



## **Sobre el uso de instrumentos conceptuales y técnicos en la formación de profesores**

Luis Ángel **Bohórquez** Arenas  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia

[labohorqueza@udistrital.edu.co](mailto:labohorqueza@udistrital.edu.co)

Martha **Bonilla** Estévez  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia

[marthaedumat@udistrital.edu.co](mailto:marthaedumat@udistrital.edu.co)

Deissy **Narváez** Ortiz  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia

[dmnarvaezo@udistrital.edu.co](mailto:dmnarvaezo@udistrital.edu.co)

Jaime **Romero** Cruz  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
Colombia

[jaimeddumat@udistrital.edu.co](mailto:jaimeddumat@udistrital.edu.co)

### **Resumen**

En esta comunicación presentaremos algunos hallazgos que dan cuenta de cómo usan un grupo de estudiantes para profesor los instrumentos conceptuales - matemáticos y didácticos- para interpretar y argumentar el uso de problemas en los entornos de aprendizaje. Para abordar el problema de identificar cómo usan estos estudiantes los instrumentos conceptuales y técnicos presentaremos inicialmente la caracterización teórica que sobre este término se establece. De esta manera, estableceremos un marco de referencia para interpretar los aspectos que nos permitan determinar los instrumentos conceptuales que usan los estudiantes para profesor en el diseño de problemas que posibiliten a sus futuros estudiantes el aprendizaje de conceptos matemáticos. Finalmente concluiremos sobre la forma en que se utilizaron estos instrumentos desde las actividades particulares que se realizaron en el aula.

*Palabras clave:* educación, matemática, formación de profesores, instrumentos conceptuales.

## **Sobre los instrumentos conceptuales y técnicos en la formación de profesores**

Recientes desarrollos de las teorías sobre el aprendizaje profundizan sobre la relación esencial entre el conocimiento y los contextos de uso (Collins, Greeno y Resnick, 1996; Putnam & Borko, 2000) y desde allí se ve el aprendizaje como la participación en entornos

interactivos con un grado creciente de conocimiento (Llinares, 2004) y uso de los instrumentos característicos de la práctica (Resnick, 1991). Según Collins, Greeno y Resnick (1996) los estudios de la actuación cognitiva en situaciones de trabajo complejas muestran que el pensamiento está a la vez ampliado y limitado por instrumentos que comparten la carga mental con los seres humanos. En otras palabras, pensamos y actuamos ayudados por instrumentos. Aunque, no sólo por instrumentos físicos sino en términos de Collins, Greeno y Resnick (1996) “también los convencionalismos para el razonamiento de origen cultural, como los creados en la práctica de la ciencia y en la difusión científica, funcionan para ampliar la capacidad cognitiva humana y para limitar la probabilidad de que los individuos imaginen soluciones que se salgan de las normas de una profesión” (p. 195).

Llinares (2004) basado en lo descrito en el párrafo anterior establece que *el instrumento* conlleva la idea de un objeto diseñado y empleado para ampliar el poder de las acciones del individuo, el cual puede ser un objeto físico o también conceptos, formas de razonar, formas de generar un discurso, entre otras, que condicionan y permiten las interacciones dentro de las comunidades de práctica. De esta manera, este autor considera que para la práctica de enseñar matemáticas se pueden considerar instrumentos técnicos e instrumentos conceptuales (Llinares, 2004).

Sobre los *instrumentos técnicos*, Llinares (2007) establece que este tipo de instrumentos permiten tener los medios para hacer “determinadas cosas” en la práctica, como por ejemplo materiales didácticos – bloques multibase, geoplanos -, software didáctico – como el Cabri Geometry, Logo -, matrices para la evaluación de los procesos de resolución de problemas de los alumnos y técnicas para gestionar los debates y puestas en común de los procedimientos y respuestas a diferentes problemas.

Los *instrumentos conceptuales* son aquellos, según Llinares (2007), que permiten poseer unas referencias para interpretar las situaciones de la práctica del profesor, condicionando lo que se ve y cómo se ve. Por ejemplo, los conceptos y construcciones teóricas que se han generado desde las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas que permiten comprender y tratar la realidad (situaciones en las que se enseña y aprenden matemáticas).

Teniendo en cuenta lo anterior vale la pena preguntarse ¿cuál es el significado de “práctica”? Llinares (2004), considera que una manera de aproximarse a una respuesta a la pregunta y a lo que significa “aprender una práctica” es considerar la noción de práctica como aquella donde se realizan unas tareas para lograr un fin, se hace uso de instrumentos y se justifica el uso de estos instrumentos. En esta consideración de la enseñanza de las matemáticas como una práctica que tiene que ser comprendida y aprendida, el autor, identifica algunas tareas que la articulan y las habilidades profesionales que permiten realizarlas, como por ejemplo: 1. diagnosticar - dotar de significado a las producciones de los alumnos-, 2. planificar –determinar planes de acción-, 3. evaluar – tomar decisiones sobre cómo, dónde, y qué hacer con la información-, 4.gestionar debates – formular preguntas que permitan vincular concepciones previas con lo nuevo, subrayar y valorar las diferentes aportaciones – (Llinares, 2004, 2007, 2008a)

Desde esta perspectiva, los diferentes componentes del conocimiento profesional del profesor de matemáticas pueden ser vistos como instrumentos que permiten desarrollar la práctica de enseñar matemáticas. Este planteamiento, según Llinares (2007, 2008a), implica ver el proceso de aprender a enseñar como un proceso en el que los estudiantes para profesor aprenden a usar instrumentos conceptuales y/o técnicos en la actividad de enseñar matemáticas.

García y Sánchez, (2002) y Llinares, (1998, 2008a) afirman que aprender a usar instrumentos conceptuales y/o técnicos en la actividad de enseñar matemáticas y participar en un proceso social de construcción del conocimiento son las dos características fundamentales de lo que supone aprender a enseñar. Estas dos características tienen fuertes implicaciones en la forma cómo se diseñen las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes para profesor de matemáticas (García & Sánchez, 2002 y Llinares, 1998, 2008a). Este hecho, genera la necesidad de diseñar en los programas de formación “oportunidades” para que los estudiantes para profesores de matemáticas aprendan de y sobre la práctica a través de “actividades auténticas” (García, 2000, 2001; Llinares, 1998, Sánchez, 2003).

Según Llinares (2008b) uno de los medios que permiten al estudiante para profesor tener acceso a “actividades auténticas” o situaciones reales de clase es el uso de grabaciones de secuencias de enseñanza de las matemáticas como material y recurso de formación (p. 22). Al respecto, este autor agrega que el uso de estas grabaciones (o de segmentos de clase grabadas en video) en los programas de formación de profesores, tiene el propósito de proporcionar a los estudiantes para profesor la posibilidad de analizar las condiciones y los componentes de la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2008). Además, considera que el uso de este medio refleja la idea de organizar la formación de profesores de forma que el estudiante para profesor comprenda la práctica de enseñar matemáticas. A su vez, Llinares (2008b) afirma que el uso de segmentos de clase grabados en video permite a los estudiantes para profesor poder usar de manera cada vez más progresiva *los instrumentos conceptuales*, los cuales les posibilita ir más allá de la identificación de las características superficiales de la enseñanza (Herbst & Chazan, 2003; Llinares, 2008b).

Llinares (2002, 2008b) en sus investigaciones ha encontrado que el uso progresivo de los *instrumentos conceptuales* en las actividades de análisis e interpretación de las situaciones de enseñanza-aprendizaje, y la modificación paulatina en las maneras de participar en los espacios de interacción social constituidos, son manifestaciones del proceso de construcción del conocimiento por parte de los estudiantes para profesor (Llinares, 2002, 2008b). Este hallazgo se estableció en el análisis de los datos obtenidos de la participación e interacciones de los estudiantes para profesor en un ambiente virtual diseñado de tal forma que las sesiones de trabajo están constituidas por unos materiales (documentos en formato doc, videos, conexiones a páginas web,...), un debate virtual y un guión de cuestiones que permite organizar y guiar la actividad de los estudiantes para profesor (Llinares, 2008b).

En una investigación efectuada por García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2008) se indagó por aquellas investigaciones en donde se analiza el papel que cumplen las representaciones y su coordinación, vistas como *instrumentos conceptuales*, en la construcción de los significados de la idea de derivada y en la introducción de tal concepto mediante el estudio de la variación con el uso inicial de contextos numéricos. Al respecto estos investigadores encontraron que los resultados de este tipo de investigaciones indican que los significados que construyen los estudiantes están vinculados a determinados modos de representación y que tales significados no están conectados. Este hecho subraya la importancia de coordinar los diferentes modos de representación como una forma para que los estudiantes puedan comprender la derivada (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2008). En otras palabras, la importancia de la apropiación de estos instrumentos conceptuales para comprender el concepto de derivada.

Teniendo en cuenta que como base lo expuesto anteriormente, entre otras cosas, el proyecto de investigación: **El uso de problemas matemáticos como instrumentos de**

**aprendizaje en la formación de profesores**<sup>1</sup>, abordó el objetivo específico de *describir y analizar cómo usan estos estudiantes para profesor los instrumentos conceptuales - matemáticos y didácticos- para interpretar y argumentar el uso de problemas en los entornos de aprendizaje.*

Para dar cuenta de este objetivo como mencionamos anteriormente la metodología propuesta para el desarrollo de nuestro proyecto de investigación se apoya en los postulados de la investigación cualitativa interpretativa, particularmente en la metodología denominada Experimento de Enseñanza, la cual es un tipo especial de los experimentos en diseño (Collins, 1990), que según diSessa y Cobb (2004) son investigaciones que intentan “entender y mejorar procesos educativos simultáneamente iterativos, situados y basados en teoría”(pág. 36). Estos estudios tienen como característica principal que los investigadores (incluido el profesor de aula) producen diseños basados en teorías de la enseñanza y el aprendizaje (crean hipótesis previas), los experimentan en el aula y a través de evaluaciones continuas reconstruyen las hipótesis, generando un ciclo de refinamiento del diseño.

En el experimento de enseñanza como lo hemos mencionado participaron 24 estudiantes del curso de didáctica de la variación de sexto semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (programa de formación de profesores de matemáticas Bogotá- Colombia). Los datos que se tomaron para dar cuenta de este objetivo provienen del grupo G1 (5 estudiantes) y de Erika integrante del grupo G6. Se tomó el grupo G1, básicamente porque en el informe de variables didácticas solicitado durante el desarrollo del curso este grupo describió detalladamente el proceso de modificación del problema original y los datos de Erika por su participación constante en el ambiente virtual en los diferentes ciclos de resolución de problemas propuestos para el curso.

### **Diseño del ambiente de aprendizaje.**

Diseñamos un ambiente de aprendizaje compuesto de 32 sesiones de dos horas cada una, de las cuales hubo 28, agrupadas en tres ciclos consecutivos. El primer ciclo, de 16 sesiones, centrado en la resolución de problemas de variación. El segundo ciclo, de 10 sesiones, centrado sobre el análisis didáctico de los problemas de variación, en particular sobre las variables didácticas. El tercer ciclo formado por 6 sesiones, de las cuales se realizaron 2, centrado en el análisis y reflexión de la resolución de problemas como contextos de aprendizaje. En cada ciclo hubo una intencionalidad del profesor y unas actividades realizadas sobre un mismo problema, pero cada una de estas ofrecía dimensiones distintas de reflexión sobre el proceso que los estudiantes estaban realizando.

Los problemas planteados estuvieron dirigidos a que los estudiantes generaran una idea de variación que involucra el reconocimiento de las variables, parámetros, cuantificadores, relaciones funcionales y relaciones de covariación, y que puede ser modelada en contextos de optimización. En particular la derivada como una medida de la velocidad de cambio en un contexto continuo y la programación lineal como un contexto para modelar la covariación con magnitudes discretas.

Por otro lado, para presentar los análisis de los datos que dan respuesta al objetivo de investigación del que nos encargamos en este capítulo utilizaremos la viñeta que, según Gavilán, García y Llinares (2007), “es un informe sobre aspectos de la práctica del profesor que integra información de diferentes fuentes, transcripciones de las sesiones de clase, los

---

<sup>1</sup> El Experimento de Enseñanza se realizó en el desarrollo de la investigación “El uso de problemas matemáticos como instrumentos de aprendizaje en la formación de profesores” financiado por Colciencias y la Universidad Distrital (Cod. 1130-452-21063), durante los años 2009 – 2010.

informes elaborados en el análisis descriptivo, la unidad didáctica, y la descripción e interpretación de lo que sucede en los segmentos de enseñanza” (pág. 161). Además, estos autores aseguran que en las viñetas se “integran inferencias realizadas por los investigadores para mostrar qué interpretaciones se han realizado y su vinculación con la evidencia empírica” (pág 161).

Teniendo en cuenta lo anterior, Gavilán, García y Llinares (2007) establecen que la viñeta es un informe elaborado por el investigador que debe contener: “1. El lugar cronológico en el que sucede la acción del profesor en relación con la unidad didáctica considerada globalmente, 2. Las tareas que se plantean a los alumnos y que definen el objeto de interacción entre el profesor y los alumnos, 3. La organización del contenido matemático que el profesor, 4. Lo que el profesor hace y dice durante la gestión a través de la transcripción del discurso y la descripción de lo que sucede en el aula, 5. La justificación que hace el profesor de la gestión realizada, y 6. La inferencia realizada por el investigador sobre la modelación del mecanismo de construcción que realiza el profesor mediante los elementos matemáticos y sistemas de representación utilizados (instrumentos de la práctica)” (pág. 163).

### **Construcción de las viñetas**

El proceso de construcción de las dos viñetas (Gavilán, García, & Llinares, 2007) presentadas en los resultados inicia con la extracción de datos obtenidos en varias sesiones de clase del desarrollo de la asignatura Didáctica de la Variación, que permitieran mostrar cómo desarrollan los estudiantes para profesor la habilidad de reflexionar pedagógicamente como futuros maestros, a partir de su experiencia en el ambiente de aprendizaje de la resolución de problemas utilizando instrumentos conceptuales y cómo usan los estudiantes para profesor instrumentos conceptuales y su experiencia como resolutores en el diseño de problemas que permitan a sus futuros estudiantes el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Con relación a cómo desarrollan los estudiantes para profesor la habilidad de reflexionar pedagógicamente como futuros maestros los datos se organizaron de manera cronológica, a partir de la segunda sesión presencial (sesión 2) y de las posteriores participaciones en foros virtuales que se dieron a lo largo del curso. Estos datos, dan cuenta de cómo a medida que avanza la resolución del problema y los estudiantes tienen acceso a instrumentos conceptuales sus intervenciones y argumentos sobre el sentido que tienen los problemas sobre los cuales se están trabajando se van complejizando.

Respecto cómo usan los estudiantes para profesor instrumentos conceptuales y su experiencia como resolutores en el diseño de problemas que permitan a sus futuros estudiantes el aprendizaje de conceptos matemáticos, los datos se organizan teniendo en cuenta momentos claves de explicación dadas por los integrantes de G1 para dar cuenta de las variables didácticas que identificaron en el problema de la Viga y las modificaciones que hicieron a las mismas para obtener un nuevo problema. Estos datos muestran cómo este grupo utilizó su experiencia como resolutores de problemas y otros instrumentos conceptuales para efectuar modificaciones a su nuevo problema, el cual consideran permite el aprendizaje de su idea de variación.

### **Resultados**

Los resultados han sido organizados en dos viñetas. En la primera se da cuenta de cómo desarrollan los estudiantes para profesor la habilidad de reflexionar pedagógicamente como futuros maestros, a partir de su experiencia en el ambiente de aprendizaje de la resolución de problemas utilizando instrumentos conceptuales. En la segunda viñeta se da cuenta de cómo usan los estudiantes para profesor instrumentos conceptuales y su experiencia

como resolutores en el diseño de problemas que permitan a sus futuros estudiantes el aprendizaje de conceptos matemáticos.

**Viñeta 1: Sobre cómo desarrollan los estudiantes para profesor la habilidad de reflexionar pedagógicamente como futuros maestros, a partir de su experiencia en el ambiente de aprendizaje de la resolución de problemas y del uso de instrumentos conceptuales.**

Los datos proceden de la segunda sesión presencial y de las participaciones en el foro virtual registradas el 8 de octubre, 9 de noviembre y 21 de noviembre. En la sesión presencial y en las participaciones virtuales los estudiantes están respondiendo a la pregunta **¿Qué sentido tiene que el profesor Ángel nos proponga los problemas sobre los cuales estamos trabajando?** En la sesión presencial los estudiantes responden por primera vez esta pregunta, registrando su respuesta en el cuaderno. Posteriormente se abre un foro en el aula virtual en el que los estudiantes de cada grupo interactúan con integrantes de otros grupos contestando esta misma pregunta. Los datos obtenidos de la sesión presencial y de los registros de la participación en el aula virtual permitieron identificar el uso de distintos instrumentos conceptuales pedagógicos presentados a los estudiantes en el desarrollo del curso, así como nuevas relaciones que lograron establecer entre el abordaje de los problemas y sus conocimientos previos.

En la segunda sesión, Erika, integrante de G6 responde a la pregunta. En esta primera respuesta ella demuestra que solamente ve en el problema que trabajan una actividad que el profesor ha escogido para enseñar. Erika habla de ‘los estudiantes’, que son los futuros maestros entre los que se encuentra ella misma, sin que parezca involucrarse mucho.

*\* Para que a través de problemas pequeños se llegue al propósito y al programa de la materia.*

*\* Para identificar las herramientas con las que cuentan los estudiantes y a partir de allí surjan diversos caminos de solución” (Sesión 2, Trabajo individual, cuaderno).*

Las consideraciones de Erika en esta respuesta están ligadas más a sus concepciones sobre el problema como actividad que genera motivación y permite el diagnóstico de los conocimientos de los estudiantes y la ejecución del currículo. De hecho Erika habla del problema con el que han trabajado como uno de los ‘problemas pequeños’ que el profesor usa para lograr los propósitos del programa; probablemente no imagina todavía que es posible generar el conocimiento que se pretende a lo largo del curso a partir de un solo problema, de modo que aún pone de manifiesto una concepción tradicional de *actividad* de enseñanza.

Transcurridas cinco (5) sesiones de clase los estudiantes han logrado una resolución inicial del problema, han reflexionado sobre posibles modificaciones a ese problema para buscar aprendizajes diferentes y han leído un documento entregado por el profesor que contiene la transcripción de la discusión del grupo de investigadores alrededor de las características que debía tener el problema para generar las comprensiones deseadas en los estudiantes para profesor. En este momento, Erika vuelve a participar en el foro virtual para ampliar la respuesta a la pregunta, y ya demuestra una visión reflexiva de lo que hace su profesor en el aprendizaje de ella como futura maestra. El cambio está marcado por su inclusión de ella misma en la descripción: ella ya es parte de un ‘nosotros’ estudiantes, diferentes de los estudiantes cuyo quehacer van a dirigir en el futuro.

*Además de lo planteado anteriormente creo que el docente busca enfrentarnos (a los estudiantes) a la dificultad de planear los problemas [...] para que identifiquemos la importancia del tipo de problemas y preguntas presentadas, ya que cualquier detalle, por mínimo que resulte, puede alterar el quehacer del estudiante y nosotros como futuros docentes debemos tomar una postura crítica ante las herramientas y situaciones que consiguen llevar a la construcción adecuada de un concepto matemático. (Registro participación Aula Virtual, 9 de Noviembre de 2009, 22:37)*

Erika empieza a tomar conciencia de que, en un ambiente de aprendizaje que se fundamenta en la resolución de problemas, tienen importancia las características de esos problemas y de las preguntas que incluyen. Así, Erika parece haberse apropiado de elementos conceptuales presentes en el documento estudiado y relacionados con la concepción de resolución de problemas como ambiente de aprendizaje. Esto es especialmente evidente cuando hace referencia a la postura crítica que deben desarrollar ella y los otros futuros maestros ante las herramientas y situaciones (problemas) que pueden llevar a la construcción adecuada de un concepto.

Luego de cinco (5) sesiones más de clase a partir de la intervención descrita anteriormente, los futuros maestros han leído un documento conceptual sobre variables didácticas, han identificado variables didácticas en el problema que han trabajado, las han modificado para generar otros problemas y han discutido en grupo las implicaciones de estas modificaciones en las estrategias de solución que deberán emplearse para su solución y las comprensiones conceptuales que pueden desarrollarse. Erika presenta entonces una consideración final a la pregunta del foro en el aula virtual. En su respuesta demuestra, ya definitivamente, la apropiación de los instrumentos conceptuales pedagógicos presentados a lo largo del curso y una habilidad reflexiva bastante aguda en el detalle específico de la información que proporciona. Primero que todo, explica lo que son ‘variables didácticas’ de manera clara y eficiente:

*Las situaciones que el docente lleva al aula siempre tienen un objetivo que permitirá a los estudiantes adoptar una serie de estrategias para dar respuesta a las preguntas o a los requerimientos que el problema hace; estas preguntas, situaciones y elementos que hacen cambiar las estrategias de solución, interpretación, conocimientos, que condicionan el problema y que pueden ser modificadas por los docentes son las que podemos llamar variables didácticas.*

Inmediatamente ilustra esta explicación con la descripción de lo que ella y los demás futuros maestros lograron al trabajar y discutir el problema propuesto por el profesor:

*El enfrentarnos con la solución del problema de la resistencia de la viga nos permitió dar un seguimiento a los datos que nos daban, a los aspectos que se hacía necesario encontrar y la identificación de las herramientas que podíamos utilizar [...]. Sin darnos cuenta reconocíamos los aspectos que nos condicionaban, como el hecho de entregar una justificación a la respuesta desde pequeñas alteraciones a una de las dimensiones de la viga, que a su vez llevaba consigo la noción de derivada y variación[...]*

Esto le permite pasar a describir su propio ejercicio de cambio de las variables didácticas del problema, generalizándolo como labor del maestro que busca aprendizajes específicos en sus estudiantes y generalizando también su dificultad e importancia:

*[...]adquiridas estas herramientas logramos darnos a la difícil tarea de como profesores resulta cambiar una variable didáctica, ya que cualesquier cambio necesita de un análisis para que realmente apunte a las creencias y propósitos del docente, pues si se hace de forma aleatoria puede crear una nociones erróneas, agotamiento y desinterés por parte de los estudiantes.*

Finalmente Erika aplica toda esta experiencia a la declaración completa de su responsabilidad personal y la de todos, como futuros maestros de matemáticas:

*Es responsabilidad de nosotros como docentes apropiarnos de aquello necesario en el aula, tanto de la buena actitud hacia los estudiantes, la disposición y compromiso ante la clase, como de los temas a trabajar y las herramientas para abordarlos de forma adecuada, que permita un ambiente de discusión, aprendizaje y preguntas para aclarar el tema y despertar el interés, todo esto no sin antes pensar el problema que cumpla las características para apuntar al objeto matemático al cual se quiere llegar, que la información entregada sea la pertinente para adoptar varios caminos de solución sin que estos se alejen del concepto a trabajar” (Registro participación Aula Virtual, 21 de Noviembre de 2009, 23:26).*

En este último párrafo de su intervención Erika reflexiona sobre la forma de actuar del profesor en el aula, así como sobre su disposición para gestionar el tipo de experiencias de aprendizaje en las que el centro es un problema matemático y cada decisión tomada en su diseño condiciona no sólo lo que se aprende sino la manera como ocurre este aprendizaje. En otras palabras, al conectar toda la información que da sobre su experiencia en el curso con esta última declaración, Erika está reflexionando sobre la incidencia e importancia de este trabajo en su formación como docente de matemáticas.

Transcurridas catorce (14) sesiones de clase, los estudiantes han trabajado en la resolución del problema, han participado en las socializaciones sobre sus procesos de resolución y han reflexionado sobre su participación en este ambiente de aprendizaje, particularmente en identificar momentos claves en la construcción de su conocimiento. En el registro de la participación de Erika en el Aula Virtual con relación a la pregunta sobre el sentido que tienen los problemas que propone el profesor, Erika confirma que entiende su experiencia en el curso con su doble propósito: el del resolutor de problemas, que avanza en su comprensión de conceptos matemáticos, y el del futuro maestro, que vive la experiencia que vivirán sus estudiantes para entender lo que produce un problema matemático que se constituye en verdadero ambiente de aprendizaje:

*(El problema)...es una forma de abordar los conceptos que tiene como objetivo este espacio de didáctica de la variación, para que creemos una idea acertada del concepto, la utilidad en los problemas matemáticos que puedan presentarse. Para que nos enfrentemos nosotros como futuros docentes con la verdadera experiencia de resolver un problema, que seamos participes de las actitudes, emociones y trabajo que se hace necesario para resolver un problema.*

*La comparación de diferentes (en nuestro grupo) variaciones que creemos encontrar nos ayudan a aclarar el término, así mismo el contraste de significados que encontramos en los trabajos de los compañeros, y con los que surgen a medida que desarrollamos el problema. (Registro participación Aula Virtual, 8 de Octubre de 2009, 21:40).*

Erika demuestra comprensión del problema como instrumento pedagógico que revela la gestión del profesor, la cual adquiere sentido para ella a partir de su experiencia como aprendiz. Y la experiencia con el problema la hace entender el objeto matemático como concepto y no como simple contenido de un programa, y el aprendizaje como un proceso de construcción en el cual los conceptos se van dotando de significado, gracias a la contrastación de las ideas propias con las de otros. Con lo que ha dicho en su última intervención y su conclusión de que “*la resolución de problemas es una herramienta para llegar a construir un concepto adecuado, que sea significativo en nuestra formación; por estas razones creo que el profesor Ángel nos plantea estos problemas*” (Registro participación Aula Virtual, 8 de Octubre de 2009, 21:40), Erika demuestra que ha revisado, analizado y reconstruido su propio proceso de aprendizaje y la actuación de su profesor, y los ha convertido en reflexión pedagógica sobre su futuro quehacer, avanzando así, a la par, en su formación matemática y en su formación profesional.

**Viñeta 2. Sobre cómo usan los estudiantes para profesor instrumentos conceptuales y su experiencia como resolutores en el diseño de problemas que permitan a sus futuros estudiantes el aprendizaje de conceptos matemáticos**

Los datos provienen del informe sobre variables didácticas entregado en la sesión 25, por cada uno de los diferentes grupos. Los estudiantes han resuelto el problema de la viga o de la fábrica, han identificado los elementos característicos de la idea de variación procedente del trabajo de la solución de su respectivo problema (variables de la situación, parámetros, relaciones, restricciones, medida de cambio). Han generado un segundo problema teniendo en cuenta estos elementos característicos de la idea de variación y han leído un instrumento conceptual sobre variables didácticas, en el cual se habla del uso del problema para generar

aprendizaje y las modificaciones que un profesor puede hacer de las variables didácticas que se identifican en el problema.

Específicamente uno de los ítemes planteados para la realización del informe contemplaba que los estudiantes identificaran las variables didácticas en el problema resuelto originalmente por ellos, modificaran esas variables didácticas para generar un nuevo problema y resolvieran este nuevo problema. Con relación al ítem *“identifique las variables didácticas presentes en el problema resuelto inicialmente por usted”*, uno de los grupos que resolvió el problema de la viga, G1, presenta tanto aquellos elementos del enunciado que son variables como los que no lo son. Además de identificar estos elementos, presentan una justificación que se basa en predecir las consecuencias de las modificaciones, en el proceso de solución del problema.

*“2.1. ...viga... de sección rectangular: puesto que al cambiar la figura, la fórmula cambia e inmediatamente el proceso de solución será diferente, pues no es lo mismo trabajar por ejemplo área de un rectángulo que la de un triángulo o la de una circunferencia, además los conceptos involucrados son diferentes.*

*2.2. Tronco de madera de forma cilíndrica: si el tronco de madera fuera en una forma diferente, ya no se tendría en cuenta el diámetro, por lo que el proceso de solución sería distinto, además si tronco fuera por ejemplo de forma elíptica la profundidad y forma de la viga sería distinta lo que nos llevaría a trabajar por otro lado la solución del problema.” (Informe variable didáctica G1)*

Al establecer que una de las variables didácticas del problema es la forma rectangular de la sección de la viga porque el proceso de solución al problema cambia al cambiar esta figura geométrica, los estudiantes están escogiendo una variable que puede ser modificada por el profesor y que puede afectar los modos o estrategias de solución que pone en funcionamiento el estudiante (Mescud & De las concepciones a la prácticas pedagógicas, 2009). Esto constituye una indicación de que se están apropiando del instrumento conceptual que les ha sido entregado con anterioridad.

La apropiación del instrumento conceptual también se pone de manifiesto cuando los estudiantes de G1 presentan elementos del problema que no consideran variables didácticas, demostrando que entienden que sólo son variables didácticas aquellos elementos de la situación que se pueden cambiar para provocar en los estudiantes adaptaciones y aprendizajes (Mescud & De las concepciones a la prácticas pedagógicas, 2009).

*“No son variables didácticas del problema, pero es importante mencionarlas para la construcción del nuevo problema:*

*$\phi$  como variable: no la consideramos una variable didáctica, ya que si  $\phi$  hubiese sido número fijo el problema no hubiera cambiado.*

*$R = a \cdot h^2$ ; las fórmulas, son unos elementos de aplicación, dada la sección aplicar tal fórmula .*

*Además dependiendo de la figura la fórmula cambia entonces ésta por si sola no es una variable didáctica” (Informe variables didácticas, G1).*

Cuando plantean en el informe el nuevo problema obtenido a partir de las modificaciones de las variables del problema inicial, los integrantes de G1 consideran conveniente presentar los cambios que realizaron y predecir dificultades que podrían presentarse en su resolución.

Primera versión del problema nuevo planteado por G1

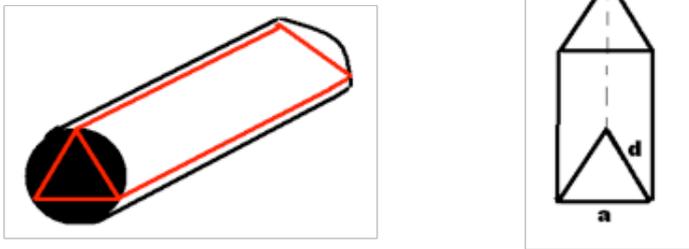


Figura 1. Dibujo elaborado por el grupo para mostrar las características de la viga

*La resistencia de una viga de sección triangular es igual al producto de su ancho  $a$  por el cuadrado de su espesor  $d$ .*

*Se quiere aserrar de un tronco de madera con diámetro  $\xi$  una viga de sección triangular. ¿Calcular la viga de mayor resistencia?*

*A partir de la solución que comenzamos a realizar nos dimos cuenta que se podían presentar demasiados números de triángulos, por lo que se decidió precisar que el triángulo deseado era isósceles. Al comenzar de nuevo, se propuso que partiendo del rectángulo de la viga de mayor resistencia, se construyera un triángulo isósceles formado sobre él. Por lo que nuestro problema quedo de la siguiente manera:*

Segunda versión del problema nuevo planteado por G1

*La resistencia de una viga de sección triangular es igual al producto de su ancho  $a$  por el cuadrado de su espesor  $d$ . Teniendo en cuenta la viga de sección rectangular de mayor resistencia, construir la viga de sección triangular (isósceles) y determinar si guarda proporción o relación su máxima resistencia con la del rectángulo. (Informe variables didácticas, G1).*

El nuevo problema planteado por los integrantes de G1 tiene en cuenta sus consideraciones sobre la naturaleza de las variables didácticas del problema original. Esto es, el grupo modifica la forma de la viga de rectangular, que era en el problema original, a triangular, de modo que el resolutor deba obtener fórmulas diferentes a las obtenidas en el problema inicial y deba trabajar con otras relaciones que se establecen para el nuevo problema. Las dificultades que el grupo predice se originan en los múltiples tipos de triángulos que podrían considerarse para establecer un camino de solución. Demuestran así los integrantes de G1 comprender que son precisamente las modificaciones a las variables didácticas las que obligan a quien se enfrenta al nuevo problema a utilizar estrategias de solución diferentes, de modo que logre aprendizajes también diferentes. De nuevo, este ejercicio de diseño pone de presente la apropiación que están realizando los integrantes del grupo G1 de la información teórica sobre variables didácticas que aparece en el instrumento conceptual puesto a su disposición.

El grupo G1 también demuestra que usa la experiencia conjugada de sus miembros como resolutores de problemas para tomar decisiones sobre el diseño del nuevo problema. Esto se hace explícito cuando modifican el enunciado afirmando que “... a partir de la solución que comenzamos a realizar nos dimos cuenta que se podían presentar demasiados números de triángulos, por lo que se decidió precisar que el triángulo deseado era isósceles.[...]” (Informe variables didácticas, G1). Es precisamente la experiencia de resolución la que permite decidir si una pregunta o un enunciado pueden ser ambiguos con relación a lo que realmente desea un profesor que les suceda a sus estudiantes al trabajar un problema. De esta manera, los elementos del problema y su resolución les permiten a los integrantes de G1 analizar situaciones de la práctica del profesor, como el diseño de un

problema. En otras palabras, para los integrantes de G1 el problema propuesto inicialmente y su resolución cumple con las funciones de instrumento conceptual que habla Llinares (2007).

Los integrantes de G1 presentan en su nuevo problema otra modificación al original, motivada por las dificultades que dicen que tendría el resolutor para entender lo que califican de mala redacción y poca información del enunciado. Esta modificación consiste en agregar a la nueva versión del problema figuras que ilustran el comportamiento tanto de la sección rectangular como de la triangular.

*Al resolver el problema la parte subrayada<sup>2</sup> se decidió modificar por cuestiones de entendimiento y de redacción por lo que quedó:*

*Teniendo en cuenta la viga de sección rectangular de mayor resistencia (ver figura 1), determinar la relación que guarda la máxima resistencia de la viga triangular (figura 2) con la viga de sección rectangular. (Informe variables didácticas, G1)*

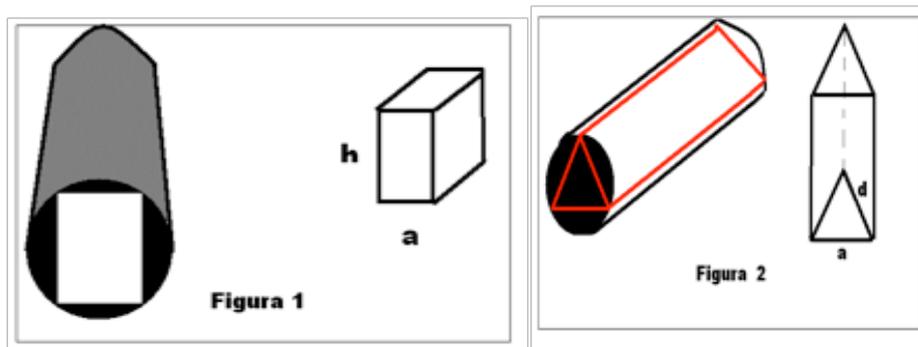


Figura 2. Dibujo presentado por el grupo G1 para la segunda versión del problema

Al presentar la justificación de los cambios realizados para lograr el nuevo problema, el grupo G1 acude nuevamente a su experiencia como resolutores de problemas matemáticos. Esa experiencia se caracteriza por el uso de otros instrumentos conceptuales como el concepto de derivada, de variación, de razón de cambio y la gestión del profesor. Así como el uso de tablas y en ese caso particular, las soluciones dadas al problema de la Viga y las del nuevo problema. El cambio que consideran conveniente para su nuevo problema se basa en su experiencia como resolutores y los instrumentos conceptuales presentados anteriormente, que les permite dar importancia a la información que brinda una representación icónica.

Es decir, son de dos naturalezas los instrumentos que los estudiantes para profesor ponen en juego en el diseño de un problema con clara función pedagógica: su conocimiento matemático y pedagógico, proveniente este último de la comprensión de los conceptos contenidos en el documento sobre variables didácticas; y la propia experiencia como resolutores de problemas, tanto anterior al problema que nos ocupa como aplicada al mismo diseño que realizan que les permitió usar su comprensión de conceptos como el de derivada, de variación, de razón de cambio.

### **Conclusiones**

Al proponernos describir y analizar cómo usan estos estudiantes para profesor los instrumentos conceptuales - matemáticos y didácticos- para interpretar y argumentar el uso de problemas en los entornos de aprendizaje. Encontramos como un primer resultado de nuestra investigación que, al igual que en las investigaciones efectuadas por Llinares, (2002, 2008b),

<sup>2</sup> *Teniendo en cuenta la viga de sección rectangular de mayor resistencia, construir la viga de sección triangular (isósceles) y determinar si guarda proporción o relación su máxima resistencia con la del rectángulo. (Informe variables didácticas, G1).*

el proceso de construcción del conocimiento por parte de los estudiantes para profesor se manifiesta en el uso progresivo de los *instrumentos conceptuales* en las actividades de análisis e interpretación de las situaciones de enseñanza-aprendizaje, y la modificación paulatina en las maneras de participar en los espacios de interacción social constituidos.

Este resultado lo evidenciamos en la primera viñeta, en tanto ilustra cómo cambia gradualmente la participación de nuestra estudiante para profesora en los debates virtuales, pues inicialmente su respuesta a la pregunta planteada está ligada más a su concepción inicial sobre el problema, posteriormente observamos que esta estudiante parece haberse apropiado de elementos teóricos presentes en los instrumentos conceptuales dispuestos por el profesor y relacionados con la concepción de resolución de problemas como ambiente de aprendizaje dada la importancia que ella atribuye a las características de los problemas y de las preguntas que incluyen. Finalmente evidenciamos en la última intervención de esta estudiante demuestra que ha revisado, analizado y reconstruido su propio proceso de aprendizaje, la actuación de su profesor y los instrumentos conceptuales dispuestos en el curso, y los ha convertido en reflexión pedagógica sobre su futuro quehacer, avanzando así, a la par, en su formación matemática y en su formación profesional.

Un segundo resultado que obtenemos en nuestra investigación es que los estudiantes para profesor usan la experiencia como resolutores de problemas para tomar decisiones sobre el diseño del nuevo problema. Esto es, utilizan la resolución de problemas y el problema para interpretar una situación de la práctica del profesor, que les condiciona lo ven y cómo lo ven. En otras palabras, nuestros estudiantes usan la resolución de problemas y el problema como instrumento conceptual. Esto hecho se hace explícito en la segunda viñeta cuando presentamos que los estudiantes para profesor deciden modificar el enunciado de un problema porque su experiencia como resolutores de problemas matemáticos les permite decidir si una pregunta o un enunciado pueden ser ambiguos con relación a lo que realmente desea un profesor que les suceda a sus estudiantes al trabajar un problema.

Ahora bien, en nuestro caso cuando el estudiante utiliza el problema y la resolución de problemas como instrumento conceptual en realidad está involucrando todos los instrumentos conceptuales de los que se apropiaron en esa actividad de resolver problemas, a saber; la variación, la derivada, las variables didácticas, las diferentes representaciones. Así mismo, vinculan los instrumentos técnicos de los cuales hicieron uso en esta actividad, como son el software de geometría dinámica, los libros de cálculo y de programación lineal, las calculadoras, el cuaderno del resolutor y el aula virtual. En otras palabras, un resultado más de nuestra investigación es que los estudiantes para profesor usaron todos los instrumentos conceptuales y técnicos a su disposición para diseñar problemas que le permitieran a otros aprender y para reflexionar y analizar su propia práctica, la de sus compañeros y la del profesor en el contexto de la clase.

### **Referencias Bibliográficas**

- Collins, A. M.; Greeno, J. G. & Resnick, L. B. (1996) "Cognition and learning". En D. Berliner & R. Calfee (Eds.) *Handbook of educational psychology* New York: Macmillan pp.15-46.
- García, M. (2003) A Formação Inicial de Professores de Matematica: Fundamentos para a Definição de Um Currículo. In: Formação de Professores de Matematica. *Explorando Novos Caminhos Com Outros Olhares. Campinas, Sp, Brasil. Mercado de Letras, pp.51-86.*
- García, M. (2000) El aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas desde la naturaleza situada de la cognición. Implicaciones para la formación inicial de maestros (55-79). En C. Corral & E. Zurbano (eds.) *Propuestas metodológicas y de evaluación en la formación Inicial de los profesores desde el área de Didáctica de la Matemática*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo: Oviedo

- García, M. y Sánchez, V. (2002). Una propuesta de formación de maestros desde la educación matemática. Adoptando una perspectiva situada. En L.C. Contreras & Blanco (eds) *Aportaciones a la formación inicial de profesores en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 59-89). Servicio de publicaciones de la Universidad de Extremadura: Cáceres.
- García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*. No 2, Vol. 11. pp 267- 296. México.
- Gavilán, J., García, M., & Llinares, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial de los estudiantes. *Educación matemática* , 19 (002), 5-39.
- Herbst, P. & Chazan, D. (2003). *Exploring the practical Rationality of mathematics Teaching Through Converstions about Videotaped episodes: The Case of Engaging Students in Proving*. For the learning of Mathematics, 23 (1); 2-14.
- Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID-Universidad de Sevilla.
- \_\_\_\_\_ (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento creencias y contexto en relación a la noción de función. In J.P. da Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazin, & C. Loureiro (eds) *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formacao?* Lisboa Portugal.
- \_\_\_\_\_ (1998) Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y porcesos de formación. *UNO Revista didáctica de las Matemáticas*. Granada.
- \_\_\_\_\_ (2002). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs (pp. 195-209). En G.C. Leder; E. Pehkonen, & G. Torner (eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Holanda.
- \_\_\_\_\_ (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en la Educación Primaria. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 18, 36, pp. 93-115.
- \_\_\_\_\_ (2007). *Formación de profesores de Matemáticas*. Desarrollo de entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. JAEM Granada.
- \_\_\_\_\_ (2008a). *Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos e comunicación*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- \_\_\_\_\_ (2008b). Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: Prácticas Sociales y Tecnología. *Evaluación e Investigación*. No. 1. Año 3. pp. 7 – 30
- Putnam, R. & Borko, H. (2000) “What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning?”. *Educational Researcher*, vol. 29, No.1, pp. 4-15
- Sánchez, V. (2003) An approach to collaboration in elementary pre-service Teacher Education (57-68). En Peter-Koop, V. Santos- Wagner, Ch. Breen & A. Begg (eds) *Collaboration in teacher Education. Examples from the contexto f Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.
- Resnick, L.B. (1991) “Shared cognition: Thinking as social practice” En L.B. Resnick, J.M. Levine & S.D. Teasley (Eds.) *Perspectives on socially shared cognition*. Washington, DC, American Psychological Association, pp. 1-20.