Las funciones semióticas en investigaciones sobre Educación Matemática. El caso particular de los profesores de Matemáticas al abordar tareas de ecuaciones algebraicas

Gladys **Mejia** Osorio
Secretaria de Educación de Bogotá
Colombia
gladys6m@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta cómo las funciones semióticas permiten poner en evidencia las relaciones y las dificultades que encuentra un grupo de profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, relacionadas con una tarea sobre interpretaciones de ecuaciones, y como estas relaciones y dificultades son similares a las que encuentran los estudiantes. En el análisis de los datos se emplean algunos lineamientos metodológicos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS). Se evidenció que los profesores reconocen la equivalencia sintáctica entre dichas expresiones, pero no su equivalencia semántica, pues al dotarlas de sentido y significado las asocian con objetos matemáticos diferentes, basados en que tales ecuaciones tienen formas diferentes; estas dificultades son similares a las reportadas con estudiantes.

Palabras clave: Semiótica; Funciones semióticas; Educación Matemática; Sentidos Tratamiento; Articulación de Sentidos.

Introducción

En la última década diversos estudios en Didáctica de las Matemáticas resaltan la importancia que tienen los aspectos semióticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en tanto, las representaciones semióticas son la única vía para acceder y manipular los objetos matemáticos. Al respecto, Duval (1993, 2017) plantea que los objetos matemáticos no son perceptibles directamente por los sujetos sino vía las representaciones semióticas que permiten denotarlos y a su vez posibilitan una manipulación sobre estos.

Uno de los objetivos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas radica en que tanto estudiantes como profesores reconozcan un mismo objeto matemático por medio de diferentes representaciones semióticas, que les posibilite expresar y representar ideas matemáticas, así como transformar una representación semiótica de un objeto matemático en otra, tanto al interior de un mismo registro de representación semiótica como entre registros diferenciados, transformaciones que este autor denomina *tratamientos* y *conversiones,* respectivamente.

Respecto a las conversiones y tratamientos D´Amore (2006), Santi (2011) y Rojas (2012) muestran evidencias que las dificultades en la comprensión de las matemáticas se asocian con las transformaciones de tratamiento y no solo son relacionados con las transformaciones de conversión como lo manifiesta (Duval, 2004). Por su parte D´Amore (2006) reporta la experiencia que ha tenido con algunos estudiantes quienes, frente a una representación simbólica de un objeto matemático, asignan un cierto sentido, realizan de manera adecuada transformaciones a dicha representación, en el interior del respectivo sistema semiótico de representación, obteniendo otra representación del mismo objeto al cual le asignan un nuevo sentido, pero éste no es relacionado entre sí con el sentido inicial, aspecto que permite concluir que en matemáticas las transformaciones de tratamiento podrían ser causa de dificultades en la aprehensión de objetos matemáticos por parte de los aprendices.

En otras palabras, se presenta el siguiente fenómeno: una misma persona que realiza correctamente transformaciones semióticas de tratamiento pasando de una representación semiótica a otra representación de un objeto matemático, conservando el mismo registro semiótico, atribuye significados diversos a las dos escrituras, hecho que evidencia que el significado asignado intuitivamente al objeto O cambia, en la mente de un estudiante, lo que D´Amore (2006) ha denominado como **cambio de sentido** y Rojas (2012) como **no articulación semiótica.** El presente estudio centra la atención en la transformación semiótica de tratamiento, y tiene como propósitos indagar sobre las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para relacionar entre sí los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante tratamiento, además de establecer similitudes y diferencias con respecto a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas.

Fundamentación teórica

Para el análisis de las producciones de los profesores se empleó algunas herramientas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), para el caso particular de este trabajo se muestra las relaciones que establecen los profesores por medio de las funciones semióticas. Desde el enfoque ontosemiótico se considera un objeto matemático como todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se hace, se comunica o se aprende matemáticas (Godino, 2002). La práctica matemática es asumida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartida en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar o generalizar la solución a estos problemas (Godino, et al., 2012).

En la práctica matemática se activa una **configuración** de objetos primarios que describen seis tipos (Font, et al., 2013), a saber: (1) El ***Lenguaje*** (términos, expresiones, gráficos, etc.); (2) Los ***Conceptos*** (mediante definiciones o descripciones); (3) Las ***Proposiciones*** (enunciados sobre conceptos); (4) Los ***Procedimientos*** (algoritmos, operaciones, técnicas, etc.); (5) Las ***Situaciones*** (problemas, tareas, ejercicios, etc.); y (6) Los ***Argumentos*** (validan las proposiciones y procedimientos).

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las diferentes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002). En este estudio el análisis se centra en la faceta ***expresión-contenido***, debido a que permite clasificar las relaciones que establecen los sujetos por medio de las funciones semióticas entendida como una correspondencia entre un objeto **antecedente**[1] [expresión - significante] y un **consecuente** [contenido - significado] establecidos por un **sujeto** [persona o institución] según un criterio o regla de correspondencia. En términos de funciones semióticas Rojas (2012) asume la ***articulación semiótica*** como el proceso de encadenamiento semiótico en el que a una misma expresión/antecedente se le asignan dos contenidos/consecuente diferentes que se relacionan entre sí; de manera análoga se asume la no articulación semiótica como el proceso interrumpido de encadenamiento semiótico en el que a una misma expresión/antecedente se le asignan dos contenidos/consecuente diferentes que no se logran relacionar entre sí.

Metodología

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Rodríguez, et al., 1996; Goetz &Lecompte, 1988), el cual resulta pertinente para analizar los sentidos asignados a representaciones semióticas y las dificultades que encuentra un grupo de profesores de matemáticas en el ejercicio de relacionar entre sí los sentidos asignados a representaciones semióticas que se obtienen mediante tratamiento, lo que ha sido denominado ***articulación semiótica*** (Rojas, 2012, 2014). Para estudiar el fenómeno de la *articulación de sentidos* o *articulación semiótica* se realizó un *estudio de caso colectivo*, debido a que el fenómeno a estudiar tiene múltiples variables (Stake,1994) como: la formación matemática de los profesores matemáticas que incide en el lenguaje matemático utilizado; los signos empleados; los significados que otorgan a estos; las representaciones movilizadas; las que son movilizadas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; los significados personales otorgados a los diferentes objetos matemáticos; la visión epistemológica y ontológica de las matemáticas, etc.

La población estuvo conformada por 32 profesores de educación secundaria en ejercicio.[2] Para identificar las dificultades se seleccionaron aquellos profesores que, mínimo en tres tareas

[1] Desde el EOS se diferencia los tres elementos que intervienen en una función semiótica: por un lado, la expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo); por otra parte, el contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor); y finalmente se tiene una referencia al criterio o regla de correspondencia, es decir, el código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido.

[2] La población que hace parte de este estudio está conformada por profesores que se desempeñan en educación secundaria (media vocacional, 16-18 años), ubicados en 8 regiones de Colombia (Atlántico, Magdalena, Huila, Antioquia, Guajira, Bogotá, Zona rural de Bogotá y Cundinamarca).

de las cuatro propuestas, aplicaron una serie de procedimientos y reglas matemáticas (tratamientos) que les permitió reconocer la equivalencia sintáctica de expresiones, pero que desde el aspecto semántico no relacionaron entre sí los sentidos o significados de dichas expresiones, y por tanto no establecieron una articulación semiótica. Los análisis y resultados que se presentan en este documento corresponden a la tarea sobre interpretación de ecuaciones, la cual fue trabajada previamente por Rojas (2012) con una población conformada por estudiantes de secundaria (media vocacional). Tarea que se describe a continuación:

(Tarea – Interpretaciones de ecuaciones). *En lo que sigue, asuma que* **x** *e* **y** *representan números reales cualesquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y no continúe con el siguiente sin haber respondido completamente el punto anterior.*

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$$

2. ¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{xy} - 1 = 0$?
   (a) Marque con una **x** la respuesta que considera correcta: ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) En caso afirmativo compruebe la equivalencia; en caso negativo explique por qué no se cumple
3. Complete el enunciado de la siguiente pregunta, escribiendo en el espacio punteado la respuesta que usted dio anteriormente (ítem 1), y luego respóndala.

¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{x+y}$, es ______________________________ ?
   (a) Marque con una **x** la respuesta que considere correcta: ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.

La tarea presenta la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, la cual corresponde a una "cónica degenerada" (dos rectas paralelas). Cabe señalar que algunas personas pueden aludir que en las evidencias que aquí se presentan los profesores no reconocen desde lo sintáctico la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, en tanto el sentido asignado inicialmente no corresponde con el significado institucionalmente establecido, aspecto importante pero que no es relevante en el presente estudio, puesto que se desea mostrar que los sentidos asignados están relacionados con la "forma" de la ecuación, por ejemplo, en este caso una ecuación cuadrática, un polinomio o, incluso, una circunferencia, y, la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, es relacionada con una ecuación lineal o la suma de números reales igual a su inverso.

Resultados

Frente a los resultados obtenidos sobre la interpretación de las ecuaciones $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ y $x + y = \frac{1}{x+y}$, los profesores asignan sentidos en relación con la forma de estas, por ejemplo, la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, es relacionada con una circunferencia, una ecuación de segundo grado o un polinomio de segundo grado, etc. La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, es asociada con una ecuación lineal o con la suma de dos números reales igual a su opuesto. Frente a esta tarea: 4 profesores que conforman el estudio de caso colectivo realizan una interpretación a la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, demuestran que esta ecuación es equivalente a $x + y =$

$\frac{1}{x+y}$ [equivalencia sintáctica], pero al dotar de sentido y significado la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, esta no coincide con la interpretación asignada inicialmente [equivalencia sintáctica].

Las soluciones realizadas por el grupo de profesores permiten identificar 15 funciones semióticas que éstos establecen. En el primer ítem que indaga por la interpretación que los profesores asignan a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, fungiendo como el antecedente de las funciones se identifica; la función **F1,** *«una figura de puntos (x, y), tales que $(x + y) = 1$»;* segundo, la función **F2,** «*suma del cuadrado de dos números reales con el doble de su producto disminuido en uno*»; tercero, la función **F3,** «*ecuación cuadrática*»; cuarto, la función **F4,** «*trinomio cuadrado perfecto*»; quinto, la función **F5,** «*una ecuación de alguna representación cónica*»; sexto, la función **F6,** «*una recta cuyo intercepto es 1 y pendiente -1*»; séptimo, la función **F7,** «*relación entre dos variables*», octavo, la función **F8,** «una curva»; noveno, la función **F9,** «*expresión algebraica*»; décimo, la función **F10,** «*una circunferencia*»; la función **F11** «*una diferencia de cuadrados».* Al asignar significado a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, que funge como antecedente de las funciones se identifican los consecuentes de las funciones **F12,** «*una igualdad entre un número y su inverso»*, la función **F13,** «*igualdad entre dos cantidades o expresiones algebraicas con $x + y \neq 0$*» y la función **F14,** «*una ecuación lineal*». Finalmente, la función semiótica **F15,** en el cual los profesores corroboran y reconocen la equivalencia sintáctica entre las ecuaciones. Los cuales fungen como consecuentes de las funciones.

Conclusiones

Con base a los resultados encontrados se encontró evidencias, si bien algunos profesores que reconocen la ***equivalencia sintáctica*** entre las expresiones algebraicas (ecuaciones), no necesariamente logran articular los sentidos asignados a dichas expresiones y, por tanto, no reconocen la ***equivalencia semántica*** entre ellas, pues al dotar de sentido o significado dichas expresiones se les asocia con objetos matemáticos o situaciones diferentes. Los resultados corroboran que no solo las transformaciones de conversión se relacionan con dificultades en la comprensión de un objeto matemático, sino que estas dificultades también son asociadas con las transformaciones de tratamiento (D´Amore 2006, Santi 2011, Rojas 2012), incluso por parte de profesores de matemáticas en ejercicio.

El trabajo realizado por el grupo de profesores de matemáticas reportado en este estudio muestra que el análisis mediante las funciones semióticas posibilita reconocer las relaciones que establecen los profesores que dejan en evidencia algunas similitudes entre las dificultades que encuentra este grupo y las dificultades que encuentran los estudiantes, al realizar la misma tarea, para articular sentidos asignados a expresiones matemáticas obtenidas mediante tratamiento, previamente reportadas en la literatura. Tomando como referencia los resultados documentados por Rojas (2012) frente al trabajo realizado por los estudiantes, uno de los grupos en los que se clasifican las dificultades encontradas es el denominado “reconocimiento icónico de las expresiones”. En el presente documento se muestran evidencias de que los sentidos asignados a expresiones algebraicas por parte de los profesores de matemáticas también se relacionan con dicho “reconocimiento icónico” de dichas expresiones.

Los resultados obtenidos muestran que tanto estudiantes como profesores asignan sentidos a las expresiones (ecuaciones) $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$ en relación con un reconocimiento icónico de tales expresiones. Las producciones de los profesores se clasificaron en los siguientes subgrupos:

a) ***Forma de las variables***. Los profesores que se ubican en esta subcategoría reconocen la equivalencia de las ecuaciones desde el punto de vista sintáctico, pero que dotar de sentido y significado la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no reconocen dicha igualdad (equivalencia semántica). Al respecto Rojas (2012) mostro evidencias que éste tipo de argumentos son similares a los dados por los estudiantes quienes expresan que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no corresponde a una circunferencia puesto que: "*no puede ser una circunferencia, porque en una (ecuación) las variables están al cuadrado y en otra no*», la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, "*no se ve como una circunferencia, porque uno parte de que la circunferencia, como ecuación básica, es [...] cuando ambas variables están al cuadrado*" (Rojas, 2012, p.78). Al igual que los profesores, los estudiantes aceptan la equivalencia ***sintáctica*** entre las dos ecuaciones, aplican las transformaciones de tratamiento requeridas y reconocen que a partir de una ecuación se puede obtener la otra. Resultados que muestran, que tanto, para los profesores como para los estudiantes prima la percepción de la ecuación como un *ícono* asociado a la "*circunferencia*", "*parábola*", "*ecuación de segundo grado*", etc., caracterizada por tener las variables elevadas al cuadrado, sobre la comprobación de la *equivalencia sintáctica* realizada inicialmente.

b) ***Restricción en los dominios***. En este subgrupo se encuentran los profesores que reconocen que ambas ecuaciones son equivalentes, pero la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no corresponde con el sentido asignado a la primera ecuación puesto que, la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, tiene unas restricciones respecto a los valores que pueden tomar x e y, en el cual $x \neq -y$, argumentan "*no, aunque son expresiones equivalentes la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, tiene más restricciones en su dominio $x + y \neq 0$*», «*puesto que, la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, tiene unas restricciones respecto a los valores que puede tener x e y, en los números reales es decir que $x \neq -y$* »". Estos resultados muestran, que tanto para los profesores como estudiantes prima la percepción de la expresión como un ícono asociado a una circunferencia, una ecuación de segundo grado, o un polinomio de segundo grado, etc., que se caracteriza por tener las variables elevadas al cuadrado, o como manifiestan algunos profesores la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$ tiene un dominio más restringido, aspectos que influyen para ver las expresiones como dos objetos matemáticos diferentes (no reconocen la equivalencia semántica).

Los resultados permiten concluir que las dificultades encontradas por los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas, obtenidas mediante tratamiento, son similares a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas, en tanto admiten la equivalencia sintáctica entre dos expresiones algebraicas, pero no reconocen la equivalencia semántica de las mismas.

Referencias y bibliografía

D'Amore. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En Radford, L. y D'Amore, B. (eds.). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. Relime, 9(4), pp. 177-196. Disponible en línea: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/580%20Objetos%20y%20sentido%20RELIME%20speciale.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5(1), 37–65. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega, Trad.) Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations.* Edited by Tânia M.M. Campos. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*: 237-284. Recuperado: https://www.researchgate.net/publication/282325795_Un_enfoque_ontologico_y_semiotico_de_la_cognicion_matematica

Godino, J. D; Castro, W.; Ake, L. &Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema. 26*(42B), 483-511. https://doi.org/10.1590/s0103-636x2012000200005

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata. Recuperado de: https://upeldem.files.wordpress.com/2018/03/libro-etnografc3ada-y-disec3b1o-cualitativo-en-investigacic3b3n-educatica-j-p-goetz-y-m-d-lecompte.pdf

Rodríguez, G. Gil, J. & García, E. (1996). *Métodos de investigación cualitativa.* Málaga: Aljibe. https://doi.org/10.24310/mgnmar.v2i2.12937

Rojas, P. (2012). Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos. Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de: 327 Universidad Distrital Francisco José de Caldas Doctorado Interinstitucional en Educación. Recuperado de: https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/16315/RojasGarzonPedroJavier2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Rojas, P. (2014). Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. DOI: https://doi.org/10.14483/9789588832333

Santi, G. Objectification and semiotic function. *Educ Stud Math 77, 285–311* (2011). https://doi.org/10.1007/s10649-010-9296-8

Stake, R. (1994). Case Study, en N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 236-247). London: Sage. Recuperado de_ https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Investigacion-con-estudios-de-caso.pdf