



Pensamiento funcional en básica primaria: Uso de sistemas de representación

Marcela **Angarita** Celis

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

Marcelangarita13@hotmail.com

Solange **Roa-Fuentes**

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

roafuentes@gmail.com

Resumen

El presente trabajo hace parte de una investigación en curso que se desarrolla en el ámbito del pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-11 años) en Colombia. Nos centramos en el enfoque funcional del *early algebra* basado en el estudio de las relaciones entre dos variables que instaura a las funciones como contenido matemático central. Pretendemos describir el pensamiento funcional de los estudiantes a través de la identificación y descripción de los sistemas de representación que emplean cuando abordan tareas sobre funciones. Tomamos como referencia los sistemas de representación que se reportan diferentes investigaciones y esperamos identificar el uso de estos a través de la implementación de cuestionarios y entrevistas semiestructuradas con estudiantes de primer, tercer y quinto grado de educación básica primaria.

Palabras clave: Educación primaria; Early algebra; Álgebra temprana; Pensamiento algebraico; Pensamiento funcional; Sistemas de representación.

Introducción

Desde el aspecto curricular es evidente el propósito de desarrollar en los estudiantes la capacidad de razonar algebraicamente, dejando de lado la idea de que sólo es posible en los últimos niveles escolares. Las investigaciones que se han ocupado de estudiar el problema de la incorporación del álgebra desde los primeros años escolares lo han denominado la propuesta de

cambio curricular “*Early algebra*”, que propone introducir el álgebra desde la primaria integrándola con los contenidos usuales en clase de matemáticas. No se estaría iniciando otra asignatura, se estudia el álgebra como una forma de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas (Vergel, 2014). Con este enfoque se busca que los estudiantes además de comprender puedan encontrar un significado a las matemáticas que están tratando. En el mismo sentido, Callejo, García y Fernández (2016) mencionan que con esta perspectiva “se propone organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas, tratando de que haya una continuidad sin necesidad de introducir nuevos tópicos” (p. 6).

Según Kaput (1998) podemos pensar en el álgebra a partir de tres ramas centrales: el álgebra como aritmética generalizada; el álgebra como la aplicación de un conjunto de lenguajes de modelado; y el álgebra como estudio de funciones, relaciones y variaciones conjuntas, que involucra la generalización hacia la idea de función. Esta última es la aproximación del álgebra escolar que asumimos en este trabajo. En este sentido, se considera que el álgebra temprana puede ocurrir en varias formas interrelacionadas en el aula, siendo el pensamiento funcional un hilo por el cual los profesores pueden construir la generalidad y una hebra clave del pensamiento algebraico (Cañadas y Fuentes, 2015). En la actualidad, Torres (2022) establece que “una de las aproximaciones al pensamiento algebraico recomendada para los estudiantes de los primeros cursos de educación primaria, e incluso infantil, es el pensamiento funcional” (p. 216). Diversos ejemplos de investigaciones evidencian que los niños de la escuela primaria pueden desarrollar y usar una variedad de herramientas de representación para razonar sobre funciones, pueden describir en palabras y símbolos relaciones recursivas, covariables y de correspondencia entre variables; además, pueden usar lenguaje simbólico para modelar y resolver ecuaciones con cantidades desconocidas. Se ha demostrado que los estudiantes no solo son capaces de realizar un análisis funcional más profundo de lo que se pensaba anteriormente, sino que la génesis de estas ideas aparece en los estudiantes antes de lo esperado (Blanton y Kaput, 2011).

En este trabajo de investigación nos centramos en el enfoque funcional del *early algebra*, que se fundamenta en “el estudio de las relaciones entre variables y focaliza su atención en las funciones como contenido matemático” (Fuentes, 2014, p. 4). Específicamente hablamos del pensamiento funcional, como un tipo de pensamiento algebraico. Nuestro problema de investigación surge a partir de la necesidad de estudiar el pensamiento funcional en estudiantes de edades tempranas a través de la descripción de los sistemas de representación que usan al momento de resolver tareas funcionales; dichos sistemas serán descritos en el apartado de marco conceptual. Consideramos pertinente indagar en este tipo de pensamiento algebraico en estudiantes de educación básica primaria, teniendo en cuenta de que aunque ciertos elementos se relacionan con el pensamiento algebraico en el currículo de Matemáticas en Colombia (establecido por el Ministerio de Educación Matemática, MEN a partir de ahora), no hay mención específica de lo que es el pensamiento funcional en este nivel escolar, dado que la identificación de cantidades que se relacionan y la explicación de cómo cambian o se mantienen constantes generalmente se han asociado con el pensamiento variacional (MEN, 1998).

A partir del análisis de las investigaciones y posturas expuestas, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué sistemas de representación usan estudiantes de básica primaria cuando abordan tareas que involucran dos cantidades que varían? Con base en esta pregunta se

establece el objetivo de la investigación: Describir el pensamiento funcional de estudiantes de básica primaria a través de los sistemas de representación que usan cuando abordan tareas que involucran dos cantidades que varían.

Marco conceptual

Pensamiento funcional

Bajo la revisión de diversas investigaciones que involucran el pensamiento funcional, se evidencian similitudes en sus consideraciones que nos llevan a pensar en la generalización de relaciones entre cantidades que varían como su eje principal. Algunos investigadores han precisado el pensamiento funcional en los términos que describimos a continuación. Por ejemplo, se conceptualiza ampliamente el pensamiento funcional “para incorporar la construcción y generalización de patrones y relaciones usando diversas herramientas lingüísticas y de representación y tratando relaciones o funciones generalizadas que resultan como objetos matemáticos útiles por derecho propio” (Blanton y Kaput, 2011, p. 7). En acuerdo con Cañadas y Molina (2016), consideramos que el pensamiento funcional hace parte del pensamiento algebraico, como un proceso cognitivo clave que se basa en “la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (p. 211). De este modo, el pensamiento funcional se considera una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas y trata de la acción de “pensar en términos de y acerca de relaciones” (Rico, 2006, p. 56), además, puede ser expresado por medio de distintos sistemas de representación. Existen elementos fundamentales para el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros grados, al respecto Bastías y Moreno (2016) mencionan que “el pensamiento funcional incluye la relación entre cantidades que pueden expresar su relación en palabras, símbolos, tablas o gráficos, y el razonamiento con estas diversas representaciones para analizar el comportamiento de la función” (p. 565).

Si nos cuestionamos sobre cuándo los estudiantes al enfrentarse a una situación problema hacen uso de su pensamiento funcional, podemos decir que cuando logran “explicitar la relación entre las variables o entre los conjuntos, con los que está trabajando y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia la generalización de la expresión, encontrando una regla que describa la relación funcional entre esas variables” (Fuentes, 2014, p. 9). Cabe aclarar que al igual que en el enfoque del álgebra temprana que mencionamos anteriormente, nuestra forma de abordar el pensamiento funcional con estudiantes de básica primaria no tiene como objetivo el estudio formal sobre aspectos relativos a la función. Tal como lo mencionan Cañadas y Molina (2016), el objetivo de la incorporación del pensamiento funcional desde los primeros niveles educativos, no se enfoca en la introducción de las funciones tal y como se estudian durante la secundaria, en este caso, se busca sacar provecho del potencial de este contenido matemático tan amplio, como lo son las funciones, y así promover en los estudiantes capacidades que les sean útiles para potenciar su razonamiento matemático tanto en primaria como a futuro en los siguientes grados.

Sistemas de representación

En la literatura encontramos diferentes investigaciones que abordan el concepto de representación (Merino et al. 2013; Fuentes 2014, Cañadas y Fuentes, 2015; Cañadas y Molina, 2016; Ureña, 2021; Torres, 2022) y coinciden en la importancia del uso de los sistemas de representación en el desarrollo del pensamiento algebraico y en particular, en el pensamiento funcional. Resaltando que, desde edades tempranas los estudiantes expresan sus ideas matemáticas a partir de distintos sistemas de representación, desde el más básico y puede ir refinándose con el paso del tiempo.

El aprendizaje de diversos sistemas de representación posibilita herramientas a los estudiantes para una comprensión más amplia de las funciones, así mismo, deben estar en la capacidad de comprender la relación entre los distintos tipos de representación (tablas, gráficas y símbolos) para representar relaciones y considerar las ventajas y desventajas de cada una de ellas (NCTM, 2000). Respecto a los sistemas de representación, Pinto (2016) expresa que permiten la organización de simbología matemática y usar diferentes sistemas de representación, atribuye diversos significados a un mismo concepto, lo cual es necesario en matemáticas y permite el complemento entre los distintos tipos.

Concretamente, las representaciones son fundamentales para el pensamiento funcional ya que sirven para la representación de ideas matemáticas, permiten conocer cómo piensan los estudiantes sobre las funciones y sirve como una manera de expresión de relaciones entre variables (Pinto et al., 2021). En este trabajo nos referiremos a representaciones como lo hace Torres (2022): “cada vez que mencionemos representación o representaciones, nos referiremos a las representaciones externas, realizadas con lápiz, papel o habladas, las cuales son intencionales en la medida en que su propósito es registrar y transmitir un significado” (p. 45).

Los sistemas de representación: gestual, verbal, pictórico, simbólico, tabular y múltiple; son los que consideramos relevantes a partir de la revisión de la literatura y consideramos en esta investigación. Respecto al sistema de representación gestual Torres (2022) menciona que “los gestos ayudan a los estudiantes a generalizar y expresar la generalización”, sin embargo, consideramos que este funciona como apoyo al momento del estudiante expresar y justificar verbalmente sus ideas, pero no es necesariamente evidencia de que se esté llevando a cabo algún tipo de generalización al momento de trabajar una tarea funcional. La representación verbal es aquella que se lleva a cabo mediante el lenguaje natural, ya sea de manera oral o escrita, para hacer referencia a conceptos y procedimientos matemáticos que se pretenden representar (Merino et al., 2013; Cañadas y Figueiras, 2011). En el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos la utilización del sistema de representación verbal resulta ser clave (Cañadas y Fuentes, 2015). Las representaciones pictóricas son aquellas que hacen uso de dibujos sin alguna notación de carácter simbólico. Este tipo de representación utiliza únicamente recursos visuales, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011). Las representaciones simbólicas son aquellas de carácter alfanumérico (Rico, 2009), es decir, están formadas por letras y números simultáneamente. Distinguimos este tipo de representación de dos formas: las numéricas basadas en el uso de números y operaciones aritméticas mediante lenguaje matemático, haciendo uno de los símbolos aritméticos (+, -, \times o \div); y algebraicas que se caracterizan por el uso de letras y símbolos algebraicos propios de la aritmética y el

álgebra, utilizados para generalizar alguna operación numérica. El sistema de representación tabular comprende el uso y elaboración de tablas para relacionar y organizar información de una relación entre dos cantidades. Además de considerar cada sistema de representación por separado, tenemos en cuenta que en el contexto del pensamiento funcional la idea es que los estudiantes utilicen más de un tipo de representación simultáneamente adquiere relevancia (Pinto, 2019). Por tanto, llamamos sistema de representación múltiple a lo que resulta de la combinación o unión de dos o más sistemas de representación de los que contemplamos en esta investigación; pensamos en este tipo de representación, por la importancia que tiene que un estudiante tenga la capacidad de transitar entre diferentes representaciones de un concepto matemático para tener acceso a él (Duval, 2017).

Método

Esta propuesta de investigación se sitúa en un estudio cualitativo. Los participantes de esta investigación son un aproximado de 90 estudiantes de básica primaria con edades comprendidas entre los 6 y 11 años; específicamente de los grados: primero, tercero y quinto que hacen parte de una institución educativa pública ubicada en la ciudad de Bucaramanga (Colombia). El método de esta investigación se basa en el desarrollo de cuatro fases, a continuación se describe cada una, con base en los conceptos metodológicos que la sustentan.

i. Observación y caracterización: El objetivo de esta etapa es conocer el grupo de estudiantes que participan en la investigación. Realizaremos en cada grado una inmersión inicial adentrándonos con profundidad en el aula, manteniendo una reflexión permanente y generando ambientes de confianza para evitar que nuestra presencia se torne intrusa. Respecto al tiempo de observación, en la investigación cualitativa se considera que este es un periodo abierto (Sampieri, 2018), por tanto, consideramos que a medida que avancemos en esta etapa podremos establecer la cantidad de sesiones a realizar. El producto de esta etapa es la caracterización de los grupos centrada principalmente en los estudiantes, en el contexto del aula de clases y en la actividad matemática que se promueve. Las técnicas de recolección que intervienen son bitácoras con registro escrito y material audiovisual de lo observado en cada sesión. En este caso contemplamos un nivel de participación moderada, en la cual según Sampieri (2018) el investigador participa en algunas actividades, pero no lo hace en todas.

ii. Diseño de tareas para la clase: En esta etapa se destacan dos aspectos fundamentales que se describen brevemente a continuación:

- a. Definición de una ruta de acceso al pensamiento funcional en básica primaria. Siguiendo las ideas de Butto y Rojano (2010) que proponen dos rutas de acceso al pensamiento algebraico basadas en la proporcionalidad y el proceso de generalización, consideramos indispensable para nuestra investigación, identificar caminos en donde los estudiantes puedan desarrollar ideas fundamentales del pensamiento funcional y el uso de distintos sistemas de representación desde la básica primaria. Para esto haremos una Revisión de documentos curriculares y un estudio de libros de texto.

A partir de lo establecido por el MEN (1998, 2006, 2016) buscamos posibilitar el desarrollo del pensamiento funcional a través de los temas que se estudian en

matemáticas de manera habitual sacando provecho a estos. De modo que, podamos llevar a los estudiantes a construir algunas ideas alrededor de la noción de función. Adicional a los documentos curriculares que plantea el MEN, consideramos fundamental realizar una revisión de libros de textos de matemáticas en 1°, 3° y 5°, de modo que podamos identificar cuáles de los temas que allí se proponen pueden apuntar a ideas inmersas en el pensamiento funcional y tengamos elementos que permitan definir su posible ruta de acceso, y bajo que contexto y temáticas diseñaremos los cuestionarios con las tareas funcionales. De este modo, planteamos la iniciación temprana del pensamiento funcional a través de la exploración de los contenidos curriculares usuales en clase de matemáticas sin la necesidad de agregar más.

- b. Categorías de análisis. En el diseño de los cuestionarios es indispensable considerar aspectos teóricos sobre los sistemas de representación, de modo que cada tarea funcional que se diseñe permita que el estudiante tenga diversas formas de abordarla. En este caso interesa generar la posibilidad de utilizar uno o varios de los que sistemas de representación descritos en esta investigación. A partir de un análisis a priori podremos refinar cada una de las tareas que se planteen y verificar si están acordes a los objetivos de la investigación.
- c. Diseño. Los cuestionarios con las tareas funcionales son el instrumento principal en la recolección de datos, adicionalmente material audiovisual. De acuerdo con Radford (2015), los docentes jugamos un papel importante al momento de seleccionar las actividades de nuestros estudiantes. Radford (2015) presenta una lista de trabajo como apoyo para los docentes en el diseño de actividades, ésta la sintetizamos de manera breve a continuación: tener en cuenta los conocimientos previos; las situaciones deben ser interesantes para los estudiantes y significativas de acuerdo con el concepto matemático que se pretende abordar; además, las situaciones deben plantearse con una organización estructurada que permita que los estudiantes trabajen cada vez problemas de mayor complejidad. De este modo, a partir de los aspectos mencionados se diseñarán tres tareas funcionales. En los tres grados (primero, tercero y quinto) se presentará la misma situación, de modo que, la esencia de la tarea funcional sea la misma, pero, el cuestionario de preguntas en cada grado irá acorde a los contenidos curriculares del respectivo curso.

iii. Implementación de las tareas: Se tiene previsto realizar tres sesiones de trabajo con cada grupo, en cada una se presenta una tarea con diferentes preguntas en torno a ella. Tomaremos como referente para la implementación la actividad de aula como sistema emergente (Radford, 2015), de este modo, el desarrollo de cada sesión se seguirá de la siguiente manera: (a) presentación de la actividad por el profesor; (b) formación de pequeños grupos de trabajo; (c) discusión entre el docente y los estudiantes; (d) una discusión general del grupo completo. Es decir, no se validará si se realiza bien o no cada tarea, esta socialización se hace para obtener argumentos de las respuestas de los estudiantes.

iv. Interpretación y análisis de datos. Para esta etapa final, haremos un análisis a posteriori de los datos recolectados en los cuestionarios de las tareas funcionales. Por otro lado,

es fundamental la interpretación de estos haciendo uso de los aspectos teóricos de la investigación que se enfocan en los sistemas de representación y así, poder dar respuesta a nuestro objetivo. A la luz del diseño y análisis de la actividad matemática de los estudiantes, se definen momentos clases en donde emerge diferentes sistemas de representación en el desarrollo de las tareas funcionales, de este modo, podremos determinar cuáles de estos son los más usados, o evidentemente cuales no, de acuerdo con el grado en el que se encuentra cada estudiante.

Comentarios finales

Esta investigación se considera un aporte a la línea de investigación del pensamiento algebraico temprano, y en particular, a una de sus formas de estudio como lo es el pensamiento funcional. En general, los resultados de este estudio nos permitirán dar razón de cómo piensan los estudiantes de básica primaria en Colombia, siguiendo el MEN (Lineamientos curriculares en Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas), a partir del trabajo con tareas funcionales lineales. Por otro lado, al realizar estos cuestionarios y entrevistas con estudiantes de diferentes grados (primero, tercero y quinto) podremos dar cuenta de su evolución sobre las formas de pensamiento funcional emergente. De este modo, se podrá analizar si a medida que un estudiante avanza en los grados de formación básica, sus sistemas de representación son más sofisticados o no. Finalmente, esta investigación busca establecer una relación entre la propuesta curricular “*Early algebra*” y el estudio de funciones en la educación básica primaria.

Referencias y bibliografía

- Bastías, K. y Moreno, A. (2016). Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5° curso primaria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 565). Málaga: SEIEM.
- Blanton, M. L. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En Cai, J., & Knuth, E. (Eds.) (2011), *Early algebraization: Advances in Mathematics Education* (pp. 43-70). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, 22(3), 55-86.
- Callejo, M.J., García-Reche, A., y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5 – 25.
- Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, 34(4), 409-425.
- Cañadas, M. y Fuentes, S. (2015). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. En Fernández, Ceneida; Molina, Marta; Planas, Núria (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: Universidad de Alicante.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing.
- Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. (Tesis de Maestría), Universidad de Granada, Granada, España.
- Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (2003). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional (2003). *Derechos Básicos de Aprendizaje: Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.
- NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Reston, VA: NCTM.
- Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria*. (Tesis de maestría), Universidad de Granada, Granada, España.
- Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to Early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-20.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Radford, L. (2015). Aspectos metodológicos de la teoría de la objetivación. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18), 547-567.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Sampieri, R. H. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill México.
- Torres, M. (2022). Generalización, estructuras y representaciones de estudiantes de segundo de educación primaria desde un enfoque funcional del early algebra. (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* (Tesis doctoral). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.