Argumentar para demostrar matemáticamente en el aula

Camilo **Arévalo** Vanegas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Kmilo741a@gmail.com
Oscar J. **González** Pinilla
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Mónica A. **Diaz** Guarín
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Andreadg_323@gmail.com
Liz P. **Acero** Molina
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
lianllely@gmail.com

Resumen

Se indagó por los esquemas de argumentación que emergen de un grupo de estudiantes al interactuar con una situación problema en torno a la demostración geométrica. Algunos trabajos constatan el fracaso de la capacidad de los estudiantes para formular una demostración en matemáticas, Gascón (2001).
Ahora bien, se habla de argumentar, ya que está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo o en los que se certifica si algo es falso o verdadero; en este sentido la investigación analizará los esquemas argumentativos durante el proceso de demostración.
Con los elementos de reflexión determinados; se espera que un docente pueda considerar criterios asertivos, para valorar el conocimiento al que recurre un estudiante cuándo se enfrenta a un proceso de resolución de problemas y al análisis de los esquemas de argumentación que subyacen en la actividad demostrativa.

Palabras clave: Demostrar; Argumentar; Resolución de problemas; Esquema argumentativo; Situaciones problema; Situaciones didácticas.

Planteamiento del problema

Se indagó por los esquemas de argumentación que se pueden generar en cualquier espacio abierto a la disertación o al debate, obviamente desde ideales, posturas, justificaciones, conjeturas o razones para confrontar a un grupo de personas y buscar la veracidad de estas.

Un estudio realizado por Gutiérrez (2001), determina que los estudiantes no experimentan la necesidad de demostrar, especialmente al momento de establecer hipótesis, conjeturas o deducciones lógicas de una demostración, pero esto se debe a que los estudiantes conciben la matemática como la memorización de algoritmos, limitándose a copiar los procesos que plantea y desarrolla el docente en sus clases, como señala Gascón (2001) y Balacheff (1988), quienes formulan; ¿Qué nivel de comprensión alcanzan los estudiantes en una demostración, si ésta se basa única y exclusivamente en la imitación?

Se deduce que los estudiantes no ven la demostración como un proceso de validación de sus conjeturas, sino que, en general, se reducen a explicaciones confusas que no satisfacen lo que se esperaría pudieran argumentar al momento de demostrar, ya que centran su mirada en el producto final y en la imitación/reproducción de algoritmos.

Ahora bien, la actividad de generar argumentos debe tener un carácter social y subyacen en el momento de validar cualquier tipo de afirmación (Toulmin, 2003), para ello, es necesario que los problemas que exijan la actividad argumentativa, deben ser abiertos, es decir, no podrá asegurarse un resultado o conclusión rápida, ya que como lo afirma: “Para el caso de la elaboración de argumentos orales, debe examinar que la solución no se restrinja a elaborar una respuesta sino a buscar alternativas de solución que garanticen el carácter de claridad, concisión, adecuación y de menor ambigüedad” (p. 3).

Por tal razón, al efectuar razonamientos sobre una situación, se garantiza que el estudiante genere conocimientos que posteriormente pueda aplicar en otra situación, como dice Duval (2000) (Citado por Gutiérrez, 2001), “es posible llegar a demostrar en el aula de clase desde los propios procesos de argumentación del estudiante, concibiendo el argumentar y el demostrar como un continuo, aunque con procesos diferentes de abstracción” (p. 145); esto para resaltar la actividad del estudiante, como sujeto crítico, propositivo y reflexivo de sus acciones.

En este sentido, la investigación tuvo como propósito responder a la pregunta: ¿Cuáles son los esquemas de argumentación que emergen en la práctica demostrativa de estudiantes de grado noveno y qué características tienen dichos esquemas?

Fundamentación teórica

Antes de trabajar en la tarea demostrativa es necesario reconocer que es demostrar, como se demuestra y que características debe tener un argumento para llegar a demostrar, es aquí cuando se establece la relación entre argumentar y demostrar que, aunque no son lo mismo, son procesos dependientes a la hora de abordar una serie de situaciones problema.

Ahora bien, Gutiérrez (2001) propone una clasificación que complementa la teoría de Balacheff (1988), está se enfoca en la interpretación, el análisis y razonamiento de situaciones en la geometría, enmarcando las demostraciones en dos grandes grupos, <u>demostraciones empíricas</u> en las que el elemento de verificación son los ejemplos y las <u>demostraciones deductivas</u>, que se basan en el análisis y razonamiento de propiedades de abstracción formal. (Véase la figura 1)

Demostraciones empiricas	Demostraciones deductivas
Empirismo naif o ingenuo: los estudiantes seleccionan ejemplos específicos, reconociendo propiedades a través de la manipulación o la visualización (métodos perceptivos)	**Experimento mental:** aunque la demostración puede llegar a ser deductiva y abstracta, todavía se reconoce la ayuda del ejemplo, por tal razón se enmarcan dos tipos de experimentos; los *transformativos*, cuando la demostración se basa en la modificación de un enunciado y los *axiomáticos*, cuando la demostración es lógica y se sustenta a través de teoremas, definiciones y postulados, que garantizan y verifican su proceso.
Experimento crucial: aunque los estudiantes saben que es primordial la generalización en la demostración, lo hacen con el ejemplo menos especifico, estableciendo cuatro estructuras, la *ejemplificación*, cuando la demostración es mostrar un experimento crucial, el *constructivo*, cuando demuestra como obtuvo el ejemplo, el *analítico*, cuando la demostración se basa en propiedades matemáticas y el *intelectual*, cuando la demostración se separa de lo empírico y se basa en propiedades matemáticas y relaciones deductivas.	
Ejemplo genérico: buscan evidenciar las transformaciones y propiedades abstractas, a través de la lógica matemática, pero todavía por medio de un ejemplo, teniendo en cuenta la etapa de generalización.	**Demostración formal:** sus demostraciones muestran una serie de pasos lógicos formales y sin recurrir a ejemplos.

Figura 1. Categorización de los procesos de prueba y demostración. Gutiérrez (2001)

Para identificar las acciones de los estudiantes, se consideró a Mason, Burton & Stacey (1992), quienes aluden a la resolución de problemas en matemáticas desde los procesos cognitivos "particularización y generalización" y con la propuesta de Polya (1989) del quehacer matemático dentro de un ambiente de resolución de problemas. (Véase la figura 2)

Una de las discusiones en las que se enmarcó la investigación, y que es necesario aclarar, es que los procesos de argumentación son diferentes a la demostración, ya que el primero habla de criterios de pertinencia y convencimiento del otro y de sí mismo, mientras que el segundo debe tener un sustento teórico válido y formal para mostrar la veracidad de un enunciado. El fin de cada una es diferente, la argumentación busca lo creíble en actividades de coherencia y la demostración busca la verdad desde los postulados de la lógica.

	Comprender el enunciado	Confección de un plan	Ejecución del plan	Examinar solución/ visión retrospectiva
POLYA	1.- ¿Entendemos el problema? 2.- ¿Podemos replantear el problema en nuestras propias palabras? 3.- ¿Distinguimos cuáles son los datos? 4.- ¿Sabemos a qué queremos llegar? 5.- ¿Hay suficiente información? 6.- ¿Hay información extraña? 7.- ¿Es este problema similar a algún otro que hemos resuelto antes?	1.- Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura). 2.- Buscar un Patrón 4.- Resolver un problema similar más simple. 6.- Hacer una figura. 7.- Hacer un diagrama 8.- Usar propiedades 9.- Resolver un problema equivalente. 12.- Trabajar hacia atrás. 13.- Usar casos. 14.- Usar un modelo. 17.- Usar análisis dimensional.	1.- Implementar la o las estrategias que dedujimos o escogimos. 2.- Tomar el tiempo razonable y que sea necesario para resolver el problema. 3.- solicitar sugerencias 3.- Si es necesario hay que volver a empezar.	1.- ¿Es la solución correcta? ¿La respuesta satisface lo establecido en el problema? 2.- ¿Hay una solución más sencilla? 3.- ¿Podemos ver cómo extender nuestra solución a un caso general?
	Fase de abordaje	**Fase de ataque**		**Fase de revisión**
Mason Burton Stacey	Prepara el terreno para un posterior ataque eficaz y se debe dedicar el tiempo conveniente, es decir ¡leer atentamente el problema! El trabajo en esta fase se estructura hacia tres preguntas: ¿Qué es lo que sé?, ¿Qué es lo que quiero? y ¿Qué puedo usar?	Esta fase inicia cuando el problema ya se ha instalado en la mente, cuando la persona se ha apropiado de él y termina cuando se abandona o resuelve. En esta fase se pueden poner en juego diversos planes y ensayar diferentes enfoques.		Cuando se tiene una solución o se abandona el problema se revisa el trabajo hecho. Esto requiere comprobar lo que se hizo y reflexionar sobre los procesos a la par

Figura 2. Fases y etapas de resolución de problemas Polya (1989) y Mason, Burton & Stacey (1992)

Un argumento tiene lugar cuando a partir de unos **datos** se elabora una **afirmación** (conclusión). El paso de los **datos** a la **conclusión** es el **garante** y hace referencia a una regla o principio general. El **garante**, también se debe sustentar en un grupo de afirmaciones que hacen parte de un conjunto de contenidos o creencias denominado **respaldo**. Las refutaciones o reservas son el conjunto de circunstancias en las cuales el garante se podría anular. (Carranza, et al., 2013). (Véase la figura 3)

El aprendizaje en matemáticas debe ser significativo para el estudiante y el docente debe estar atento al desarrollo y evolución de este, enfatizando primordialmente en el saber matemático, como lo menciona Camargo (2013); es así como debemos librarnos de evaluaciones donde cada vez es más recurrente el examen escrito y donde los argumentos del estudiante frente a lo que hace no es tenido en cuenta.

Según Vygotski (1929) (Citado en Vergel, 2014) se puede plantear una distinción entre los procesos mentales naturales “inferiores” de la percepción, la atención, la memoria y la voluntad, ya que estas se enfatizan en proceso generales y las funciones “superiores” que aparecen bajo la influencia de los instrumentos simbólicos o en este caso como se le denominaría a la emergencia de los esquemas de argumentación a la hora de realizar la denostación en geometría.

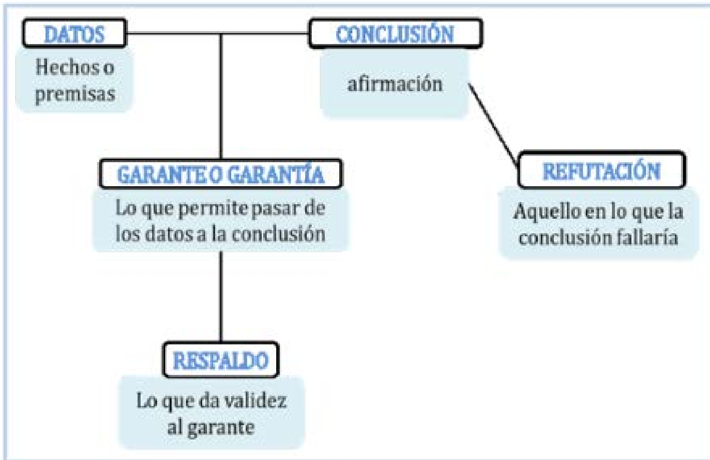

Figura 3. Estructura de un argumento de Toulmin. Carranza (2013)

Metodología de investigación

La propuesta se desarrolló como una investigación de carácter cualitativo en tanto se encarga de indagar y describir textualmente lo sucedido en los momentos de resolución de problemas; desde un diseño fundamentado en los esquemas de argumentación que emergen al demostrar.

Es de carácter descriptivo, porque busca definir y especificar los esquemas de argumentación que intervienen en el proceso de resolución de situaciones geométricas, en cuanto su principal objetivo es identificar y caracterizar aquellos esquemas argumentativos que se generan en el aula con miras a trabajar frente a la necesidad de demostrar en geometría.

Al adoptar la investigación de carácter cualitativo como enfoque teórico y metodológico, fue necesario reconocer el contexto en el que se desenvuelve el estudiante, con el fin de que las situaciones problema que se propongan sean creíbles, lógicas y permitan acciones de estos para darles solución.

La investigación se llevó a cabo en la IED Hernado Durán Dussan que se encuentra ubicada en la localidad de Bosa, cuenta con 800 estudiantes en la jornada mañana; es de naturaleza oficial, imparte una educación integral fundamentada en los valores. La población es el grado Noveno que lo integran 42 estudiantes, dependen económicamente del sustento de sus padres y sus edades oscilan entre los 14 y 16 años.

Las técnicas de recolección de la información fue la observación, por tal motivo se usaron dispositivos mecánicos (videograbación), estableciendo un registro fílmico de los diversos aspectos y sujetos observados.

La situación problema presentada a los estudiantes puso en juego su creatividad para diseñar y crear; por lo que se fue indispensable obtener datos a través de los archivos, cálculos o registros elaborados por el estudiante, por tanto cada integrante del grupo llevaba un cuaderno resolutor (Carpeta); en el que consignó cada proceso, argumento, idea, duda, etc. que surgía durante el proceso demostrativo; el objetivo de ello es que no se pierda ninguna afirmación, argumento, justificación o pregunta, que se genere en el proceso demostrativo.

Cabe aclarar que las dos primeras sesiones se realizaron de manera individual, mientras el estudiante identificaba la situación y se apropiaba del trabajo, durante las siguientes cuatro sesiones se desarrolló de forma grupal, considerando que la producción argumental y discursiva de los estudiantes emergía mucho más al trabajar en equipos.

Es importante aclarar que, en las carpetas de los estudiantes, se plantearon preguntas orientadoras y la situación problema con su respectiva gráfica, (Ver figura 4):

Uno de los terrenos en la finca de don Gustavo tiene forma de triángulo equilátero, bordeado por dos canales de riego. Él quiere sembrar plantas de arroz de tal forma que la distancia de cada planta a cada canal sea la misma

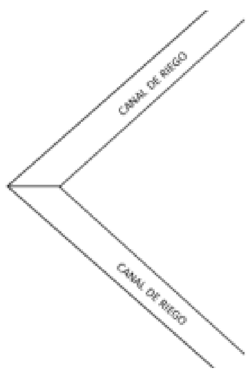

Figura 4. Presentación de la situación

Las preguntas orientadoras de la situación:

- ¿Dónde se podría llegar a sembrar las plantas? (Ten en cuenta el gráfico)
- ¿Cuántas plantas de arroz se pueden sembrar?
- ¿Cómo podría describirle a Don Gustavo el sitio donde debe sembrar las plantas? (Ten en cuenta el gráfico)

Ahora bien, antes de la implementación, la función del investigador era fijar diferentes respuestas que los estudiantes podrían realizar a cada pregunta, estableciendo variables en el proceso de resolución de problemas y brindando al estudiante la manera de abordar la situación sin llegar afectar o inmiscuirse en el proceso de resolución de estas.

Descripción de los datos

En la solución planteada por la estudiante Nº4 (Ver figura 5) al determinar ¿dónde deben estar ubicadas las plantas?, señala que las plantas deben quedar entre los canales de riego o quedar exactamente en medio de ellos.

Se presenta la articulación de la propuesta de Toulmin (2003) respecto a las evidencias que surgieron por parte de la estudiante; de sus afirmaciones y razones se generó el siguiente esquema que representa el argumento emitido para convencer al docente de la solución propuesta; su manera de convencer se enfatiza en explicar las razones por las cuales garantiza que las plantas estén ubicadas en un sitio especifico; pero, cabe aclarar, que al recurrir al contenido y definición de los paralelogramos la estudiante garantiza dicha cuestión, estableciendo una red de conceptos enlazados en los que podría llegar a construir conceptos como la bisectriz teniendo en cuenta las propiedades y características del mismo.

En esta ocasión se transcribe la producción de la estudiante al responder la entrevista y por medio del dialogo se enuncia lo declarado y se contrasta con la teoría propuesta para rescatar los elementos del argumento y de alguna manera llegar a caracterizarlos.

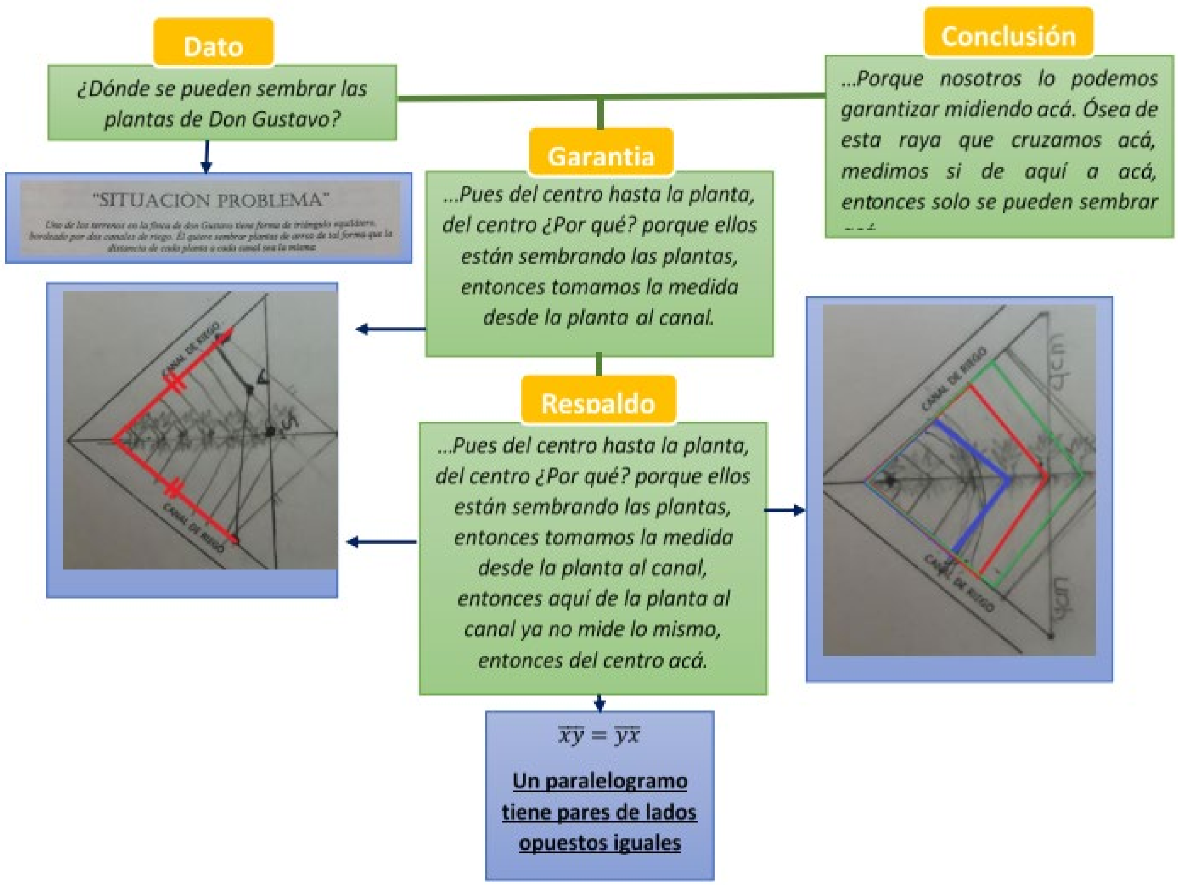

Figura 5. Esquema de argumentación

En el esquema argumentativo se contemplan los elementos de todo modelo de argumentación de Toulmin (1958); en el que la estudiante expone sus diseños en forma de dato estableciendo que es lo que le pide la situación, lo que plantea y lo que expone su enunciado.

Se evidencia la articulación entre los conceptos teóricos de la propuesta y los datos que surgieron en la implementación del instrumento, para ello se construyó el esquema de argumentación, aseverando que este alcanza cuatro de los elementos que tiene un argumento.

Conclusiones y reflexiones finales

Como se evidencia, la resolución de situaciones problema garantiza el surgimiento de una actividad argumentativa en los estudiantes, constituyendo distintas definiciones matemáticas; donde se ponen en juego los elementos del modelo argumentativo de Toulmin, apoyado en las justificaciones que emergen en una secuencia argumentativa lógica dentro de las matemáticas.

En este sentido, se manifiesta que el modelo argumentativo de Toulmin es aplicable en cualquier espacio abierto a la disertación, al debate y al diálogo, no solo para esquematizar la ruta argumentativa, sino también para caracterizar las acciones de reflexión sobre la argumentación.

Es por ello, que la propuesta generó esquemas de argumentación dentro de procesos de socialización y resolución de problemas, y de esta manera surgió la necesidad de generar procesos de justificación en el aula, donde el estudiante en lugar de memorizar y reproducir, se concientice sobre la responsabilidad de crear, justificar y validar, superando algunos problemas de enseñanza de la demostración y su trivialización en las prácticas docentes actuales.

Para finalizar, desde la propuesta de Gutiérrez (2001) no solo se hablaría de una demostración empírica que nace desde los mismos procesos ejercidos por el estudiante, sino por el contrario se estaría hablando del paso a las demostraciones deductivas y más específicamente a la etapa de experimento mental, ya que la estudiante por medio del ejemplo y al tomar medidas exactas del gráfico que otorgaba la situación, logró determinar que los lados del paralelogramo iban a ser iguales y que justo el lado que compartían se convertiría en el sitio específico donde Don Gustavo debía sembrar las plantas de arroz y todo esto, desde la caracterización con los elementos del argumento que plantea Toulmin.

Bibliografía y referencias

Balacheff, N. (1988). Procesos De Prueba En Los Alumnos De Matemáticas. (Traducción. Primera Edición: Agosto 2000). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Camargo, L. Gutiérrez, A. & Fiallo, J. (2013). Acerca de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en matemáticas. Revista de integración, 31(2), 181-205.

Carranza, E., Álvarez, I., Ángel, L., & Soler, M. (2013). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. Números, 85(1), 75-90.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), 129-159.

Gutiérrez, A. (2001). Procesos De Prueba En Los Alumnos De Matemáticas. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1992). Pensar matemáticamente. (1. ª ed. - 2. ª reimpresión, 1.992). Barcelona: Labor.

Polya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. (15ª reimpresión). Serie Matemáticas. (Traducción, Prof. Zugazagoitia). México: Trillas

Toulmin, S. (2003). The uses of argument. (Updated Edition). England: Cambridge University Press.

Vergel, R. (2014). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. PNA, 9(3), 193-215.