ISBN: 978-980-7839-02-0

IGUALDAD DE ÁREAS: VÍNCULO Y ANTECEDENTE ENTRE LA SECCIÓN DEL CONO Y LA CURVA SOBRE EL PLANO

EQUALITY OF AREAS: LINK AND ANTECEDENT BETWEEN THE SECTION OF THE CONE AND THE CURVE ON THE PLANE

Luis Carlos Vargas-Zambrano[1]
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Gisela Montiel-Espinosa[2]
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

RESUMEN

La investigación en Educación Matemática e Historia de la Enseñanza de la Geometría documenta la relevancia del enfoque algebraico en la escuela para la enseñanza de las cónicas, acrecentando la brecha entre la definición de la cónica como sección del cono y el lugar geométrico. Con base en esta problemática se propone una investigación histórica-epistemológica sustentada en la Teoría Socioepistemológica, que reconstruya en términos de prácticas el tránsito entre la sección cónica y la cónica sobre el plano, en el tratado Las Cónicas de Apolonio de Perga; para ello se empleó el constructo metodológico historización y como base del método el Análisis Cualitativo de Contenido. Entre los resultados de investigación se destaca que el síntoma de las cónicas es la propiedad geométrica que efectúa el tránsito en mención, la emergencia de la propiedad es antecedida y acompañada por las prácticas de seccionar, igualar y aplicar áreas.
Palabras clave: Cónicas. Geometría. Apolonio. Síntoma. Prácticas.

ABSTRACT

Research in Mathematics Education and History of Teaching Geometry reports the relevance of the algebraic approach in school for teaching of conics, widening the gap between the definition of the conic as a section of the cone and the geometric locus. Based on this issue, a historical-epistemological research based on the Socio-epistemological Theory, which reconstructs in terms of practices the transition between the conic section and the conic on the plane, in the treatise Apollonius of Perga's Conics; for this purpose, the historization was the methodological way and Qualitative Content Analysis was the basis of the method. Among the research results, it is highlighted that the symptom of the conics is the geometric property that accomplishes the mentioned transit, the emergence of this property is preceded and accompanied by the practices of section, equalized and applicated of areas.
Keywords: Conics. Geometry. Apollonius. Symptom. Practices.

---

[1] Maestro en Ciencias en la Especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav). Profesor de tiempo completo de Matemáticas del Colegio Bilingüe Internacional Gimnasio Campestre Reino Británico (GCRB), Tenjo, Cundinamarca, Colombia. Dirección para correspondencia: Carrera 115D, 65 B-32, Engativá, Bogotá, Cundinamarca, Colombia, 111031. luis.vargas@cinvestav.mx https://orcid.org/0000-0003-3402-2817

[2] Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (Cicata). Investigadora y Coordinadora Académica del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), Ciudad de México, México. Dirección para correspondencia: Av IPN 2508, San Pedro Zacatenco, Gustavo A. Madero, Ciudad de México, México, 07360. gmontiele@cinvestav.mx https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

1. INTRODUCCIÓN

Las tensiones entre la enseñanza moderna y la enseñanza clásica; la oposición entre la enseñanza utilitaria y la enseñanza universal son ejemplificadas por el versus histórico entre la inclusión de la geometría clásica y la geometría analítica en la escuela. Según Barbin (2008; 2012), aunque la escuela europea entre el siglo XIX y XX muestra un ir y venir entre los tratamientos sintético y analítico de las cónicas, terminaría inclinándose por el último, consecuencia de los requerimientos de la formación de profesionales. Este suceso justifica la posición actual de las cónicas en la Educación Media y en particular su papel indiscutible en la geometría analítica.

En este mismo sentido, investigaciones han documentado que la escuela ha privilegiado el enfoque algebraico sobre el geométrico para el caso de las cónicas (Pérez-Moguel, 2018; Salinas y Pulido, 2017; Bartolini Bussi, 2005; Contreras, Contreras y García, 2002). Este fenómeno es consecuencia de la división escolar entre la geometría sintética y la analítica, que, a la hora de su transposición al aula, lleva a la geometría euclidiana a niveles elementales y la analítica a niveles superiores; pues pareciera que la separación cronológica entre Euclides y Apolonio con Descartes haya sido la razón para decidir dicha división (Contreras et al. 2002).

Históricamente en Educación Media o preuniversitaria las cónicas son definidas como: lugar geométrico, ecuación de segundo grado, secciones del cono, y rara vez empleando las esferas de Dandelin (Barbin, 2008; 2012). Para la primera definición son claves los focos y la directriz según sea el caso; para la segunda las características de la discriminante o el valor de los coeficientes; para la tercera una combinación entre geometría plana y del espacio; y para la cuarta la definición de tangencia. Cualquiera de las definiciones elegidas repercutirá en el significado escolar de las cónicas, sin embargo, Bartolini-Bussi (2005) afirma que el significado escolar de las cónicas es una amalgama de residuos de significados históricos provenientes de tiempos y lugares específicos sin ningún vínculo explícito.

Para ejemplificar esta problemática recurrimos a la parábola. En la escuela es común introducir la parábola como sección del cono, después, una tarea matemática habitual es encontrar la ecuación a partir del foco y la directriz, o viceversa; claramente la enseñanza se centra en dar la definición en términos del foco y la directriz, elementos ausentes en la sección del cono (Salinas y Pulido, 2017). Entonces la naturaleza geométrica en la definición de la parábola se limita a (1) una anécdota sobre el corte del cono, y (2) a dotar con un carácter ilustrativo, más que epistemológico, al foco y la directriz.

2. PLANTEAMIENTO

A partir de los resultados de investigación en Historia de la Enseñanza de la Geometría, en particular de las cónicas (Barbin, 2008; 2012; Barbin y Menghini, 2014), se desarrolló un estudio histórico-epistemológico en el marco de una investigación de corte documental, el cual aborda la naturaleza geométrica de las cónicas relativa a la geometría plana y del espacio. En este reporte de investigación se hará énfasis en el tránsito entre la cónica sólida y la cónica plana, pues hay una brecha cada vez más acentuada en la escuela entre la sección del cono y el lugar geométrico, que impacta en la carencia de significado de las ecuaciones canónicas.

Para describir el tránsito entre la definición de la cónica como corte de cono y la curva en el plano, nos preguntamos sobre ¿qué *prácticas* preceden y dirigen el tránsito entre la sección del cono y la cónica sobre el plano?, ¿qué propiedades geométricas de las cónicas emergen al reconstruir estas *acciones* y *actividades*?

3. MARCO TEÓRICO

La revisión de literatura documentó una diversidad de enfoques, tratamientos y contextos de las cónicas, por ende, fue necesario tomar posicionamientos de orden metodológico: en relación con nuestro objeto de estudio —las *prácticas* que norman el tránsito entre la sección cónica y la cónica plana— se eligió el texto original *Las Cónicas de Apolonio de Perga*, en consecuencia es imposible de evadir la vigente discusión en Historia de las Matemáticas sobre la interpretación del tratado geométrico en mención, pues la hipótesis del álgebra geométrica en la Antigua Grecia puede adoptarse o desconocerse en las interpretaciones (ver Fried, 2014 y Blåsjö, 2014).

En el marco de nuestro planteamiento de investigación es inminente la omisión de la hipótesis del álgebra geométrica, de partida asumimos la indiscutible actividad geométrica presente en la obra de Apolonio, la cual es sustento, pero no equivalente, a la actividad algebraica del renacimiento temprano (Fried, 2014; Fried y Unguru, 2001).

Con esto dicho se eligió un marco teórico en Matemática Educativa (ME) cuyos principios teóricos fueran compatibles y coherentes con nuestro posicionamiento metodológico. La Teoría Socioepistemológica (TS), además de su tradición en investigaciones históricas en ME, estudia la construcción social del conocimiento matemático, al hacerlo reconoce que la *racionalidad del individuo o el grupo social que construye el conocimiento es dependiente del contexto*, por lo tanto, la captura de diferentes contextos implica una *pluralidad epistemológica*, que además de diversificar las formas en que se construye el conocimiento matemático hace *plural y progresivo su significado* (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014).

En esta medida, Espinoza y Cantoral (2011) afirman que por cada episodio en la historia E_i habrá un significado S_i asociado, es decir un *contexto de significación.* Este *contexto* agrupa los factores socioculturales dependientes del tiempo y el lugar que impactan en la construcción del conocimiento matemático. Para el estudio de dicho impacto López-Acosta (2019) y Torres-Corrales y Montiel (2019) determinan tres dimensiones del *contexto de significación:* el *contexto cultural* que contiene el *contexto situacional* y el *contexto de situación específica*, este último contenido en el segundo. A grandes rasgos el *contexto cultural* agrupa las concepciones y creencias que distinguen a determinado grupo social (Espinoza y Cantoral, 2011); el *contexto situacional* detalla los factores espacio temporales que inciden sobre determinado saber, por ejemplo, los contextos alrededor de determinados problemas matemáticos; y el *contexto de situación específica* detalla los problemas y soluciones para la emergencia del saber (López-Acosta, 2019). Entonces, este último recrea el punto de quiebre o aquella *práctica* enmarcada en el *contexto cultural* que distingue de otras *prácticas* propias del *contexto situacional* y por ende propicia la construcción de nuevo saber.

La construcción social del conocimiento se describe a través de las *prácticas*, pues la TS al no enfocarse directamente en el objeto matemático, centra su atención en la emergencia de *prácticas* en el nivel de *acción* (*práctica* fruto de la interacción del sujeto con el objeto en el medio), *actividad* (*práctica* deliberada que organiza *acciones* socioculturalmente) y *práctica socialmente compartida* (mediada por el contexto y propia de un grupo humano) (Cantoral et al. 2014; Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015), mismas que acompañan y anteceden la construcción de un conocimiento matemático específico.

En el caso particular de los estudios histórico-epistemológicos de la TS, los niveles de *práctica* son reconstruidos a través del constructo teórico-metodológico: *historización*, el cual es equivalente a un análisis histórico crítico de la epistemología situada de la construcción y constitución del conocimiento matemático, valorando los factores socioculturales que lo hacen posible (Cantoral et al. 2015).

4. MÉTODO

La organización, producción y análisis de los datos se simplifican a continuación en cuatro fases, esta configuración metódica tiene incidencia del Análisis Cualitativo de Contenido, debido a que este tipo de análisis brinda herramientas para el estudio del texto en el marco de su contexto de producción y comunicación.

4.1. Determinación del propósito y texto de análisis

El propósito de análisis está aunado al objeto de estudio expuesto, por lo tanto, nuestro propósito general se encamina a reconstruir teoremas específicos que sean la base de una reflexión sobre la brecha entre el corte del cono y el lugar geométrico en términos de *prácticas*, para una discusión y confrontación con la matemática escolar.

La revisión bibliográfica en Matemática Educativa e Historia de las Matemáticas nos arrojó diez posibles fuentes primarias de datos como muestra el cuadro 1, sin embargo, algunos de los textos han desaparecido, otros corresponden a las primeras interpretaciones algebraicas de las cónicas y sólo uno documenta la naturaleza de estos objetos matemáticos en geometría plana y del espacio: *Las Cónicas de Apolonio de Perga.*

Cuadro 1 – Posibles fuentes primarias de datos

Época	**Obra de**	**Texto**
Clásica y helenística	Menecmo (380 – 320 a. C.)	Se menciona a Menecmo en *Los comentarios de Eutocio al tratado de la Esfera y el Cilindro.*
	Aristeo el Viejo (370 – 300 a. C)	*Tratado sobre lugares sólidos*
	Euclides de Alejandría (325 – 265 a. C.)	*Tratado sobre las cónicas*
	Arquímedes (287 – 212 a. C.)	*Tratado sobre la esfera y el cilindro* *Tratado sobre los conoides y esferoides*
	Apolonio de Perga (262 – 190 a. C.)	*Las Cónicas*
Griego-romana, antigua tardía	Papo de Alejandría (I – II d.C.)	*La Colección Matemática* que incluye comentarios sobre: *lugar en la superficie* de Euclides; *el corte como un radio, el corte como un área, determinar la sección, inclinaciones, lugar plano, Cónicas, lugar sólido,* todos de Apolonio; y *significados* de Eratóstenes.
	Eutocio de Ascalón (VI d.C.)	*Comentarios del tratado sobre la esfera y el cilindro, con la recopilación de 12 soluciones al problema de la duplicación del cubo.* *Comentarios al tratado sobre los conoides y esferoides.* *Comentarios a Las Cónicas.*
Renacentista	Alberto Durero (1471-1528)	*Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidos*
	Johannes Werner (1468-1528)	*Los elementos de las cónicas*
	Germinal Pierre Dandelin (1794 – 1847)	*Esferas de Dandelin*

Fuente: Vargas-Zambrano (2021, p. 150)

4.2. Recolección, selección y organización de fuentes de datos

Dada la elección del texto de análisis, con base en Wardhaugh (2010), se clasificaron las fuentes en primarias, secundarias y terciarias conforme a qué tan cercanas o lejanas se encuentran del documento original. Esto fortalece los mecanismos de legitimidad y validación de los resultados de investigación y da coherencia a la discusión con la literatura. En suma, ordena nuestros argumentos simplificando fenómenos propios de los estudios históricos como: la falacia del presentismo, el excesivo *internalismo,* el *whiggismo* y lo que hemos denominado el excesivo externalismo; también no flexibiliza y da rigurosidad a las afirmaciones respecto a cómo se construyeron las matemáticas del pasado.

El cuadro 2 muestra siete fuentes de datos provenientes de un conjunto mayor de documentos, pero que son las necesarias para esta comunicación. Las primarias corresponden a traducciones al latín, inglés y al español respectivamente, las secundarias son interpretaciones geométricas y la terciaria es una discusión filosófica sobre uno de los textos de Kant donde documenta su análisis de las primeras proposiciones del tratado *Las Cónicas.*

Cuadro 2 – Selección y organización de fuentes de datos.

Fuente	**Título**	**Traductor(a) / Autor(a)**
Primaria	*Conicorum*	Federicus Commandinus
	Apollonius of Perga Conics: Books I-IV	R. Catesby Taliaferro y Michael N. Fried
	Elementos I	María Luisa Puertas
Secundaria	*Apollonius of Perga's Conics. Text, Context, Subtext*	Michel N. Fried y Sabetai Unguru
	Científicos Griegos II	Francisco Vera
	A history of the conic sections and quadric surfaces	Julian Coolidge
Terciaria	*Kant on conics*	Alison Laywine

Fuente: Vargas-Zambrano (2021, p. 163)

4.3.Preanálisis de los datos

El término preanálisis proviene del Análisis Cualitativo de Contenido. Este tipo de análisis dirige la organización de unidades de análisis, categorías, planteamiento de indicadores y codificación a partir del análisis del texto (Kuckartz, 2019), para lograrlo fue necesario llevar a cabo una familiarización con el contexto y el texto.

Dicha familiarización comprende la lectura reiterada del documento original, la demostración de una serie de proposiciones seleccionadas, la construcción de glosarios, entre otros procesos. Por otro lado, se documentan los factores contextuales relevantes que impactan directamente en la construcción de las cónicas en la Antigua Grecia.

Según el Análisis Cualitativo de Contenido se consolidan una serie de teoremas que actúan como unidades de análisis, entre ellas las agrupadas en el cuadro 3.

El género del documento es el habitual del tratado geométrico de la Antigua Grecia, de la estructura más general: el tratado. A la estructura más pequeña: la proposición, la cual puede ser teorema o problema de construcción. De la misma manera la proposición es un mini-género que se divide para este caso en: enunciado, exposición, especificación, demostración, construcción y conclusión. A partir de lo anterior los datos verbales para analizar provienen de la estructura o mini-género en mención y los datos visuales de la construcción en particular, como indica el Análisis Cualitativo de Contenido.

Cuadro 3 – Unidades de análisis a partir del Análisis Cualitativo de Contenido.

Fuente primaria	Libro	Unidad de análisis
Elementos I	III	Proposición 35: una propiedad del círculo
Apollonius of Perga Conics: Books I-IV	I	Proposición 4: sección circular
		Proposición 5: sección subcontraria
		Proposición 11: parábola
		Proposición 12: hipérbola
		Proposición 13: elipse

Fuente: Elaboración propia.

5. RESULTADOS

Este apartado ejemplifica y sintetiza el análisis de los datos perfilando los resultados en términos de *prácticas* y discutiendo con la literatura; para ello se toma la proposición 12 del libro I de *Las Cónicas* correspondiente a la hipérbola de una rama (para más detalles se recomienda ver Vargas-Zambrano, 2021).

5.1. Análisis

La *historización* que se expone hace la reconstrucción del teorema en términos de *prácticas* en el marco del *contexto de significación. Apollonius* (ca. 200 A. E. C./2013) citado y traducido por Vargas-Zambrano (2021) afirma:

> **Enunciado:** Si un cono es **cortado** por un plano a través del eje, y si el cono es también **cortado** por otro plano que corte a la base por una recta perpendicular a la base del triángulo según el eje, y si el diámetro de la <u>sección</u> prolongado encuentra un lado del <u>triángulo</u> en el eje más allá del vértice del cono, y si cualquier línea recta es dibujada de la <u>sección</u> a su diámetro de tal manera que la línea recta es paralela a la <u>sección común</u> del plano cortado y la base del cono, entonces esta línea recta al diámetro igualará en cuadrado algún **área aplicada** a una línea recta [el parámetro] (a la que la línea recta que se añade a lo largo del diámetro de la sección a la que la línea recta que se añade a lo largo del diámetro de la sección —de tal manera que esta línea recta añadida subtiende el ángulo exterior del triángulo [vértice del axial]— tiene la misma proporción que el cuadrado de la línea recta hacia abajo— paralela al diámetro de la sección— del vértice del cono a la base del triángulo tiene el rectángulo contenido por la secciones de la base que esta línea recta desde el vértice hace cuando se dibuja), de tal manera que esa **área aplicada** (que tiene como amplitud la línea recta sobre el diámetro de la sección del vértice donde el diámetro es cortado por la línea recta trazada desde la sección al diámetro) proyectada más allá por una figura, similar y similarmente situada al rectángulo contenido por la línea subtendida al exterior del vértice del triángulo en el eje y por el parámetro. Y que dicha sección se llame <u>hipérbola</u>. (pp. 21-22, énfasis añadido)

Para comprender el enunciado de la proposición es necesario establecer una premisa: Apolonio de Perga experimentó con un cono concreto para definir las primeras propiedades de las cónicas, pues el cono era un sólido bastante interesante para los griegos (Fried y Unguru, 2001), además contaba con su propia definición sustentada en las convenciones de la geometría plana y la creciente geometría del espacio. En suma, la estrategia del Gran Geómetra tiene que ver con la tradición griega de utilizar recursos materiales para la solución de problemas geométricos antiguos, entre ellos la duplicación del cubo, *contexto situacional* clave para la emergencia de las cónicas (Vargas-Zambrano, 2021).

El enunciado siempre da un panorama en concreto de todo lo que se pone en juego dentro de la proposición. En el caso de *Las Cónicas*, sus proposiciones son una descripción de un diagrama (Fried y Unguru, 2001), por ende, el diagrama es consecuencia de las *acciones* concretas en el espacio que pueden ser reconstruidas gracias a las evidencias tanto textuales como contextuales. La *práctica* de *cortar* o *seccionar* antecede al triángulo axial y a la hipérbola como veremos en el siguiente apartado:

> **Exposición:** Dejar que un cono cuyo vértice es el punto A y cuya base es el círculo BC, y dejar que este sea cortado por un plano a través del eje, y dejar que este haga la sección triangular ABC [I. 3]. Y dejar que el cono también sea cortado por otro plano que corta la base del cono en la línea recta DE perpendicular a BC, la base del triángulo ABC, y dejar que este segundo plano cortado haga una sección sobre la superficie del cono la línea DFE, y dejar que el diámetro de la sección FG [I. 7 y Def. 4] cuando se prolonga y encuentra AC un lado del triángulo ABC más allá del vértice del cono en el punto H. Y dejar que la línea recta AK sea dibujada a través de A paralela al diámetro de la sección FG, y que corte BC. Y dejar que la línea FL sea dibujada desde F perpendicular a FG, y dejar que sea ideado que:
>
> $$cuadrado\ KA : rectángulo\ BK, KC :: FH : FL$$
>
> Y dejar que algún punto M sea tomado aleatoriamente sobre la sección, y a través de M dejar que la línea MN sea dibujada paralela a DE, y a través de N dejar que la línea recta NOX sea dibujada paralela a FL. Y dejar que la línea recta HL sea unida y prolongada a X, y dejar que la línea recta LO y XP sea dibujada a través de L y X paralelas a FN. (*Apollonius*, ca. 200 A. E. C./2013, p. 22)

Las cónicas emergen en la proposición 7 del libro I de *Las Cónicas*, son consecuencia de la *actividad matemática* de *seccionar* o *cortar*, por ende, las proposiciones donde aparecen los términos *parábola*, *hipérbola* y *elipse* vienen acompañadas además de la caracterización del corte, de una propiedad fundamental para cada una de ellas: el *síntoma*.

El *síntoma* corresponde a la igualdad de áreas, entonces el área del cuadrado construido a partir de la ordenada MN es igual al área del rectángulo construido con el diámetro FN y el segmento XN, el cual excede el lado recto FL. De los cuatro segmentos que se relacionan en esta proporción, MN y FN, la ordenada y el diámetro respectivamente, son fruto de la *práctica* de *seccionar* o *cortar*. El lado recto FL proviene de una construcción auxiliar con regla y compás que cumple la siguiente condición:

$$cuadrado\ KA : rectángulo\ BK, KC :: FH : FL$$

Aunque Apolonio da por bien sabida la construcción y no demuestra la proporción, es en los comentarios de Eutocio de Ascalón donde se justifica una parte de la construcción del lado recto. El geómetra de la Época Romana afirma que es necesario construir un rectángulo dada su altura, con igual área a un cuadrado dado (Vera, 1970). Con base en este comentario de Eutocio se recurrió a la proposición 35 del libro III de Euclides para construir el lado recto o el parámetro. Ya con el parámetro se encuadra lo que se pretende demostrar:

Especificación: "Yo digo que MN es igual en cuadrado al paralelogramo FX el cual es aplicado a FL, teniendo FN como amplitud, proyectando más allá por una figura LX similar al rectángulo contenido por HF y FL" (*Apollonius*, ca. 200 A. E. C./2013, p. 22). Así como la *actividad matemática* de la proposición 7 es *seccionar* o *cortar* para definir tres secciones trasversales (cónicas) diferentes que se pueden hacer sobre el cono; la *actividad matemática* de las proposiciones 11, 12 y 13 es *aplicar áreas* para definir el *síntoma* de cada una de las secciones trasversales ya establecidas. Ambas *actividades* responden a la pregunta: ¿para qué Apolonio hace determinadas *acciones*? Similar a la pregunta metodológica propuesta por Cantoral et al. (2015) para caracterizar la *práctica* en el nivel de *actividad.*

Demostración: Por la línea recta RNS sea dibujada a través de N paralela a BC; y NS es también paralela a DE. Por lo tanto, el plano a través de MN y RS es paralelo al plano a través de BC y DE, esta es a la base del cono [Eucl. XI. 15]. Por lo tanto, si el plano es prolongado a través de MN y RS, la sección será un círculo cuyo diámetro será la línea recta RNS [I. 4]. Y MN es perpendicular a esta. Por lo tanto:

$$rectángulo\ RN, NS = cuadrado\ MN$$

Y desde

$$cuadrado\ AK : rectángulo\ BK, KC :: FH : FL,$$

Y

$$cuadrado\ AK : rectángulo\ BK, KC :: AK : KC\ comp. AK : KB$$ [Eucl. VI. 23]

Por lo tanto, también

$$HF : FL :: AK : KC\ comp. AK : KB$$

Pero

$$AK : KC :: HG : GC :: HN : NS$$ [Eucl. VI. 4],

Y

$$AK : KB :: FG : GB :: FN : NR$$

Por lo tanto

$$HF : FL :: HN : NS\ comp. FN : NR$$

Y

$rectángulo\ HN, NF : rectángulo\ SN, NR :: HN : NS\ comp. FN : NR$ [Eucl.VI. 23]

Por lo tanto, también

$rectángulo\ HN, NF : rectángulo\ SN, NR :: HF : FL :: HN : NX$ [Eucl. VI. 4]

Pero con la línea recta FN tomada con altura común,

$HN : NX :: rectángulo\ HN, NF : rectángulo\ FN, NX$ [Eucl. VI. 1]

Por lo tanto, también

$rectángulo\ HN, NF : rectángulo\ SN, NR :: rectángulo\ HN, NF : rectángulo\ XN, NF$ [Eucl. VI. 11]

Por lo tanto

$rectángulo\ SN, NR :: rectángulo\ XN, NF$ [Eucl. VI. 9]

Pero esto fue demostrado

$cuadrado\ MN = rectángulo\ SN, NR$

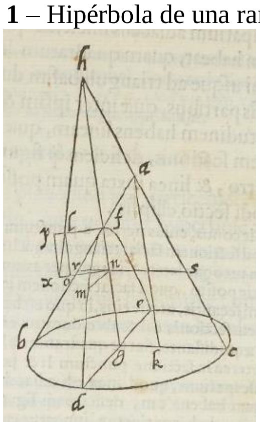
Por lo tanto, también

$cuadrado\ MN = rectángulo\ XN, NF$. (*Apollonius*, ca. 200 A. E. C./2013, pp. 22-23).

A partir del lado recto se efectúa *práctica socialmente compartida* de *aplicar áreas*, pues esta se encuentra presente en la obra de otros geómetras de la Antigua Grecia. Dado que los niveles de *práctica* son anidados, la *aplicación de áreas* es una *acción* concreta del sujeto en el espacio bidimensional empleando regla y compás, que por su puesto trasciende a la *actividad matemática.* Para definir el *síntoma*, el $rectángulo\ FL, FN$ no es suficiente para ser equivalente al $cuadrado\ MN$, por lo tanto, la razón entre el lado transverso FH y el lado recto FL es clave para definir una nueva proporción: $PL : FN :: FL : FH$, consecuencia de definir dos rectángulos semejantes a partir de su diagonal.

Construcción:

Figura 1 – Hipérbola de una rama



Fuente: *Apollonii* (ca. 200 A. E. C./1566, p. 43)

El dato visual corrobora las diversas proporciones que se pueden establecer para la definición del *síntoma* con base en la construcción del lado recto. Además, posiciona a la *práctica* de *seccionar* al nivel de la *práctica* del uso de la regla y el compás para la construcción de lugares geométricos planos. Si bien, *seccionar* y *cortar* podría categorizarse dentro de una *práctica socialmente compartida* por la tradición clásica de Menecmo, no obstante, es necesario documentar y analizar esas construcciones de otros objetos geométricos a partir del *seccionado.* Las *prácticas* de *seccionar* y *aplicar áreas* toman protagonismo en el siguiente apartado, cuando el *síntoma* de las cónicas se expresa como una *igualdad de áreas* que involucra la suma de rectángulos:

> **Conclusión:** Pero el rectángulo contenido por XN y NF es el paralelogramo XF. Por lo tanto, la línea recta MN es igual en cuadrado a XF la cual es aplicada a la línea recta FL, teniendo a FN como amplitud, y proyectando más allá por el paralelogramo LX similar al rectángulo contenido por HF y FL [Eucl. VI. 24].
> Y dejar que tal sección sea llamada una hipérbola, y dejar LF sea llamada la línea recta a la cual las líneas trazadas ordenadamente a FG son aplicadas en cuadrado; y dejar la misma línea recta sea llamada el lado recto, y la línea recta FH el lado transverso. (*Apollonius,* ca. 200 A. E. C./2013, p. 23).

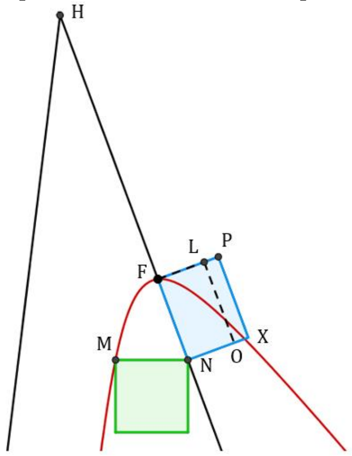
El dato verbal de la conclusión puede escribirse de la siguiente forma y sería insumo para subsanar la brecha entre la sección del cono y la definición de la cónica como lugar geométrico, e incluso su paso al enfoque algebraico.

$$MN^2 = FL \cdot NF + \frac{FL \cdot NF^2}{FH}$$

5.2. Discusión y reflexiones finales

El *síntoma* de las cónicas es la propiedad que permite el paso entre la sección del cono y la curva sobre el plano: esta propiedad vive en la geometría plana y del espacio (ver figura 1 y 2). Después de demostrar el *síntoma*, las curvas existen sobre el plano y es esta propiedad fundamental la herramienta para distinguirlas y potenciar otras propiedades de cada una de ellas.

Figura 2 – Hipérbola de una rama en el plano y su *síntoma*



Fuente: Vargas-Zambrano (2021, p. 282)

Es de considerar que no pasa desapercibida la ausencia del foco dada su relevancia en la Historia de la Enseñanza de las Cónicas, seguro la propiedad de las equidistancias no fue el interés genuino de los geómetras griegos, dando por hecho que la ausencia del foco en

Las Cónicas no se debe precisamente a desconocimiento de Apolonio, más bien hay otra propiedad proveniente del círculo que puede ser extendida a las cónicas, como menciona Kant en su obra (Laywine, 2014).

Aunque por herencia de Platón a la civilización griega el círculo no es una cónica porque puede ser construido con compás; la proposición 35 del libro III de los *Elementos* se refleja en las proposiciones 11, 12 y 13 de *Las Cónicas* donde se demuestra el *síntoma* de la *parábola,* la *hipérbola* y la *elipse* respectivamente, tal como se aprecia aquí:

"Si en un círculo se cortan dos rectas entre sí, el rectángulo comprendido por los segmentos de una es igual al rectángulo comprendido por los segmentos de la otra" (Euclides, ca. 300 A. E. C./2007, p. 149). La *actividad, igualar áreas,* en los *Elementos* es similar a la *actividad* que define el *síntoma* de las cónicas, entonces estaríamos vislumbrando lo que se podría denominar el *síntoma* del círculo.

Esta similitud o relación se mantuvo desde la solución de Menecmo al problema de la duplicación del cubo empleando conos rectos, y antes que nada es por medio de esta propiedad del círculo que se demuestra que la sección paralela a la base del cono circular recto u oblicuo es un círculo (proposición 4), y que la sección subcontraria (proposición 5) también lo es, pues las cuerdas necesarias para su demostración son construidas a partir de la *práctica* de *seccionar.*

Si bien el *contexto de situación específica* se enmarca en la innovadora idea de Apolonio de utilizar el cono oblicuo, es el uso de la proposición 35 del libro III de los *Elementos* la que compagina la teoría de seccionado de la Época Clásica atribuida a Menecmo, con la teoría de seccionado de la Época Helenística de Apolonio.

Lo anterior además de considerar al círculo como una cónica por derecho propio, valora la posición del *síntoma* como el eslabón entre la sección del cono y el lugar geométrico, perfilando esta propiedad como un nuevo paradigma en la Historia de la Enseñanza de las Cónicas que ha pasado inadvertido.

Según Laywine (2014) para Kant la presencia de esta propiedad en cada una de las cónicas —incluido el círculo— no es simple coincidencia; los griegos desde la Academia de Platón estaban bastante familiarizados con la proposición 35 del libro III de los *Elementos* (Coolidge, 1968). Entonces, tal cual como relata Laywine (2014) sobre las apreciaciones de Kant y a su vez se percibe en la base epistemológica de la investigación de Vargas-Zambrano (2021), la riqueza del *síntoma* de las cónicas se aprecia cuando se problematiza la naturaleza geométrica de estos objetos matemáticos, en estrecha relación con el espacio, siendo este un elemento subjetivo dependiente de la interacción sensible manifiesta en la reconstrucción de las *acciones* de los sujetos.

6. CONCLUSIONES

Las *acciones* como *seccionar*, *igualar áreas* y *aplicar áreas* trascienden de la experimentación concreta en el medio relativo a la geometría plana y del espacio a *prácticas socialmente compartidas*, no obstante, este resultado de investigación sólo se hace visible en este documento para la *práctica* de *igualar áreas*, para las otras es necesario recabar datos de otros manuscritos.

Las *prácticas* de *igualar áreas* y *aplicar áreas* anteceden y acompañan el *síntoma*, propiedad de las cónicas que permite distinguirlas en el plano, después de ser definidas como secciones del cono.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apollonii. (1566). *Conicorum* (F. Commandinus, Trans.). Bononiae, Ex Officina Alexandri Benatii. (Original published opus ca. 200 B.C.E.)

Apollonius. (2013). *Conics: Books I-IV* (R. C. Taliaferro & M. N. Fried, Trans.). Santa Fe, United States: Green Lion Press. (Original work published ca. 200 B.C.E.)

Barbin, E. (2008). Perennial notions and their teaching. In E. Barbin, N. Stehliková & C. Tzanakis (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the fifth European Summer University* (pp. 157-161). Pilzen: Vydavatelský servis.

Barbin, E. (2012). Teaching of conics in 19th and 20th centuries in France: on the conditions of changing (1854–1997). In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, J. Matos & G. Schubring (Eds.), *Proceedings of the second International on the History of Mathematics Education* (pp. 44-59). Lisbon: Universidade Nova.

Barbin, E., & Menghini, M. (2014). History of Teaching Geometry. In A. Karp & G. Schubring (Eds), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 473-492). New York, United States: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_23

Bartolini Bussi, M. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 39-60). New York, United States: Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_4

Blåsjö, V. (2014). A Critique of the Modern Consensus in the Historiography of Mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics,* 4(2), 113-123. https://doi.org/10.5642/jhummath.201402.12

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 8, 9-28.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.

Contreras, A., Contreras, M. y García, M. (2002). Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 5(2), 111-132.

Coolidge, J. (1968). *A history of the conic sections and quadric surfaces.* New York, United States: Dover Publications, Inc.

Espinoza, L., y Cantoral, R. (2011). Una caracterización de los contextos de significación desde la Socioepistemología. En P. Lestón, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25* (pp. 889-896). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Euclides. (2007). *Elementos I* (M. L. Puertas, Trad.). Madrid, España: Gredos. (Trabajo original publicado ca. 300 a.C.)

Fried, M., & Unguru, S. (2001). *Apollonius of Perga's Conica. Text, Context, Subtext.* Leiden, Netherlands: Brill.

Fried, M. (2014). The Discipline of History and the "Modern Consensus in the Historiography of Mathematics". *Journal of Humanistic Mathematics,* 4(2), 124-136. https://doi.org/10.5642/jhummath.201402.13

Kuckartz, U. (2019). Qualitative Text Analysis: A Systematic Approach. In G. Kaiser y N. Presmeg (Eds), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs,* (181-197). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_8

Laywine, A. (2014). Kant on conics. *Canadian Journal of Philosophy*, 44(5-6), 719-758. http://dx.doi.org/10.1080/00455091.2014.977835

López-Acosta, L. (2019). *Un acercamiento epistemológico y lingüístico para el estudio del Pensamiento y Lenguaje Algebraico. El caso del Análisis Algebraico de Viète y Descartes* (Memoria predoctoral no publicada). Cinvestav-IPN, Ciudad de México.

Pérez-Moguel, Z. (2018). *Una problematización de la parábola en su construcción geométrica* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav-IPN, Ciudad de México. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.11263.51368

Salinas, P., & Pulido, R. (2017). Understanding the Conics through Augmented Reality. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education,* 13(2), 341-354. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00620a

Torres-Corrales, D., & Montiel, G. (2019). Characterization of uses of trigonometric notions in Mechatronics Engineering from Mathematics Education. *ECORFAN Journal Spain,* 6(10), 9-21. http://doi:10.35429/EJS.2019.10.6.9.21

Vargas-Zambrano, L. C. (2021). *Un Estudio Histórico-Epistemológico sobre la Construcción Social de las Secciones Cónicas en Geometría del Espacio* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav-IPN, Ciudad de México. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.19308.69767

Vera, F. (1970). *Científicos Griegos II*. Madrid, España: Aguilar.

Wardhaugh, B. (2010). *How to read Historical Mathematics.* New Jersey, United States: Princeton University Press.