



ISBN: 978-980-7839-02-0



APLICACIONES DE LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN LOS LIBROS DE TEXTO DE LA ESPAÑA DEL SIGLO XVIII

APPLICATIONS OF THE PROBLEMS OF OPTIMIZATION IN THE TEXTBOOKS OF THE SPAIN OF THE XVIII CENTURY

José Carlos Casas-Rosal¹
Universidad de Córdoba

Carmen León-Mantero²
Universidad de Córdoba

María José Madrid³
Universidad Pontificia de Salamanca

RESUMEN

El análisis histórico de libros de texto antiguos de matemáticas permite identificar la manera en la que los avances científicos conocidos hasta el momento se han ido incorporando como partes de los contenidos de currículo académico. En concreto en este trabajo se analizan las aplicaciones sobre el método de máximos y mínimos incluidos en los libros de texto publicados durante el siglo XVIII en España centrandó nuestra atención en el enfoque del algoritmo usado, en el propio enunciado o en la verificación de la naturaleza de los puntos obtenidos. Los resultados nos muestran la influencia que los libros de texto de referencia a nivel europeo tuvieron en los españoles, dos enfoques diferentes a la hora de plantear las condiciones suficientes y necesarias del algoritmo, la consideración o no de las soluciones negativas en el proceso de resolución.

Palabras clave: Siglo XVIII, libros de texto, problemas de máximos y mínimos, cálculo diferencial.

ABSTRACT

The historical analysis of old mathematics textbooks makes it possible to identify the way in which the scientific advances known to date have been incorporated as part of the content of the academic curriculum. Specifically, this work analyzes the applications of the method of maxima and minima included in the textbooks published during the 18th century in Spain, focusing our attention on the approach of the algorithm used, on the statement itself or on the verification of nature. of the points obtained. The results show us the influence that the reference textbooks at the European level had on the Spanish, two different approaches when proposing the sufficient and necessary conditions of the algorithm, the consideration or not of negative solutions in the resolution process.

Keywords: 18th century, textbooks, maxima and minima problems, differential calculus

¹ Doctor por la Universidad de Córdoba (UCO). Profesor ayudante doctor de la Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. Calle San Alberto Magno, s/n, 14071. jcasas@uco.es

² Doctora por la Universidad de Córdoba (UCO). Profesora ayudante doctora de la Universidad de Córdoba (UCO), Córdoba, España. Calle San Alberto Magno, s/n, 14071. cmleon@uco.es.

³ Doctora por la Universidad de Salamanca (USAL). Profesora contratada doctora de la Universidad Pontificia de Salamanca (UPSA), Salamanca, España. C/ Henry Collet, 52-70, 37007. mjmadridma@upsa.es

INTRODUCCIÓN

Entre las temáticas enmarcadas en la línea de investigación sobre Historia de la educación matemática podemos encontrar aquellas que usan al libro de texto como fuente documental. Estas tienen entre sus objetivos la identificación de los principios y estrategias didácticas que los autores defendían en sus textos, el tratamiento matemático y didáctico dado a conceptos o estructuras matemáticas, sus propósitos, metas y destinatarios, las obras o autores de referencia que les sirvieron de inspiración, etc. Debido a que el libro de texto constituía hasta hace poco la principal fuente de información y difusión de conocimientos para estudiantes y docentes, su análisis nos permite sacar a luz numerosos aspectos sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje. En concreto nos descubre la evolución a lo largo de la historia de los conocimientos matemáticos, la influencia del contexto histórico, social y cultural y cómo los conocimientos sobre matemáticas han sido incorporados a la enseñanza de la materia (Maz-Machado y Rico, 2015; Karp, 2014).

Entre las investigaciones que centran su atención en el análisis de libros de texto históricos a nivel internacional podemos encontrar la abordada por Ageron y Hedfib (2020) en la que se analiza un tratado árabe de aritmética del siglo XVI y se identifican influencias de los tratados españoles de Marco Aurel y Juan de Ortega o el trabajo de Christianidisa y Megremi (2019) en la que se examina cómo la *Arithmetica* de Diofanto influyó en los textos de matemáticas escritos hasta principios de la Edad Media.

A nivel nacional destacan las investigaciones realizadas por Puig (1994) en la que se analiza el sistema de signos matemáticos en el texto de Jordanus Nemorarius *De Numeris Datis*; el trabajo de Sanz y Gómez (2018) en el que se describe un tipo de problemas clásico descriptivo de fracciones presentes en los libros de texto históricos o el de Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2021) que centra su atención en las notas al pie en la *Aritmética* (1884) de los coroneles Salinas y Benítez. También el trabajo de Madrid, López-Esteban y Jiménez-Fanjul (2020) en el que se identifican las estrategias didácticas usadas en tres libros de texto usados para enseñar matemáticas en la Academia de Guardiamarinas de Cádiz; el de Sánchez Sierra y González Astudillo (2020) que examina la Geometría analítica en el *Curso de Matemáticas Puras* (1829) de José de Odriozola o el trabajo de León-Mantero, Maz-Machado y Madrid (2021) en el que se analiza el *Tratado de Álgebra elemental* de Juan Cortázar, uno de los libros de texto más relevantes para la enseñanza de las matemáticas en secundaria durante el siglo XIX español.

El objetivo del presente trabajo es analizar las aplicaciones, sobre el método para calcular máximos y mínimos de una función, incluidas en los libros de texto que abordan contenidos de cálculo diferencial publicados en España durante el siglo XVIII. En primer lugar, identificaremos el enfoque que impregna el algoritmo de resolución de estos problemas, para después comparar dos de los ejemplos que se plantean de manera similar en varios de los libros de texto y analizaremos aspectos como el enunciado, la aplicación de las condiciones necesarias y suficientes y los propios valores obtenidos.

Las primeras instituciones que implementaron planes de estudio que incluían contenidos de cálculo infinitesimal en España fueron religiosas y militares. Entre ellas se encontraban El Real Seminario de Nobles, el Colegio Imperial, el Colegio de Nobles de Cordelles, la Academia de Guardias de Corps o la Academia de Guardias Marinas de Cádiz surgieron a mediados del siglo XVIII (Ausejo, 2012; Ausejo y Medrano, 2015). Es por ello por lo que los primeros personajes con conocimientos de esta rama de las matemáticas fueron militares como Jorge Juan, Pedro Padilla y Arcos y Pedro Lucuze o jesuitas como Tomás Cerdá y Rieger (Garma, 1988; Hormigón, 1994).

La producción de libros de texto y la formación de alumnos en esta rama de conocimiento por parte de jesuitas y militares resultó limitada, no obstante, durante el último cuarto del siglo XVIII, se fomentó la creación de nuevas instituciones con el objetivo de cultivar la ciencia y, por tanto, fue necesario formar a profesores que pudieran enseñar los nuevos contenidos matemáticos que se estaban desarrollando en Europa. Por ello, se comienza a fomentar la impresión de libros de texto para la enseñanza de las matemáticas en las diferentes instituciones, muchos de ellos abordaban todas las ramas de las matemáticas, incluido el cálculo infinitesimal que avanzaba imparable en Europa (Ausejo, 2012; Hormigón, 1994).

Son diversas las investigaciones que se han interesado por investigar los libros de texto que sirvieron para introducir y consolidar esta rama de las matemáticas en España durante el siglo XVIII (Ausejo, 2012; Ausejo y Medrano, 2010; 2012; Blanco, 2013; Cobos y Fernández-Daza, 1997; Cuesta Dutari, 1994; García, 2015), sin embargo no existe ninguna que aborde una comparativa desde el punto de vista matemático o didáctico de estos.

METODOLOGÍA

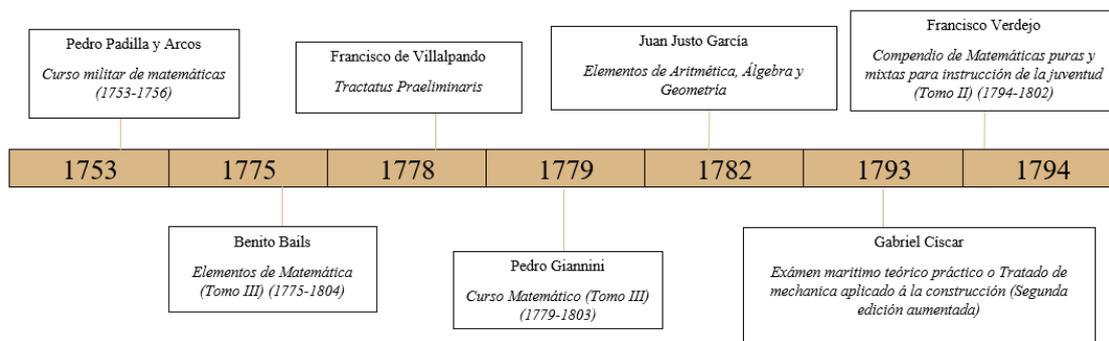
Este trabajo analiza los ejercicios y problemas que los autores de los libros de texto utilizaron para introducir y consolidar los contenidos de cálculo infinitesimal en la

España del siglo XVIII, y que se incluyeron como aplicaciones del método para calcular los máximos y los mínimos de una función. En concreto se realiza una revisión de las características encontradas en los propios enunciados de los ejemplos y problemas, en la resolución de la ecuación que impone la condición necesaria, en la consideración de soluciones negativas o en la aplicación de la condición suficiente para comprobar si el valor hallado es un máximo o un mínimo.

Se trata de una investigación histórica de corte cualitativo que sigue una metodología descriptiva y ex post facto y que usa el método del análisis de contenido para examinar e interpretar los datos, técnica consolidada y ampliamente utilizada en numerosas investigaciones (Maz-Machado y Rico, 2015; Madrid, Maz-Machado, León-Mantero y López, 2017; León-Mantero, Maz-Machado y Madrid, 2021).

El trabajo realizado por León-Mantero, Santiago y Gutiérrez-Arenas (2020) establece un listado de los libros de texto publicados en España durante el siglo XVIII que incluyen contenidos de cálculo diferencial e integral y que sirvieron para enseñar esta rama de las matemáticas en diferentes instituciones educativas, militares y religiosas del país.

Figura 1 – Listado cronológico de los libros de texto



Fuente: Elaboración propia

Sin embargo, el trabajo de Císcar (1793) no incluye aplicaciones del método de máximos y mínimos, con lo que finalmente el listado de libros de texto analizados en este trabajo se compone de:

- *Curso militar de Mathemáticas sobre las partes de estas ciencias pertenecientes al Arte de la Guerra, para el uso de la Real Academia establecida en el Quartel de Guardias de Corps (Tomo IV) (1753-1756)* de Pedro Padilla y Arcos

- *Tractatus Praeliminaris. Mathematicorum Disciplinarum Elementa in usum Physicae candidatorum* (1778) de Fernando Villalpando
- *Elementos de Matemática* (Tomo III) (1775-1804) de Benito Bails
- *Curso Matemático para la enseñanza de los caballeros cadetes del Real Colegio Militar de Artillería (Tomo III)* (1779-1803) de Pedro Giannini
- *Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría* (1782) de Juan Justo García
- *Compendio de Matemáticas puras y mixtas* (1802) de Francisco Verdejo

Figura 2 – Portadas de los libros de texto analizados



Fuente: Padilla y Arcos (1756), Villalpando (1778), Bails (1779), Juan Justo García (1782), Giannini (1794) y Verdejo (1802),

La búsqueda de los libros de texto fue realizada en fondos históricos virtuales como la Biblioteca Virtual Cervantes, la Biblioteca Virtual de Andalucía o la Biblioteca

Digital Hispánica de la Biblioteca Nacional de España, así como el repositorio digital de Google Books. A pesar de ser conocedores de más autores con conocimientos de cálculo infinitesimal, no se han incluido sus obras en este listado y, por tanto, no se han analizado, debido a que se encuentran inéditas, manuscritas o no se encuentran localizables o disponibles para su consulta.

El procedimiento para el análisis de los libros de texto siguió las recomendaciones marcadas en Maz (2009): en primer lugar, se definieron como unidades de análisis los enunciados y posteriores resoluciones de todos los ejercicios y problemas sobre cálculo de máximos y mínimos de funciones presentes en los libros de texto, se leyeron, se categorizaron y se procedió a su análisis y comparación.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Hemos de señalar que las citas de los libros de texto analizados que se mostrarán a continuación respetan la grafía, acentuación y puntuación original. Así podemos encontrar palabras como “maxima” o “minima” escritas sin tilde.

Antes de centrar nuestra atención en los enunciados y resolución de los ejercicios y problemas incluidos en los libros de texto, dedicaremos un espacio al método seguido por cada uno de los autores para conocer los máximos y los mínimos de una función. El análisis realizado a las obras permite identificar dos enfoques con respecto a las propiedades necesarias que se imponen para el cálculo de los valores, al objetivo del propio método y a establecer los pasos necesarios para aplicar el algoritmo: un enfoque geométrico y un enfoque analítico.

En el enfoque geométrico, se buscan los valores de la función en los que las rectas tangentes son paralelas a los ejes y la condición necesaria parte de igualar a cero la expresión dx o dy . Sin embargo, en el enfoque analítico, que parte de la propia definición de máximo o mínimo y en el que se pretende calcular los valores que son mayores que otros puntos cercanos de la función, para el caso de máximo, o menores para el caso de mínimo, la condición que se impone para realizar los cálculos hace uso de la serie de Taylor (León-Mantero, Santiago y Gutiérrez-Arenas, 2020).

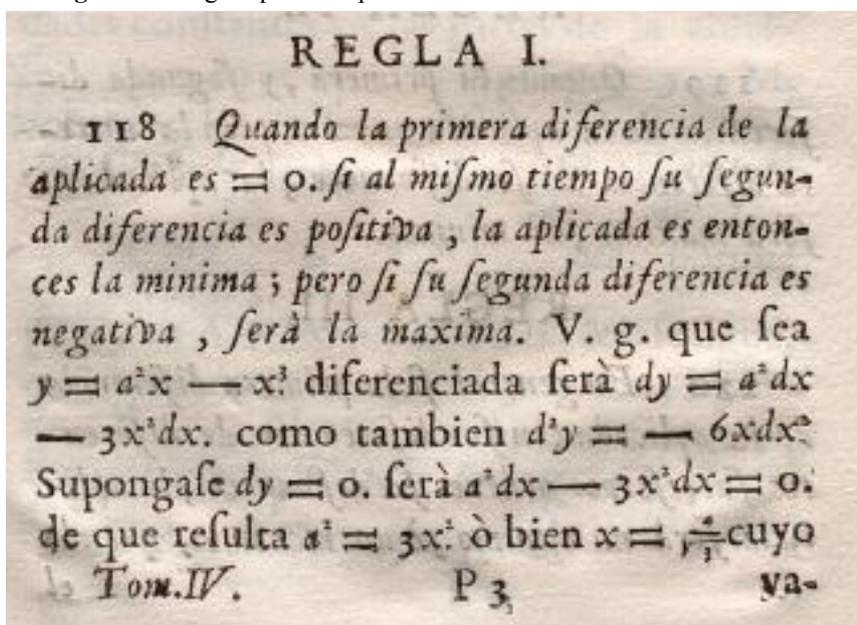
Según el análisis realizado por León-Mantero, Santiago y Gutiérrez-Arenas (2020), las obras de Villalpando (1778), Bails (1779), Juan Justo García (1782), Giannini (1794) y Verdejo (1802), que se vieron fuertemente influenciadas por los textos de los autores europeos, L'Hôpital (1696), Euler (1755), Bézout (1767) o M. Cousin (1777), hacen uso de un algoritmo de cálculo de máximos y mínimos desde un punto de vista

geométrico. Asimismo, todos prefieren la notación de Leibniz para denotar expresiones diferenciales.

Por otro lado, según esta clasificación, podemos considerar que la obra del capitán Pedro Padilla y Arcos está escrita desde un enfoque analítico, lo que es coherente si tenemos en cuenta que su referencia principal es el *Treatise of fluxions* de McLaurin (1742) en el que el algoritmo de resolución se realiza a través de las fluxiones sucesivas y el desarrollo en serie de Taylor.

Sin embargo, a pesar de que Padilla y Arcos enuncia las propiedades necesarias para aplicar el algoritmo desde este enfoque, no demuestra los resultados. Es decir, justifica el método a seguir en la definición de cantidad máxima: “Quando una Cantidad variable và creciendo hasta cierto punto que no puede ser mayor, y despues de èl decrece, se llama maxima” (Padilla y Arcos, 1756, p. 224) y de manera análoga cantidad mínima; señala la propiedad que nos la condición necesaria: “Si propuesta una Equacion se diferencia, è iguala à zero, la Equacion resultante contendrà las Cantidades máximas, ò mínimas de la propuesta” (p. 225); y para comprobar si es máxima o mínima, verifica el signo de la segunda diferencia (Figura 3).

Figura 3 – Regla I para comprobar si una cantidad es máxima o mínima



Fuente: Padilla y Arcos (1756, p. 225)

Como a continuación veremos, llama la atención que a pesar de que Padilla y Arcos enuncia las reglas anteriores, únicamente las aplica en los primeros ejemplos planteados. En esta obra también podemos ver que la elección del autor es usar la eficaz notación de Leibniz para las expresiones propias del cálculo infinitesimal.

Analicemos ahora las aplicaciones de los métodos incluidos en los libros de texto en forma de ejercicios y problemas. En este aspecto, llama la atención la gran influencia del texto de Bézout (1767) del que Bails (1779) y Verdejo (1802) extraen de manera literal la gran mayoría de enunciados y resoluciones.

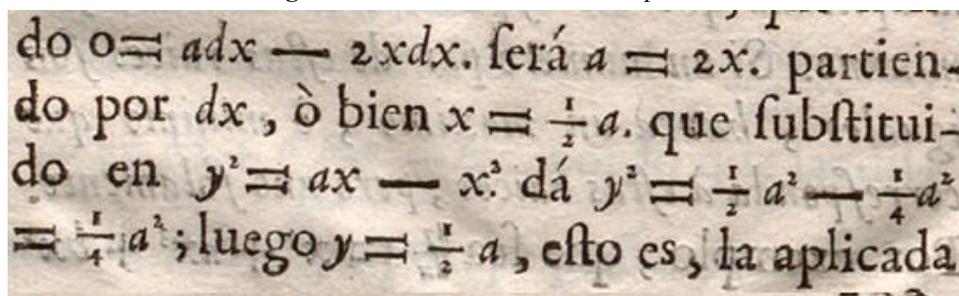
Veamos a continuación con detalle dos ejercicios de optimización que están propuestos y resueltos en varias de las obras en los que se aprecian las diferentes formas de abordar la resolución por parte de los autores.

El primer problema que vamos a examinar tiene como objetivo optimizar las ordenadas (también las abscisas en el caso de Bails (1779)) de la circunferencia. Es destacable que, en numerosas ocasiones, el lector no puede conocer todos los datos del ejercicio o problema únicamente a través del enunciado. Solo tras la lectura de la resolución propuesta por el autor, se pueden conocer los valores que este ha tenido en cuenta para resolver el ejercicio o problema. Es el caso de este primer problema, en el que cada autor considera un valor del radio de la circunferencia diferente, pero solo Bails (1779) lo indica en el enunciado.

Padilla y Arcos (1756) enuncia el problema: “Se quiere hallar la maxima, ò minima aplicada en el Circulo” (p. 230) y tiene en cuenta la ecuación de la circunferencia $y^2 = ax - x^2$, es decir aquella con centro en el $(\frac{a}{2}, 0)$ y radio $\frac{a}{2}$.

El procedimiento que sigue el autor para resolver el problema pasa por diferenciar la ecuación de la circunferencia y aplicar la condición necesaria, que desde el enfoque analítico supone igualar a cero dy , es decir, $2ydy = 0 = adx - 2xdx$, con la que obtiene que $x = \frac{1}{2}a$ e $y = \frac{1}{2}a$.

Figura 4 – Cálculo de los valores óptimos



Fuente: Padilla y Arcos (1756, p. 230)

Por último, el autor comprueba la condición suficiente, obtiene que $d^2y < 0$, deduce que en la circunferencia solo puede haber máximos y da como solución final el valor máximo $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$. Esto se debe a que considera la ecuación de la circunferencia como

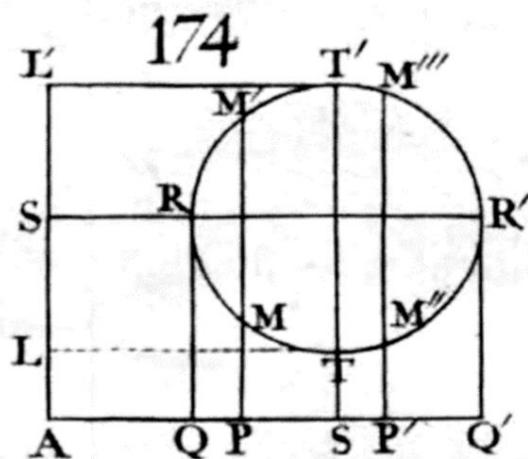
función implícita sin tener en cuenta las dos ramas que nos da la ecuación de la circunferencia. Asimismo, el autor no considera las soluciones negativas que se obtienen al sustituir $x = \frac{1}{2}a$ en la ecuación de la circunferencia, por eso no le resulta incoherente afirma que en la circunferencia solo hay un valor máximo en el punto $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

Por otro lado, Bails (1779) resuelve un ejercicio similar, pero considerando “la curva cuya ecuación es $yy + xx = 2ay + 2bx - aa - bb + rr$ ” (p. 292). Desde el enfoque geométrico Bails aplica el siguiente razonamiento:

- La expresión $\frac{dx}{dy}$ expresa el valor de la tangente del ángulo que la curva forma con el eje de las ordenadas y $\frac{dy}{dx}$ con el eje de abscisas
- Si ese ángulo es nulo, la tangente será paralela al eje de ordenadas o abscisas respectivamente
- Por tanto, en los puntos en los que tenemos mayores y menores ordenadas y abscisas, $dx=0$ o $dy=0$

Por tanto, diferencia la ecuación obteniendo $2ydy + 2xdx = 2ady + 2b dx$, simplifica la expresión $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2a}{2b - 2x}$ e impone por un lado $dx=0$ y por otro $dy=0$. Tras resolver ambas ecuaciones halla que $y=a$ y por tanto sustituyendo en la ecuación, obtiene los dos posibles óptimos $x=b \pm r$. Y, por otro lado, $x=b$ y obtiene los límites de la curva $y=a \pm r$. De ese modo obtiene los valores de los puntos T, T', R y R' (Figura 5).

Figura 5 – Representación geométrica problema optimización circunferencia



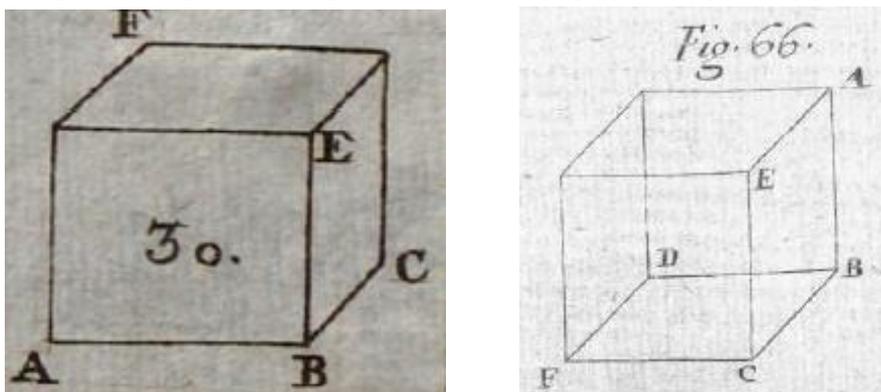
Fuente: Bails (1779, p. 292)

Para comprobar que R y R' son límites de la curva y que T y T' son los valores mínimo y máximo respectivamente, sustituye valores menores y mayores que $b - r$, $b + r$, $a - r$ y que $a + r$ para verificar que no hay más valores de la función a la derecha, a la izquierda, arriba o abajo.

El siguiente ejemplo versa sobre el cálculo de las medidas del paralelepípedo de menor superficie que tiene un volumen dado. Al igual que el caso anterior, los datos que los autores indican en el enunciado no son suficientes para resolver el problema, ya que para poder obtener las medidas del paralelepípedo es necesario averiguar sus tres dimensiones y sólo nos indican el volumen del cuerpo.

Padilla y Arcos (1756) enuncia el problema usando las siguientes palabras. “Entre todos los Paralelepipedos de igual solidez se quiere hallar el que tenga menor superficie” (p. 235). Giannini (1794) opta por proponer: “Entre todos los paralelepípedos FA iguales á una cantidad dada, hallar él que tiene la mínima superficie convexâ” (p. 261).

Figura 6 – Representación geométrica problema optimización paralelepípedo



Fuente: Padilla y Arcos (1756, p. 235) y Giannini (1794, p. 261)

Las decisiones que toman los autores para poder abordar la resolución son sin dudas disímiles. Así, Padilla y Arcos opta por indicar que se da por conocido el lado arbitrario AB sin dar ninguna explicación ni razones y Giannini reduce el problema en un primer nivel al de la búsqueda de los paralelepípedos con la misma altura, demuestra que entre los que tienen la misma altura, el que tiene menor superficie es aquel que tiene de base un cuadrado y, por último, calcula aquel con mínima superficie entre los que tienen base cuadrada.

A partir de este momento, a pesar de que cada autor resuelve del problema a través de métodos con enfoque diferente, la resolución es similar por dos motivos. En primer lugar, Giannini que, de manera general, hace uso de un enfoque geométrico en su libro de

texto, puede reducir su condición necesaria a igualar a cero únicamente $dy=0$, ya que se busca únicamente menor superficie.

Asimismo, en ese punto de la resolución, ambos autores se dejan guiar por el contexto del problema para resolverlo dejando a un lado las proposiciones o reglas que ellos mismos establecieron para resolver este tipo de problemas, es decir, no tienen en cuenta las soluciones negativas de la ecuación que da el valor de x , decisión coherente con el hecho de que x representa la longitud de una de las aristas, aunque lo deseable hubiera sido que los autores advirtieran de ello al lector haciendo alguna referencia o indicándolo con una nota.

Y, por último, ninguno comprueba que la solución obtenida es realmente un mínimo, algo generalizado en la mayoría de los autores, que suponen que el valor obtenido de la condición necesaria es la solución final y única del problema, delegando la responsabilidad en que el problema esté bien diseñado desde su enunciado.

CONCLUSIONES / CONSIDERACIONES FINALES

En este trabajo, hemos visto a través de dos ejemplos de ejercicios o problemas de optimización, los diferentes enfoques que usaban los autores de libros de texto sobre cálculo infinitesimal publicados en España durante el siglo XVIII. En particular nos hemos centrado en la redacción de los enunciados y si estos contenían los datos necesarios para resolver el problema; en las condiciones que se imponían para obtener la ecuación de la cual se obtienen los posibles máximos y mínimos, que eran diferentes según el enfoque abordado en el texto; en la consideración de soluciones negativas y si la no consideración provocaba que los autores no recogieran todas las soluciones posibles; o en la aplicación de la condición suficiente para comprobar si el valor hallado es un máximo o un mínimo o simplemente se suponía como válida la solución obtenida.

Estos resultados están en consonancia con el análisis realizado por Blanco (2013) al *Curso militar de Matemáticas sobre las partes de estas ciencias pertenecientes al Arte de la Guerra, para el uso de la Real Academia establecida en el Cuartel de Guardias de Corps* de Padilla y Arcos quien señala que, aunque el autor enuncia las reglas del algoritmo de resolución de máximos y mínimos de una función y los aplica en los primeros ejemplos, en los sucesivos ejercicios y problemas que se proponen después, solo determina si los valores obtenidos eran realmente máximos o mínimos por el contexto en el que estaba planteado el problema.

De nuevo surge la misma idea sobre la importancia que tuvieron para la enseñanza de las matemáticas en España, la influencia de los libros de textos europeos de referencia que sirvieron a los autores para organizar la información y decidir los contenidos a incluir. Sobra decir que el enfoque que cada autor reflejó en sus textos está en relación con el dado en los libros que consultó y gracias a los cuales, aprendió, enseñó y difundió en España los avances alcanzados en Europa.

Este tipo de trabajos sacan a relucir la importancia de las investigaciones en Historia de la Educación matemática, ya que muestran los obstáculos a los que los profesionales de las matemáticas se han enfrentado a lo largo de la historia y los errores que cometieron y que ayudaron al avance de este campo de conocimiento. Este es el mejor ejemplo del aspecto social y humano que tienen las matemáticas y de cómo estas se han ido modelando, desarrollando y formalizando hasta llegar a nuestros días.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado dentro del proyecto de investigación del Plan I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad (Fondos FEDER) EDU2016-78764-P.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ausejo, E. (2012). British influences in the introduction of calculus in Spain (1717-1767). En A. M. Roca (Ed.), *The Circulation of Science and Technology: Proceedings of the 4th International Conference of the European Society for the History of Science* (pp. 555-559). Barcelona: SCHCT.
- Ausejo, E., y Medrano, F. J. (2010). Construyendo la modernidad: Nuevos datos y enfoques sobre la introducción del Cálculo Infinitesimal en España (1717-1787). *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 33(71), 25-56.
- Ausejo, E., y Medrano, F. J. (2012). La fundamentación del calculus en España: El cálculo infinitesimal en Gabriel Ciscar (1760-1829). *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 35(76), 305-316.
- Ausejo, E., y Medrano, F. F. (2015). Jorge Juan y la consolidación del cálculo infinitesimal en España (1750-1814). En A. Alberola, R. Die, y C. Mas (Eds.), *Jorge Juan Santacilia en la España de la Ilustración* (pp. 155-178). Alacant: Publicacions de la Universitat d'Alacant.
- Ageron, P., y Hedfi, H. (2020). Ibrāhīm al-Balīshṭār's book of arithmetic (ca. 1575): Hybridizing Spanish mathematical treatises with the Arabic scientific tradition. *Historia Mathematica*, 52, 26-50.
- Bails, B. (1779). *Elementos de Matemáticas* (Vol. Tomo III). Madrid: D. Joaquin Ibarra.
- Bézout, É. (1767). *Cours de mathématiques a l'usage des Gardes du Pavillon et la Marine* (Tomo IV). París: Chez Richard, Caille & Ravier.
- Blanco, M. (2013). The Mathematical Courses of Pedro Padilla and Étienne Bézout: Teaching Calculus in Eighteenth-Century Spain and France. *Science & Education*, 22(4), 769-788.

- Císcar, G. (1793). *Exámen Marítimo teórico práctico ó Tratado de Mecánica aplicado a la construccion. Edición segunda*. Madrid: Imprenta Real.
- Cobos, J. M., y Fernández-Daza, C. (1997). *El cálculo infinitesimal en los ilustrados españoles: Francisco de Villalpando y Juan Justo García*. Cáceres: Universidad de Extremadura Servicio de Publicaciones.
- Cousin, M. (1777). *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*. París: Claude-Antoine Jombert.
- Christianidisa, J. y Megremi, A. (2019). Tracing the early history of algebra: Testimonies on Diophantus in the Greek-speaking world (4th-7th century CE). *Historia Mathematica*, 47, 16-38.
- Cuesta Dutari, N. (1994). *Historia de la invención del análisis infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Universidad de Salamanca.
- Euler, L. (1755). *Institutiones Calculi Differentialis cum eius vsu in Analysi finitorum ac Doctrina Serierum*. Londres: Academia Imperial de Ciencias.
- García, D. (2015). Jorge Juan: el introductor del Cálculo Infinitesimal en España. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*(79), 53-63.
- García, J.J. (1782). Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría.
- Garma, S. (1988). Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX. En J. M. Sánchez (Ed.), *Ciencia y sociedad en España* (pp. 93-127). Madrid: Ediciones El Arquero.
- Giannini, P. (1795). *Curso matemático para la enseñanza de los Caballeros Càdetes del Real Colegio Militar de Artillería*. Segovia: Oficina de Don Antonio Espinosa.
- Hormigón, M. (1994). *Las Matemáticas en el siglo XVIII (Vol. 24)*. Madrid: Akal, S.A.
- Karp, A. (2014). The history of mathematics education: developing a research methodology. En A. Karp y G. Schubring (Eds.), *Handbook on the history of mathematics education* (pp. 9-24). Springer.
- L'Hôpital, G. (1696). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. París: L'imprimerie royale.
- León-Mantero, C., Santiago, A. y Gutiérrez-Arenas, M.P. (2020). El método de máximos y mínimos en los libros de texto españoles del siglo XVIII: influencias europeas. En A. Maz-Machado y C. López-Esteban (Eds.), *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 115-134). Ediciones Universidad de Salamanca.
- León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y Madrid, M.J. (2021). El Tratado de Álgebra elemental de Juan Cortázar: un libro significativo para la enseñanza de las matemáticas en España. *Educatio Siglo XXI*, 39, 235-256. <http://dx.doi.org/10.6018/educatio.469251>
- Madrid, M.J., López-Esteban, C. y Jiménez-Fanjul, N. (2020). La enseñanza de las matemáticas en la Academia de Guardiamarinas de Cádiz: una visión a partir de tres libros clave. En A. Maz-Machado y C. López-Esteban (Eds.), *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 93-113). Ediciones Universidad de Salamanca.
- Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., y López, C. (2017). Aplicaciones de las Matemáticas a la Vida Diaria en los Libros de Aritmética Españoles del Siglo XVI. *Boletim de Educação Matemática*, 31(59), 1082-1100.
- Maz-Machado, A., y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa*, 18(1), 49-76.
- Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En María José González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en*

- Educación Matemática XIII* (pp. 5–20). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Muñoz-Escolano, J.M., Oller-Marcén, A.M. (2021). Notas al pie en la Aritmética (1884) de los coroneles Salinas y Benítez. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 4(1), 17-33
- McLaurin, C. (1742). *A Treatise of fluxions in two books*. Edimburgo: T.W. and T. Ruddimans
- Sánchez Sierra, I.M. y González Astudillo, M.T. (2020). La Geometría analítica en el Curso Completo de Matemáticas puras (1829) de José De Odriozola. *Historia y memoria de la Educación*, 11, 113-149.
- Sanz, M.T. y Gómez, B. (2018). Missing Curious Fraction Problems. En K. M. Clark, T. Hoff Kjeldsen, S. Schorcht y C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History* (pp. 193-208). Switzerland:Springer, Cham
- Padilla y Arcos, P. (1753). *Curso militar de Mathematicas sobre las partes de estas ciencias*. Madrid: Imprenta de Antoni Marín.
- Puig, L. (1994) El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis*, 10, 47-92.
- Verdejo, F. (1802). *Compendio de Matemáticas puras y mixtas para instrucción de la juventud (Tomo II)*. Madrid: Imprenta de la Viuda de Ibarra.
- Villalpando, F. (1778). *Tractatus Praeliminaris. Matehematicorum Disciplinarum Elementa in usum Physicae candidatorum*. Madrid: Joaquín Ibarra.