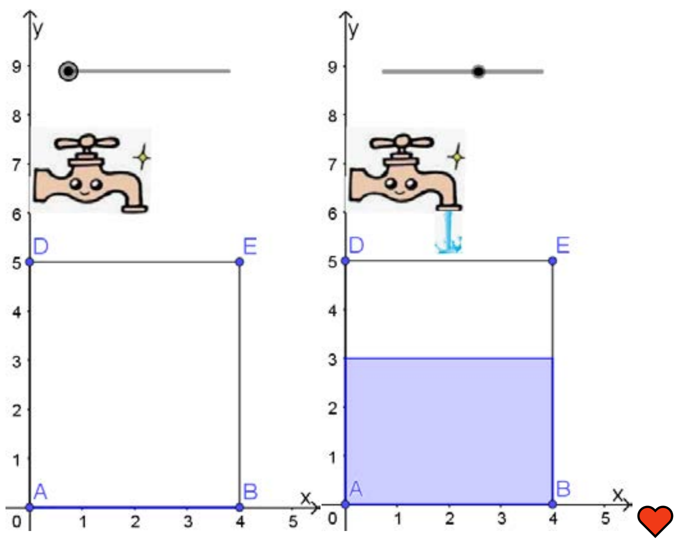

Figura 1. Applet en GeoGebra

En esta tarea, el estudiante debía identificar cómo variaba la altura del recipiente a medida que el volumen de agua ingresaba a velocidad constante, luego, debía representar gráficamente dicho comportamiento y reconocer una relación funcional entre ambas. Se indicó al estudiante que considerase que la profundidad del envase medía una unidad.

Análisis

El estudiante manipuló el deslizador y observó cómo se iba pintando de azul el recipiente. Al comienzo, el estudiante identificó diferentes variables: volumen del recipiente, altura del recipiente de la parte llena con agua y volumen del recipiente de la parte vacía. Al parecer, al inicio, no hubo una relación entre las variables que deseábamos monitorear, Pedro utilizó su conocimiento real de medidores de recipientes, asociando a la altura con la cantidad de litros o mililitros de agua, sin hacer los cálculos del volumen que había en el recipiente.

01 Investigador: Cuando mueve el deslizador, ¿qué variables identificas?
02: Pedro: En primer lugar, cuando veo el recipiente, me doy cuenta que ese sector azul cada vez que muevo el deslizador se empieza a incrementar, lo que sí queda estático es la base AB del recipiente, lo que sí se incrementa es el contenido del recipiente. Vemos que cuando está en 1 (altura), se puede pensar que es un litro, 2 litros, 3 litros, 4 (lo dice a medida que mueve el deslizador), y hasta el máximo tope.
03: Investigador: ¿Qué otra magnitud se incrementa, pero relacionado con el recipiente?
04 Pedro: La altura del agua en el recipiente.
05 Investigador: ¿Cómo cambia la altura del agua del recipiente a medida que el agua ingresa?
06 Pedro: En este caso se incrementaría más el agua y se disminuye la altura del recipiente de la parte vacía. Si se llena un litro, quedarían 4 litros por llenar. Por ejemplo, ya tengo 4 litros [movió su deslizador a 4, agregado por el investigador] y la altura del recipiente vacío es uno. La altura en general es de 0 a 5, pero mientras más agua, menos altura del recipiente en vacío.

Se observan comportamientos de una acción mental 1 (AM1) al identificar las variables volumen de agua del recipiente y altura del agua en el recipiente, pero no reconocer una relación numérica entre ellas; del mismo modo, se identifica una acción mental 3 (AM3), cuando Pedro relaciona los aumentos en la altura del agua del recipiente, expresada en cantidad de litros, con la disminución de la altura de la parte vacía del recipiente.

El investigador le consultó al estudiante si se podía saber el volumen del líquido dentro del recipiente y si había una relación con la altura del agua en recipiente, observado en el eje Y, producto de ello se dio el siguiente diálogo.

07 Investigador: ¿Qué relación hay entre la altura del agua en el recipiente y el volumen?
08 Pedro: Cuando la altura del recipiente es 2, tengo 2 por 4 igual a 8, 8 litros cúbicos de agua. Si coloco una altura de 3, el volumen es 12, la máxima cantidad es 20.
09 Investigador: Entonces, ¿el volumen de agua que ingresa al recipiente, depende de la altura de agua del recipiente?
10 Pedro: Bueno, así lo puedo ver, pero, también se puede decir que cuando el volumen es 4, la altura es 1, si el volumen es 8, la altura es 2, si el volumen es 12, la altura es 3, es decir, la altura va con una razón de 1 y mi volumen va incrementándose en razón a cuatro hasta legar a 20. Yo creo que es una relación lineal.

Se observa en la respuesta de Pedro, que reconoce que ha medida que el volumen de agua se incrementa, la altura del agua en el recipiente crece también, esto es una característica de una AM3. Además, reconocer un patrón en los incrementos y asociarlo con una relación lineal (aunque todavía no lo había comprobado), nos permite inferir que Pedro se ubica en un tránsito hacia una acción mental 4 (AM4), en la cual, se construye un nuevo elemento, que brinde atributos de ambas variables de forma simultánea, la cual se puede expresar mediante la construcción de un punto.

Al percatarse de la linealidad en la relación entre ambas variables, Pedro solicitó al investigador si podía habilitarle la vista algebraica, dado que quería realizar un gráfico que relacione ambos valores al variar el deslizador. Esto lo llevó a abrir una vista gráfica 2 de GeoGebra, escribir en la barra de entrada: ($c2$, a), donde $c2$ es el área de la región de color azul (que representaría para el estudiante el volumen del agua dentro del recipiente), y a representa la altura del recipiente, movilizado con el deslizador, activar el rastro del punto y mostrar una gráfica compuesta por un número finito de puntos (figura 2).

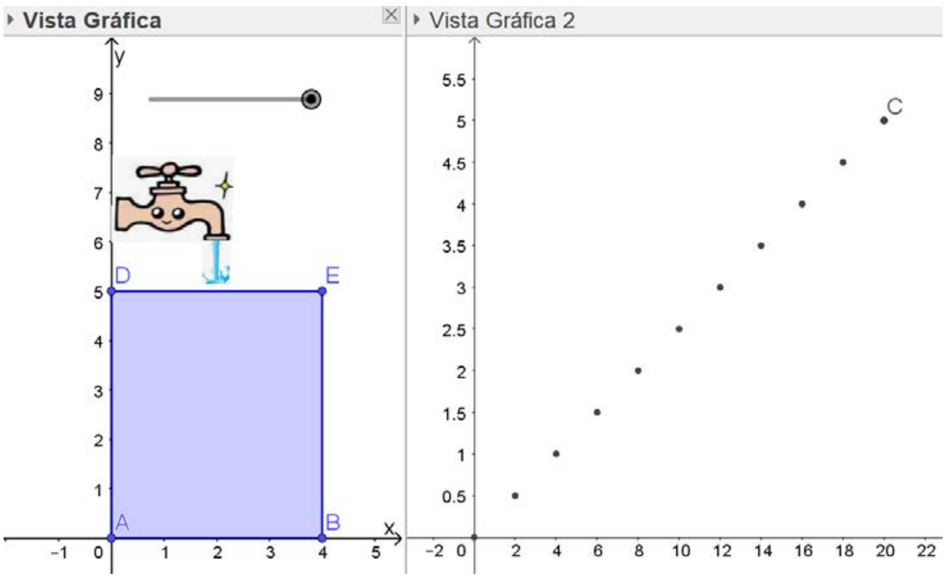

Figura 2. Representación gráfica de la relación entre el volumen y la altura del recipiente

La creación del punto C y su representación gráfica, es un comportamiento asociado con una AM4. Con la intención de reconocer acerca de lo que piensa el estudiante sobre la gráfica obtenida, se presentó el siguiente diálogo.

11 Investigador: ¿Qué representa la gráfica de puntos para ti?
12 Pedro: x es el volumen del recipiente, y y es la altura del recipiente. Por ejemplo, si x es 4, y es 1, es decir, si el volumen es igual a 4, la altura es igual a 1, y así con el resto de puntos.
13 Investigador: ¿Qué representan los espacios entre cada punto?
14 Pedro: Veo que el deslizador tiene incrementos de 0.5. Si lo cambio a 0.01 los puntos saldrán alineados y los huecos ya no existirán (figura 3).

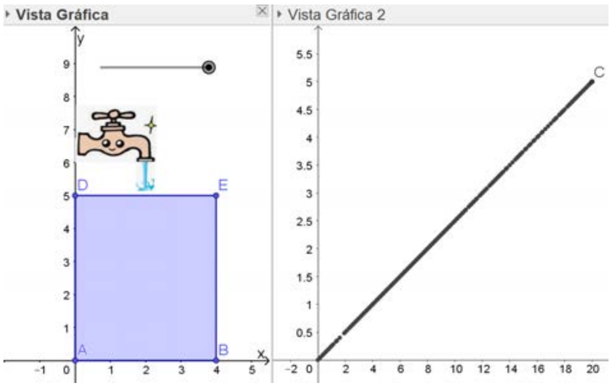

Figura 3. Cambio en el incremento del deslizador a 0.01

Esto se puede entender como extender la coordinación de los cambios en los valores del volumen de agua que ingresa al recipiente y la altura de agua del recipiente, para valores intermedios que puede tomar la altura del recipiente se mantiene, esto es, si aumentaba de 0,5 en 0,5 unidades, implicaba cambios en el volumen de agua de dos litros, ahora, con incrementos de 0,01 en 0,01, el volumen cambia a razón de 0,04 litros. Esto es una característica de una acción mental 5 (AM5).

Por último, Pedro se da cuenta que hay una relación funcional entre el volumen del agua que ingresa al recipiente y la altura de agua dentro del recipiente, que puede ser representada con una expresión matemática: $y = \frac{1}{4} x$.

Pedro indicó que es consciente que el volumen y la altura pueden tomar cualquier valor real, y que se puede determinar la ecuación de una recta que pasa por esos puntos, expresó lo siguiente luego de hacer algunos cálculos: *"La pendiente me sale 1/4, es decir, por cada 4 litros de volumen, la altura se incrementa en 1"*, y graficó la recta para corroborar que la relación entre ambas variables (figura 4), aparte de que los cambios entre ellas se dieron de forma simultánea al manipular el deslizador, al representar la gráfica continua, es una característica de una acción mental 6 (AM6), en la que un sujeto percibe que la covariación entre dos variables se da de forma continua y suave, considerando a todos los valores resales de ambas variables sujetas a sus respectivas restricciones.

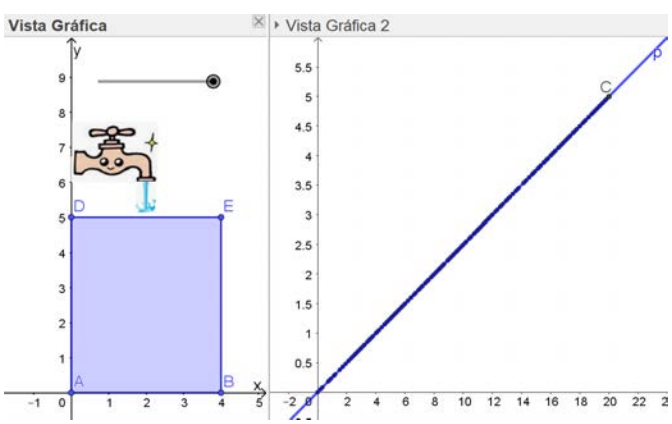

Figura 4. Relación funcional lineal entre el volumen de agua y la altura

Conclusiones

El uso de softwares de geometría dinámica, como lo es GeoGebra, permite a los estudiantes realizar manipulaciones sobre los conceptos que están aprendiendo, darse cuenta de los cambios simultáneos entre las diferentes variables involucradas al desarrollar una tarea, de realizar conjeturas y poder validarlas, tanto numérica, algebraica como gráficamente, y todas ella al mismo tiempo. Esto genera que el concepto enseñado pueda ser aprendido de una manera más completa. Se sugiere realizar modificaciones a las tareas, o al diseño del recipiente con el fin de analizar cómo el estudiante aborda esa nueva tarea, y si amplía sus conocimientos.

El estudio del razonamiento covariacional se vuelve relevante en el análisis de situaciones de cambio, ya sea que se trabaje con funciones, u otros temas de Cálculo como límites, derivadas e integrales. El razonamiento covariacional de los estudiantes puede estar involucrado en la comprensión de cómo se dan los cambios entre las variables, aspecto de mucha importancia, sobre todo en las definiciones de límites, derivadas e integrales. De modo que es factible identificar cómo un estudiante exterioriza sus acciones mentales con GeoGebra, lo que permite dar información de cómo un sujeto razona covariacionalmente a través de un software matemático.

Referencias y Bibliografía

Antonini, S., y Lisarelli, G. (2021). Designing Tasks for Introducing Functions and Graphs within Dynamic Interactive Environments, https://doi.org/10.3390/math9050572, Mathematics, 9, 572

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study, https://doi.org/10.2307/4149958, Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 352-378

Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S. (2011). *Sage Handbook of Qualitative Research*, ISBN: 1412974178, California, USA

Martínez-Miraval, M. y García-Rodríguez, M. (2022). Razonamiento Covariacional de Estudiantes Universitarios en un Acercamiento al Concepto de Integral Definida mediante Sumas de Riemann. *Formación Universitaria,* 15(4), 105-118. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

Mateus-Nieves, E., y Moreno, E. (2021). Desarrollo del Pensamiento Variacional para la Enseñanza de Nociones Preliminares de Cálculo. Una Experiencia de Aula en la Educación Básica, https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5716, *Acta Scientiae*, 3(2), 113-135

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P. & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*, MAA Notes (Vol. 73, pp. 27-42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Matemática, 23(3), 339–361. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p339-361