VI CIHEM ONLINE

ISBN: 978-980-7839-02-0

CC BY NC ND

EL USO DE LA HISTORIA COMO UNA HERRAMIENTA: ESTUDIO DE CASO SOBRE LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS ASOCIADAS A LA CLASIFICACIÓN DE LOS GRUPOS DE ORDEN CUATRO

THE USE OF HISTORY AS A TOOL: CASE STUDY ON THE MATHEMATICAL CONNECTIONS ASSOCIATED WITH THE CLASSIFICATION OF THE GROUPS OF ORDER FOUR

Erika Zubillaga-Guerrero[1]
Universidad Autónoma de Guerrero

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez[2]
Universidad Autónoma de Guerrero

RESUMEN

En este documento se presentan algunas conexiones intramatemáticas en la clasificación de los grupos de orden cuatro fundamentada en un análisis histórico y epistemológico del concepto de grupos isomorfos. Las conexiones matemáticas son entendidas como un proceso cognitivo por el cual una persona establece relaciones entre dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones o significados entre sí, con otras disciplinas y la vida real. La investigación muestra un estudio de caso, donde se aplicó una entrevista para la recolección de datos, y para analizarlos se realizó un análisis cualitativo de texto. Como resultado se identificaron tres conexiones asociadas a los conceptos de grupo, isomorfismo y grupos isomorfos de los siguientes tipos: comparación a través de características comunes, derivación, procedimiento y relación parte-todo. Se concluye que las tareas diseñadas con una fundamentación histórica podrían favorecer en una comprensión profunda a partir de la apreciación conectada de los conceptos y resultados matemáticos, en relación con los problemas e ideas que los generaron, haciendo explícitas las conexiones matemáticas en la enseñanza.

Palabras clave: Conexiones matemáticas. Historia. Grupos isomorfos. Comprensión conceptual. Educación matemática.

ABSTRACT

This document presents some intra-mathematical connections on the classification of groups of order four based on a historical and epistemological analysis of the concept of isomorphic groups. Mathematical connections are understood as a cognitive process by which a person establishes relationships between two or more ideas, concepts, definitions, theorems, procedures, representations, or meanings with other disciplines and with real life situations. This research is a case study, where an interview was applied for data collection, and a qualitative text analysis was carried out to analyze them. As a result, three connections associated with the concepts of group, isomorphism and isomorphic groups of the following types were identified: comparison through common features, derivation, procedure, and part-whole relations. We

[1] Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Profesora en la Facultad de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Dirección para correspondencia: Av. Lázaro Cárdenas, S/N, Colonia Haciendita, Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México, 39087. eguerrero@uagro.mx. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4171-5072.

[2] Doctora en Matemática Educativa, Universidad de Salamanca (USAL). Profesora de Tiempo completo en la Facultad de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Dirección para correspondencia: Av. Lázaro Cárdenas, S/N, Colonia Haciendita, Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México, 39087. flor.rodriguez@uagro.mx. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9596-4253.

concluded that the tasks designed with a historical foundation could favor a deep understanding from the connected appreciation of the mathematical concepts and results, in relation to the problems and ideas that generated them, making explicit the mathematical connections in teaching.
Keywords: Mathematical connections. History. Isomorphic groups. Conceptual understanding. Mathematics education.

1. INTRODUCCIÓN

En un primer curso de Álgebra Abstracta, los estudiantes abordan el problema de la clasificación de grupos finitos de orden pequeño mediante la exploración de todas las formas posibles de llenar una tabla de operaciones y la estrategia de un cambio de nombre para determinar cuántos grupos distintos hay de un orden dado, salvo isomorfismo (Thrash y Walls, 1991). Sin embargo, las estrategias y los procesos matemáticos efectuados por los estudiantes en la clasificación de grupos finitos no se han estudiado en profundidad. Por ejemplo, Larsen (2009) identificó dificultades en la construcción de la idea de grupos isomorfos como esencialmente el mismo y en la construcción de la definición formal de isomorfismo a partir del uso de tablas de operaciones. Estos resultados sugieren que para los estudiantes no resulta natural pensar en un cambio de nombre como una función, además biyectiva que preserva operación. Por otra parte, Hazzan (2001) identificó que al abordar la tarea de construir una tabla de operaciones que represente un grupo de orden cuatro, ninguno de los estudiantes utilizó el argumento de que el grupo requerido tenía que ser isomorfo al grupo cíclico o al grupo no cíclico de ese orden, pero ¿cómo pueden deducir los estudiantes que, salvo isomorfismo, solo hay dos grupos de orden cuatro?

La historia nos muestra que, en el desarrollo de las matemáticas, la clasificación de los grupos finitos fue uno de los problemas más importantes dentro de la teoría de grupos. Un análisis a profundidad del origen de este problema histórico sugiere que su tratamiento en la enseñanza actual no debería ser trivializado. Por lo que, en esta investigación consideramos a la historia de las matemáticas como un recurso que contribuye al conocimiento matemático y a la exploración de formas posibles en que este conocimiento puede utilizarse para favorecer en los procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, para desarrollar una comprensión más profunda de las matemáticas en los estudiantes, así como al diseño y análisis de actividades para la enseñanza (Wang et al., 2018). Específicamente, a partir de un estudio histórico y epistemológico del concepto de grupos isomorfos en la obra de Cayley (1854) "On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^{\square} = 1$", realizamos la recuperación de las ideas y significados que subyacen a este concepto en un momento histórico específico.

Por otra parte, Melhuish y Fagan (2018) señalan que los estudiantes deben establecer conexiones conceptuales precisas para resolver tareas con estructuras desconocidas y clases generales de objetos con la finalidad de comprobar comprensión, mientras que una sólida comprensión conceptual se caracteriza como un conocimiento rico en conexiones (Hiebert y Lefevre, 1986). Lo anterior sugiere que la importancia del estudio de las conexiones matemáticas radica en su vínculo con la comprensión (Businskas, 2008; Eli et al., 2011), ya que las conexiones permiten ver a la matemática como un campo integrado. Sin embargo, en el proceso de enseñanza-aprendizaje se favorece una presentación acabada y puramente formal de los conceptos e ideas matemáticas, mientras que los aspectos epistemológicos y los procesos de construcción teórica no son priorizados, lo cual incide en la comprensión de los estudiantes de cómo se interrelacionan los conceptos.

En esta comunicación presentamos algunos resultados de una investigación que tuvo como objetivo caracterizar las conexiones intramatemáticas que emergen en la resolución de tareas asociadas a la clasificación de grupos finitos de orden pequeño, considerando para su diseño la fuente primaria Cayley (1854) a partir de un estudio de caso. En particular, presentamos las conexiones intramatemáticas identificadas en la clasificación de los grupos de orden cuatro.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. CONEXIONES MATEMÁTICAS

Las conexiones matemáticas fueron definidas por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000, p. 64) como: “the ability to recognize and use connections among mathematical ideas; understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole; recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics”. Por su parte, García-García y Dolores-Flores (2018) definieron las conexiones matemáticas como un proceso cognitivo por el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, definiciones, conceptos, procedimientos, teoremas, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Asimismo, diversas investigaciones (Businskas, 2008; Singletary, 2012) coinciden en que las conexiones matemáticas son un enlace o puente entre ideas matemáticas. En esta investigación entendemos una conexión matemática en el mismo sentido que García-García y Dolores-Flores (2018) y en particular, exploramos las conexiones intramatemáticas, es decir, aquellas que emergen al interior de la matemática misma y entre entidades matemáticas.

A continuación, presentamos la categorización utilizada para estudiar las conexiones matemáticas, la cual se deriva de los tipos de conexiones matemáticas que reporta la literatura revisada (Businskas, 2008; Eli et al., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2018; Singletary, 2012). En las descripciones categóricas, los componentes de la conexión *A*, *B* y *C* corresponden a ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones o significados.

Diferentes representaciones. Las representaciones pueden ser *alternativas* o *equivalentes*. *A* es una representación alternativa de *B*, si ambas se expresan de dos maneras diferentes (por ejemplo, geométrica-algebraica, verbal-algebraica). Por otra parte, *A* es una representación equivalente a *B* cuando ambas se expresan de dos maneras diferentes, pero dentro de la misma forma de representación.

Comparación a través de características comunes. *A* y *B* comparten algunas características en común, lo que permite una comparación basada en sus similitudes o diferencias (*A* es similar a *B*, *A* es lo mismo que *B*, *A* no es lo mismo que *B*, *A* o *B* define o describe de manera similar a *C*).

Relación parte-todo. Cuando las relaciones lógicas que se establecen incluyen generalizaciones e inclusiones. Las primeras son de la forma *A* es una generalización de *B* y *B* es un caso particular de *A*. Las segundas son de la forma *A* está incluido o contenido en *B*.

Implicación. Cuando se establece una relación de dependencia de un concepto de otro, donde un componente de la conexión se sigue lógicamente de otro (Si *A*, entonces *B*, Si *A*, entonces *B* y no *C*).

Procedimiento. Un procedimiento matemático o algorítmico está asociado con un concepto particular (*A* es un procedimiento utilizado para trabajar con *B*).

Característica/propiedad. Se establece cuando se definen algunas características o se describen las propiedades de los conceptos en términos de otros conceptos que los hacen diferentes o similares de otros.

Derivación. Se manifiesta cuando el conocimiento de un concepto es empleado para construir o explicar otro concepto; aunque no se limita al reconocimiento de alguna derivación.

Conexión de métodos. Se refiere a la consideración de múltiples métodos para resolver un problema, es decir, *A* o *B* se pueden usar para encontrar *C*.

Reversibilidad. Es la capacidad de reconocer y establecer relaciones bidireccionales entre ideas matemáticas. Por ejemplo, cuando se parte de un concepto *A* para llegar a un concepto *B* y se invierte el proceso partiendo de *B* para volver al concepto *A*.

Significado. Hace referencia al sentido que un individuo da a un objeto matemático, por lo que los significados atribuidos pueden estar limitados por su definición o el contexto de su uso.

2.2. HISTORIA COMO UNA HERRAMIENTA

En Educación Matemática se identifican diversos argumentos para justificar la integración de la historia de las matemáticas en los procesos de su enseñanza y aprendizaje, indicando algunas formas de cómo usarla (Fauvel y van Maanen 2000; Furinghetti, 2020; Jankvist, 2009). Esta investigación considera el uso de la historia como herramienta (Jankvist, 2009), como medio auxiliar o de apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos, teorías, métodos y algoritmos matemáticos, es decir, para mejorar la enseñanza y profundizar la compresión de contenidos matemáticos de los estudiantes. Específicamente, recurrimos al estudio de fuentes primarias u originales en el aprendizaje de la matemática no abordando el estudio de la historia de las matemáticas de manera directa sino de forma indirecta, es decir, sin discutir explícitamente el desarrollo histórico (Jankvist, 2009), lo cual sirvió como fundamento para el diseño de la tarea propuesta, además de que se reconoció su papel en el establecimiento de conexiones matemáticas.

2.3. LA CLASIFICACIÓN DE LOS GRUPOS DE ORDEN CUATRO

En la obra *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta^{\square} = 1$ de 1854, Cayley planteó la clasificación de grupos finitos según su forma y, a partir de un enfoque de generadores y relaciones para grupos, ejemplificó la distinción entre la ecuación ordinaria $\square^{\square} - 1 = 0$ y la ecuación simbólica $\theta^{\square} = 1$. También, consideró un grupo finito 1, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (*n* símbolos diferentes, donde 1 es la identidad) como un sistema de raíces de la ecuación simbólica $\theta^{\square} = 1$, exploró la naturaleza de *n* en dicha ecuación y para el caso de $\square = 4$, Cayley presenta dos grupos esencialmente distintos de este orden, donde únicamente uno de ellos es análogo (isomorfo) al sistema de las raíces de la ecuación ordinaria $\square^{4} - 1 = 0$ (es decir, uno es cíclico y el otro no).

Cayley inicia el análisis considerando un grupo G con elementos (symbols) distintos entre sí $\{1, \square, \square, \square\}$. Excepto por la identidad, los otros tres elementos o bien son de orden 2 o de orden 4, pues el orden de cualquier elemento α de G es un divisor del orden del grupo: “if any symbol α of the group satisfies the equation $\theta^{\square} = 1$, where r is less than n then that r must be a submultiple of n” (Cayley, 1854, p. 41). Si todos los elementos de G excepto la identidad fueran generadores, entonces el grupo G es cíclico de orden primo, pero el orden de G es cuatro, por tanto, G debe contener un elemento de orden 2. Supongamos $\beta^2 = 1$, como lo hizo Cayley y sean $H = \langle\beta\rangle = \{1, \square\}$ un subgrupo de G y $\alpha \in \square$, $\alpha \neq 1, \square$, entonces $\square\square = \{\alpha, \square\square\}$. Se satisface que $\square \cap \square\square = \emptyset$, por tanto, $\square = \{1, \square, \square, \square\square\}$. Multiplicando cada término del grupo G por la izquierda (o un factor más lejano como refiere Cayley) por α, obtenemos $\{\alpha, \square^2, \square\square, \square^2\square\}$. Estos elementos resultantes corresponden a alguno de los términos originales $\{1, \square, \square, \square\square\}$, de modo que $\alpha^2 = 1$ o $\alpha^2 = \beta$.

Suponer $\alpha^2 = \beta$ implica $\square\square = \square\square$ y $\alpha^4 = 1$ (α es de orden 4, pues $\alpha^4 = \alpha^2\square^2 = \beta^2 = 1$), por tanto, obtenemos el grupo cíclico $\{1, \square, \square^2, \square^3, (\square^4 = 1)\}$ realizando la respectiva sustitución en $\{\alpha, \square^2, \square\square, \square^2\square\}$. En su artículo, Cayley representa el grupo $\{1, \square, \square^2, \square^3, (\square^4 = 1)\}$ a partir de una tabla denotando al mismo grupo por los símbolos $\{1, \square, \square, \square\}$ (ver Figura 1). Como ejemplo de llenado de esta mostramos para la tercera fila. Estableciendo la correspondencia $\alpha \leftrightarrow \alpha, \square^2 \leftrightarrow \beta, \square^3 \leftrightarrow \square, \square^4 \leftrightarrow 1$, obtenemos[3]: $1\beta = \beta$; $\square\square = \alpha\alpha^2 = \alpha^3 = \square$; $\square\square = \alpha^2\square^2 = \alpha^4 = 1$; $\gamma\beta = \alpha^3\square^2 = \alpha^4\square = \alpha$.

Figura 1 – El grupo cíclico de orden cuatro

	1,	α,	β,	γ
1	1	α	β	γ
α	α	β	γ	1
β	β	γ	1	α
γ	γ	1	α	β

Fuente: Cayley (1854, p. 42)

[3] Recordemos que los elementos se obtienen como sigue: para la entrada (i, j) de esta tabla, se multiplica el i-ésimo elemento (columna) por el j-ésimo elemento (fila).

Por otra parte, considerando el caso $\alpha^2 = 1$, al multiplicar los elementos de $G = \{1, □, □, □□, (\beta^2 = 1)\}$ por la izquierda (o un factor más lejano) por β, obtenemos $\{\beta, □□, \beta^2, □□□\}$, los cuales corresponden a alguno de los elementos de G, de lo que se deduce que $□□ = □□$, por lo tanto, $(□□)^2 = \alpha^2 □^2 = 1$. En la representación de este grupo, Cayley construye su tabla, y como ejemplo de llenado de esta mostramos para la tercera fila, tomando $\gamma = □□$: $1\beta = □$; $□□ = □$; $□□ = □^2 = 1$; $□□ = □□□ = □□^2 = \alpha$ (ver Figura 2).

Figura 2 – El grupo no cíclico de orden cuatro

	1	α	β	γ
1	1	α	β	γ
α	α	1	γ	β
β	β	γ	1	α
γ	γ	β	α	1

Fuente: Cayley (1854, p. 43)

3. METODOLOGÍA

El enfoque de esta investigación es cualitativo (Creswell, 2014), debido a que se exploran los atributos cognitivos de un individuo sobre las conexiones matemáticas al resolver una tarea asociada a la clasificación de los grupos de orden cuatro. El diseño de la investigación fue un estudio de caso, cuya característica es proporcionar un análisis del contexto y los procesos que clarifican las cuestiones teóricas que se estudian (Njie y Asimiran, 2014). Para recolectar los datos se usaron el cuestionario y la entrevista.

Para la selección del caso de estudio se realizó el seguimiento de un grupo de estudiantes de quinto semestre (20-21 años) de una Licenciatura en Matemáticas, quienes iniciaban un primer curso de Álgebra Moderna (Álgebra Abstracta). La elección del caso se realizó atendiendo dos criterios: (1) que el estudiante concluyera el curso de Álgebra y (2) que colaborara voluntariamente en la investigación. Esto nos condujo a la selección de la estudiante Lu, quien no aprobó el curso de Álgebra Moderna, pero fue una estudiante participativa y entusiasta.

3.1. EL INSTRUMENTO

Se elaboró un cuestionario que incorporó una secuencia de nueve tareas de carácter intramatemático y se validó tanto por un experto en el área de Álgebra Abstracta con más de diez años de experiencia docente en una Licenciatura en Matemáticas, como por usuarios, considerando los resultados de una prueba piloto aplicado a cinco estudiantes del quinto semestre de la misma Licenciatura, de entre los cuales Lu fue partícipe. En esta comunicación solo presentamos la tarea correspondiente a la clasificación de los grupos de orden cuatro [ver Figura 3]:

Figura 3 – Protocolo de entrevista

9. Clasificación de los grupos de orden cuatro.

Sea $(G, *)$ un grupo de orden cuatro con elementos $\{1, \alpha, \beta, \gamma\}$ distintos, donde el símbolo 1 representa el neutro.

i. Explica por qué un grupo de orden par tiene al menos un elemento de orden dos. En particular, G tiene al menos un elemento de orden dos.

ii. Sea α el elemento de orden dos en G.
- Determina el conjunto generado por α ($\langle\alpha\rangle$), es decir, el conjunto de todas las potencias de α.
- ¿El generado por α es un subgrupo de G?

iii. Usa el ejercicio anterior para construir la tabla de operaciones de G.
- Si no sabe cómo construir la tabla:
  - Construye la tabla de operaciones para $\langle\alpha\rangle$.
  - Si β es otro elemento de G diferente del neutro y de α, discute lo que sucede al operar por la derecha por β.
  - ¿Por qué el elemento $\alpha\beta$ es diferente de 1, α y β? Es decir, explica por qué $\alpha\beta$ es igual a γ y $G = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\} = \{1, \alpha, \beta, \gamma\}$.
- Considera la fila de β en la tabla de operaciones del ejercicio anterior.
  - Determina los casos para los cuales $\{\beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta\} = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$. Es decir, que al operar cada elemento por β se obtienen todos los elementos del grupo reorganizados en un orden diferente.
    - Si hace alguna propuesta:
      - ¿Será el único caso?
      - ¿Cómo sabes que no hay otras posibilidades?
  - Para cada uno de los casos llena la tabla de operaciones obtenida previamente de tal manera que represente un grupo.
    - Reescribe las tablas con los elementos $\{1, \alpha, \beta, \gamma\}$.
  - ¿Los grupos son isomorfos? Justifica tu respuesta.
  - ¿Cuántos grupos hay de orden cuatro?

Fuente: Elaborada por los autores

3.2. LA ENTREVISTA

Utilizamos la entrevista como un instrumento de recolección de información para profundizar en el razonamiento del caso. De acuerdo con Arnon et al. (2014), a partir de las respuestas del estudiante, el entrevistador puede optar por una ruta más didáctica, ya que el objetivo de una entrevista es determinar y explicar cómo los individuos construyen su comprensión de los conceptos matemáticos y permite al entrevistador observar el proceso de construcción a medida que se desarrolla. Además, si el estudiante se obstruye ante una tarea específica o no proporcionara una respuesta razonable a una pregunta, se pueden dar pistas con la finalidad de incitar su progreso en la construcción de conceptos y para motivar conexiones entre diferentes nociones (Oktaç, 2019).

En este documento se reportan algunos datos correspondientes a una sesión de 90 minutos de entrevista, la cual fue grabada en audio y video para su posterior análisis. También se realizó la transcripción en su totalidad para ser analizada junto con las producciones escritas.

3.3. METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS DE DATOS: ANÁLISIS CUALITATIVO DE TEXTO

Se usó el método de análisis cualitativo de texto (Kuckartz, 2014) para analizar los datos, el cual consta de las siguientes fases:

Fase 1. *Lectura e interpretación del texto*. La familiarización con los datos se estableció a partir de la lectura y análisis de las transcripciones a la par de las producciones escritas en función del objetivo de investigación.

Fase 2. *Construcción de categorías*. Con base en el objetivo de investigación, la construcción de categorías se llevó a cabo de forma deductiva, es decir, previo a la recolección de los datos y en función del marco establecido sobre conexiones matemáticas. En este sentido, se consideraron las siguientes categorías principales (tipología de conexiones matemáticas): diferentes representaciones, comparación a través de características comunes, relación parte-todo, implicación, procedimiento, característica/propiedad, derivación, conexión de métodos, reversibilidad y significado.

Fase 3. *Codificación de segmentos de texto*. La codificación de los datos se realizó a partir de las categorías principales, es decir, se designaron códigos en relación con las categorías establecidas en la segunda fase. En específico, se realizó una búsqueda de palabras o frases en las transcripciones asociadas con la tipología de conexiones matemáticas y en consecuencia se asignaron los códigos.

Fase 4. *Análisis*. Con base en los resultados de la tercera fase y mediante la triangulación entre los tres autores, se caracterizaron las conexiones matemáticas específicas, en relación con las categorías para las cuales se encontró evidencia, es decir, a partir de una discusión y consenso de su correspondencia con los datos.

Fase 5. *Presentación de resultados*. Para su presentación, las conexiones matemáticas se agruparon atendiendo al concepto matemático asociado a ellas: grupo, isomorfismo y grupos isomorfos. Estas conexiones encajaron en una o más de las categorías propuestas por Businskas (2008), Eli et al. (2011), García-García y Dolores-

Flores (2018) y Singletary (2012). En esta comunicación nos limitaremos a presentar las conexiones matemáticas identificadas en la clasificación de los grupos de orden cuatro.

4. RESULTADOS

En esta sección presentamos la caracterización de cada una las conexiones intramatemáticas identificadas a partir de las producciones de Lu al resolver la tarea propuesta en relación con la clasificación de los grupos de orden cuatro, y que se denotan por $C_i, i = 1, 2, 3$ (ver Cuadro 1). A continuación, se presenta el análisis de algunos extractos de la sesión de entrevista donde se muestran dichas conexiones.

Cuadro 1 – Conexiones matemáticas identificadas en la tarea resuelta por Lu

Conceptos	**Conexiones matemáticas**	**Tipo de conexión**
Grupo	(C_1) Un grupo finito de orden par tiene un elemento de orden dos (C_2) Existen dos formas posibles de llenar una tabla con cuatro elementos	Derivación Relación parte-todo Procedimiento
Isomorfismo y grupos isomorfos	(C_3) Hay dos grupos estructuralmente diferentes de orden cuatro	Comparación a través de características comunes Derivación

Fuente: Elaborado por los autores

4.1. Conexiones matemáticas asociadas al concepto de grupo

(C_1) *Un grupo finito de orden par tiene un elemento de orden dos*

Lu hizo una conexión de tipo *derivación* basada en su conocimiento de los axiomas de un grupo, ya que utilizó la unicidad del inverso para explicar por qué un grupo G de orden par tiene al menos un elemento de orden 2. La estudiante argumentó que, en un grupo de orden par, si no se considera al neutro, la cantidad de elementos restantes siempre es impar. Si ninguno de ellos fuese de orden dos, se tendrían que considerar parejas de elementos donde uno es inverso del otro, en cuyo caso, sobra un elemento, el cual necesariamente es su propio inverso, es decir, hay un elemento de orden dos. También consideramos que Lu estableció una conexión de tipo *relación parte-todo*, ya que su análisis se basó en los grupos de orden cuatro y seis como ejemplos de grupos de orden par y de esta manera logró establecer una generalización sobre la existencia de un elemento de orden dos.

***Investigador**: Explica por qué un grupo G de orden par tiene al menos un elemento de orden dos. En particular, G tiene un elemento de orden dos.*
***Lu**:* [...] *en este grupo de orden cuatro, si hay dos que sean del mismo* [orden] *y tenemos el neutro, ya llevamos tres. Entonces el que quede es de orden dos y así va a pasar siempre porque vamos a tener el neutro. Entonces, si los demás van a pares, por ejemplo, ...* Z_6 *de orden seis van, por ejemplo, dos de* [orden] *tres, dos de* [orden] *seis, son cuatro y tenemos el neutro y entonces nos queda uno de orden dos* [...]. *En un grupo de orden par como los que ya mencioné, tengo dos elementos que son inversos entre sí, un elemento que es el neutro, entonces el otro debe ser de orden dos, es decir, inverso de sí mismo.* [...] *Entonces tendría parejas y me queda un sólo elemento, que tendría que ser de orden dos ¿por qué? Porque es su propio inverso.*

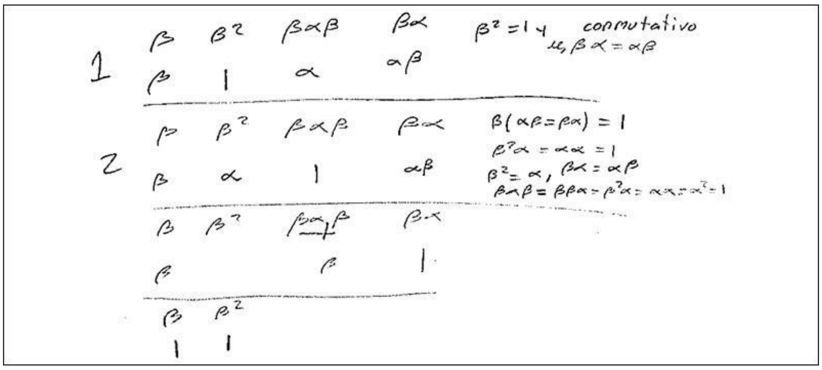
(C_2) *Existen dos formas posibles de llenar una tabla con cuatro elementos*

Lu presentó dificultades en la construcción de una tabla de operaciones de un grupo de orden cuatro a partir del subgrupo generado por el elemento de orden dos, α. En ese caso, le fue sugerido a Lu operar por la derecha por β, es decir, $\langle\alpha\rangle\beta = \{\beta, □□\}$, de donde la estudiante pudo explicar por qué el elemento □□ es distinto de los elementos *1,* □ □ □. La estudiante reconoció que en esta nueva tabla cada uno de los elementos en filas y columnas se deberían corresponder con alguno de los elementos 1, α, β y $\alpha\beta$. En palabras de Lu, "son esos elementos de las filas y columnas porque el grupo es cerrado". En ese sentido, Lu tenía claro que ninguna fila o columna de la tabla podía tener elementos repetidos, estableciendo una conexión de tipo *procedimiento*, asociada con el concepto de grupo, ya que, por ejemplo, no relacionó que el operar $\langle\alpha\rangle\beta$ era lo mismo que solicitarle hallar la clase lateral derecha, módulo el subgrupo considerado. A partir de la tabla, la primera inferencia que Lu hizo fue que el grupo tenía que ser abeliano, □□ = □□. Tomando en cuenta la fila de β, la estudiante inició la exploración de los casos para los cuales $\{\beta, □□,\ □^2, □□□\} = \{1, □, □, □□\}$. Lu dedujo que había sólo dos casos posibles en los que los elementos se pudieran relacionar, si: $\beta^2 = 1$ y $\beta^2 = \alpha$ (ver Figura 4). Estos dos casos corresponden a las formas posibles de llenar una tabla con cuatro elementos a partir del método propuesto en la tarea.

***Investigador**: En la tabla que construiste, si consideramos cualquier fila, digamos la de β* […] *¿qué relación hay entre éstos y los elementos 1, α, β, αβ?*
***Lu**:* […] *Deberían de relacionarse con β, 1, α y αβ.*
***Investigador**: ¿Cómo determinas quién es cada uno de ellos?*
***Lu**: Pues si fuera conmutativo,* β^2 *sería 1 y así βαβ sería α y éste sería éste* [*βα = αβ*].
***Investigador**: ¿Sería el único caso?*
***Lu**: No, también puede ser β pues es β,* β^2 *sería α nada más y éste* [el elemento *βαβ*] *al ser conmutativo pues se puede cambiar.* β^2, *aquí es 1 y G conmutativo* [el primer caso]. *El elemento βα es igual a αβ.* […] *Otro caso es* $\beta^2 = \alpha$.
***Investigador**: ¿Serán los únicos casos?*
***Lu**: Sí.*
***Investigador**: ¿Cómo lo sabes?*

***Lu**: Porque* […] *éste* [el elemento *βα*] *no puede ser identidad porque si lo hacemos identidad, aquí diríamos que éste* [el elemento *βαβ*] *estaría dividido así, entonces sería β y aquí tenemos β, ya está repetida, así que no se puede* [ver Figura 4].
***Investigador**: Y, ¿cómo sabes que β no es identidad?*
***Lu**: ¿β nada más? Pues no se puede.*
***Investigador**: ¿Por qué?*
***Lu**: Porque β es un elemento del grupo, y si ya está la identidad del grupo, ¿cómo β va a ser la identidad?* […] *Los únicos* [dos] *casos son éstos* [Indicados por los números 1 y 2 en la Figura 4].

Figura 4 – Dos casos posibles para $\{\beta,$ □□, □^{2}, □□□$\} = \{1,$ □, □, □□$\}$



Fuente: Producciones escritas de Lu

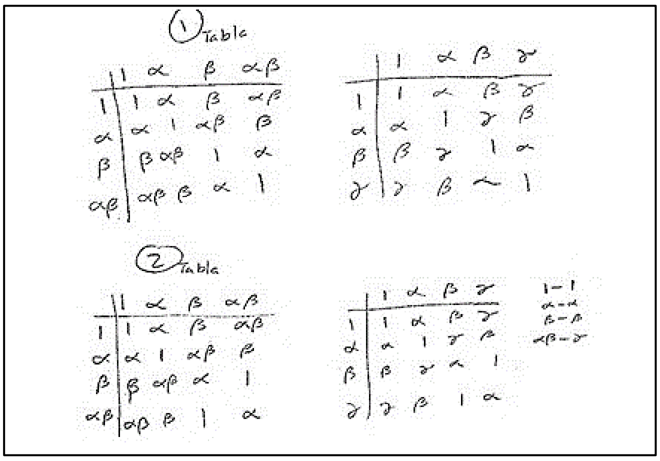
4.2. CONEXIONES MATEMÁTICAS ASOCIADAS A LOS CONCEPTOS DE ISOMORFISMO Y GRUPOS ISOMORFOS

(C_3) *Hay dos grupos estructuralmente diferentes de orden cuatro*

Al establecer una conexión de *comparación a través de características comunes*, Lu identificó dos grupos estructuralmente diferentes de orden cuatro, ambos conmutativos. En el primer grupo todos los elementos diferentes del neutro eran de orden dos, mientras que el segundo tenía dos elementos de orden cuatro (generadores del grupo) y uno de orden dos. Si bien *tener un elemento de orden finito dado* es una propiedad invariante de un grupo, es decir, una propiedad de *G*, tal que cualquier grupo *H* isomorfo a *G* tiene la misma propiedad, la estudiante no mencionó esto en su explicación. Además, a partir de la producción de Lu consideramos que hizo una conexión de tipo *derivación* cuando argumentó que estos grupos no eran similares (isomorfos) porque al intentar realizar un cambio de nombre resulta imposible establecer una relación entre los elementos de los grupos con diferente orden. Es decir, su argumento se basó en su conocimiento de la propiedad de isomorfismo, que permite el cambio de nombre de los elementos a través de una correspondencia biunívoca, aunque no hizo referencia explícita a este concepto.

Investigador: Ahora bien, ¿los grupos resultantes son isomorfos? [ver Figura 5]. Justifica tu respuesta
Lu: No.
Investigador: ¿Por qué?
Lu: En principio, pues si yo quisiera hacer una relación tendría que haber un elemento de un orden igual a otro elemento del mismo orden, podría relacionar a 1 y α con 1 y α, pero β y γ aquí son de orden dos [ver tabla 1 en Figura 5] *y aquí son de orden cuatro* [ver tabla 2 en Figura 5], *así que no los puedo hacer relacionar* […] *no se puede hacer esa relación entre los elementos para hacer un cambio de nombre.*
Investigador: Entonces, ¿cuántos grupos hay de orden cuatro?
Lu: De los grupos de orden cuatro solo hay dos tipos y las otras combinaciones posibles son parecidas a uno de ellos. Bueno, los dos son conmutativos, uno tiene dos elementos generadores y el otro ninguno.

Figura 5 – Dos grupos distintos de orden cuatro



Fuente: Producciones escritas de Lu

5. CONCLUSIONES

Esta investigación reporta las conexiones intramatemáticas comprendidas en la clasificación de los grupos de orden cuatro a partir de un estudio de caso. Se identificaron dos conexiones asociadas al concepto de grupo y una con los conceptos de isomorfismo y grupos isomorfos, y cada una de las conexiones se correspondieron con una o más categorías (tipos de conexiones). Los resultados indican que la estudiante llegó a ser consciente de las conexiones matemáticas establecidas una vez que resolvió y reflexionó sobre sus resultados y procedimientos al abordar la tarea propuesta. Si bien Lu realizó conexiones matemáticas, su conocimiento fue limitado en relación con los conceptos y resultados matemáticos subyacentes en la clasificación de los grupos de orden cuatro, por ejemplo, los conceptos de clases laterales y grupos isomorfos. Por lo tanto, interpretamos que en el proceso de resolución Lu iba descubriendo, construyendo y utilizando su nuevo conocimiento para avanzar. En ese sentido, las conexiones matemáticas establecidas por la estudiante están íntimamente relacionadas con su comprensión y el uso de su conocimiento en la resolución de la tarea. Por ejemplo, abordar una proposición a partir de la examinación de casos particulares para realizar conjeturas y no a través de argumentos generales; llenar una tabla de operaciones que represente un grupo de orden cuatro de forma procedimental, es decir, solo considerando que en filas y columnas no haya elementos repetidos; así como no poder argumentar por qué el orden de los elementos es una propiedad invariante que satisfacen los grupos isomorfos.

Finalmente, una implicación educativa a partir de la identificación de las conexiones matemáticas concierne al diseño de tareas para establecer conexiones explícitas con el objetivo de fortalecer la compresión de los conceptos y resultados subyacentes a la clasificación de los grupos de orden cuatro. También se destaca el uso de la historia de las matemáticas para favorecer en una presentación de los conceptos, teoremas, algoritmos de forma conectada a los estudiantes, en relación con los problemas e ideas que los generaron, en contraste con la comprensión procedimental que promueve la enseñanza actual en la determinación de todos los grupos de orden cuatro.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory—A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* (Doctoral dissertation). Simon Fraser University. Canada. Recuperado de: https://summit.sfu.ca/item/9245

Cayley, A. (1854). VII. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 7(42), 40-47. https://doi.org/10.1080/14786445408647421

Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*. 4 ed. Thousand Oaks: Sage Publications.

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 23(3), 297-319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education*.

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51(6), 967-994. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 227-252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: the case of constructing an operation table for a group. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 163-172. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00067-0

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. Los Angeles: Sage.

Larsen, S. (2009). Reinventing the concepts of group and isomorphism: the case of Jessica and Sandra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 119-137. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.06.001

Melhuish, K., & Fagan, J. (2018). Connecting the Group Theory Concept Assessment to Core Concepts at the Secondary Level. In N. H. Wasserman (Ed.). *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (pp. 19-45). Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_2

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics: An Overview*. National Council of Teachers of Mathematics.

Njie, B., & Asimiran, S. (2014). Case study as a choice in qualitative methodology. *IOSR Journal of Research & Method in Education*, 4(3), 35-40. https://doi.org/10.9790/7388-04313540

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM – Mathematics Education*, 51(7), 1043-1054. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01037-9

Singletary, L. M. (2012). *Mathematical Connections Made in Practice: An Examination of Teachers' Beliefs and Practices*. (Doctoral dissertation). University of Georgia. Athens. Recuperado de: https://getd.libs.uga.edu/pdfs/singletary_laura_m_201208_phd.pdf

Thrash, K. R., & Walls, G. L. (1991). A classroom note on understanding the concept of group isomorphism. *Mathematics and Computer Education*, 25(1), 53-55.

Wang, K., Wang, X. Q., Li, Y., & Rugh, M. S. (2018). A framework for integrating the history of mathematics into teaching in Shanghai. *Educational Studies in Mathematics*, 98(2), 135-155. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9811-x