



## Perfiles de estudiantes de primaria y secundaria en un problema de comparación de razones

Salvador **Castillo**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante  
España

[salvador.castillo@ua.es](mailto:salvador.castillo@ua.es)

Ceneida **Fernández**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante  
España

[ceneida.fernandez@ua.es](mailto:ceneida.fernandez@ua.es)

Juan Manuel **González-Forte**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante  
España

[juanma.gonzalez@ua.es](mailto:juanma.gonzalez@ua.es)

### Resumen

El objetivo del estudio es identificar perfiles (comportamientos) de estudiantes de Educación Primaria y Secundaria cuando resuelven un problema de comparación de razones. Los participantes fueron 954 estudiantes desde 6.º curso de Educación Primaria hasta 4.º curso de Educación Secundaria. El análisis se realizó en dos fases. La primera consistió en un análisis inductivo de generación de categorías. La segunda consistió en identificar perfiles de estudiantes mediante un análisis clúster bietápico. Se presentan las características de los seis perfiles identificados.

*Palabras clave:* Educación matemática; Educación secundaria; Enseñanza presencial; Implementación curricular; Investigación cualitativa; Pensamiento numérico

### Introducción y marco teórico

Se define cantidad como atributo de un objeto, expresado mediante un número y una unidad de magnitud, por ejemplo, 3 segundos. Se distinguen dos tipos de cantidades: las cantidades extensivas, que representan atributos medibles directamente, como la longitud o el

tiempo, y las cantidades intensivas, que no pueden medirse directamente, como la velocidad (Schwartz, 1988; Thompson, 1994).

Se entiende el concepto de razón o razón internalizada como el resultado de comparar dos cantidades multiplicativamente en una situación particular (Thompson, 1994). Por ejemplo, en el problema de comparación de razones “*Un corredor tarda 5 segundos en recorrer 20 metros. ¿Puede recorrer 60 metros en 12 segundos?*”, la razón internalizada es cada iteración (“20 metros en 5 segundos”, “40 metros en 10 segundos”, “60 metros en 15 segundos”), es decir, cada razón particular. Si se concibe la razón más allá de esta situación, se obtiene una razón constante para cualquier situación, llamada tasa o razón interiorizada. En el ejemplo, supondría identificar que las tasas 4m/1s y 5m/1s (nueva cantidad que se genera, que es intensiva, en este caso *velocidad*) son constantes para cualquier situación. Entender el concepto de tasa implica, por tanto, comprender que las cantidades extensivas pueden variar, pero mantienen constante la relación multiplicativa.

Como se observa en el ejemplo anterior, en los problemas de comparación de razones pueden establecerse tanto razones como tasas, siendo este tipo de problemas los empleados en nuestro estudio. Estos problemas expresan situaciones en las que se comparan dos razones cuya información numérica está dada de forma completa. En estos problemas, los estudiantes deben identificar la relación multiplicativa entre cantidades extensivas, que se establece mediante el uso de técnicas de normalización (como el producto cruzado o el cociente), identificar el referente en la comparación (cantidad de referencia respecto la que se compara la otra cantidad) e identificar si las razones son iguales o desiguales (Castillo y Fernández, 2021; Monje y Gómez, 2019).

Este trabajo es parte de un estudio más amplio centrado en cómo los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria comprenden los conceptos de razón y tasa cuando resuelven problemas de comparación de razones. Para ello, usamos una caracterización del Mecanismo de Reflexión en la Relación Actividad-Efecto (Simon et al., 2004; Tzur y Simon, 2004), basado en la idea de Abstracción Reflexiva (Piaget, 2001), que es el proceso por el que se construyen nuevos conceptos más avanzados a partir de otros disponibles, mediante la reorganización de lo que uno sabe tras sufrir una perturbación (Piaget, 2001; Simon et al., 2004). En este marco, se identifican dos fases en el desarrollo de un concepto: la de Participación y la de Anticipación. La primera comienza tras sufrir una perturbación. En ella, se abstrae un nuevo concepto, pero es provisional al estar sujeto a la situación en la que se ha construido. En la fase de Anticipación, los estudiantes pueden aplicar el concepto construido en otras situaciones, de modo que el concepto deja de ser provisional para ser invariable (Simon et al., 2004; Tzur y Simon, 2004). Con relación a estas fases, Tzur (1999) identificó tres tipos de tareas: a) Iniciales, que pueden resolverse con los conceptos disponibles; b) de Reflexión, que buscan causar perturbaciones para comenzar la construcción de un nuevo concepto; y c) de Anticipación, que pueden resolverse usando el concepto construido y, así, comprobar que éste sea invariable.

En esta comunicación, el objetivo específico es identificar perfiles (comportamientos) de estudiantes de Educación Primaria y Secundaria cuando resuelven un problema de comparación de razones, diseñado teniendo en cuenta los tipos de tareas según Tzur y las definiciones de razón y tasa de Thompson.

## **Método**

Los participantes fueron 954 estudiantes de Educación Primaria y Secundaria de diferentes centros públicos de la provincia de Alicante (España). De ellos, 19 dejaron el cuestionario en blanco, por lo que el número total fue de 935 estudiantes de 6º Primaria ( $n = 159$ ), 1º ESO ( $n = 187$ ), 2º ESO ( $n = 232$ ), 3º ESO ( $n = 226$ ) y 4º ESO ( $n = 131$ ). El número de chicos y chicas fue aproximadamente el mismo en cada curso, y los estudiantes provenían de contextos socioeconómicos mixtos. Los participantes resolvieron el siguiente problema de comparación de razones:

La entrenadora de atletismo de Melania le dice que, por cada 20 metros que recorra, debe tardar 5 segundos para clasificarse en el campeonato nacional.

- a) Si Melania ha recorrido 250 metros en 60 segundos, ¿se ha clasificado?
- b) Melania compite con Cristina que ha recorrido 300 metros en 70 segundos. ¿Cuál es la velocidad de cada una? ¿Quién es más rápida?
- c) Si Melania corre el doble de metros en el doble de segundos, ¿su velocidad cambiaría o sería la misma? ¿Por qué? Si cambia la velocidad ¿cuál sería esta velocidad?
- d) Propón tres casos (los metros recorridos y los segundos usados) en los que la velocidad sea la misma que la de Cristina cuando recorre 300 metros en 70 segundos.

El problema se diseñó en base al Mecanismo de Reflexión en la Relación Actividad-Efecto y los tres tipos de tareas. Aunque Tzur (1999) señalaba que los tipos de tarea se definen por la actuación del estudiante, nosotros las utilizamos como guía para el diseño. De esta manera, el apartado a) se considera como una tarea inicial para comprobar si los estudiantes tenían disponible el concepto de razón; las cuestiones b) y c) como tareas de reflexión para provocar la construcción del concepto de tasa a partir del concepto de razón; así en el apartado b) se introduce la pregunta ¿cuál es la velocidad de cada una? (perturbación para promover la identificación de la nueva cantidad intensiva que se construye – velocidad) y en el apartado c) se introduce la pregunta ¿su velocidad cambiaría o sería la misma? ¿Por qué? (perturbación para promover la identificación de que la nueva cantidad intensiva – razón – que se construye es constante); y la cuestión d) como una tarea de anticipación para comprobar si el concepto de tasa está disponible en otras situaciones (en nuestro caso, la identificación de la razón constante).

El análisis del problema consta de dos fases. En la primera fase, se realizó un análisis inductivo de generación de categorías (Strauss y Corbin, 1994) por cada apartado del problema. Tres investigadores analizaron, independientemente, las respuestas dadas por los estudiantes. Los desacuerdos fueron discutidos hasta llegar a un consenso. Las categorías identificadas en este análisis son las siguientes (Castillo et al., 2022):

En los apartados a) y b) se obtuvieron las mismas cinco categorías:

**A1 y B1:** los estudiantes no identifican las cantidades extensivas o la relación multiplicativa entre ellas.

**A2 y B2:** los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas, pero tienen dificultades al utilizar una técnica de normalización para establecer las razones a comparar.

**A3 y B3:** los estudiantes establecen las razones correctamente utilizando una técnica de normalización, pero tienen dificultades con el referente al compararlas.

**A4 y B4:** los estudiantes establecen y comparan las razones correctamente, identificando la desigualdad de razones.

**A5 y B5:** los estudiantes establecen y comparan las razones correctamente, identificando la desigualdad de razones y la velocidad como la razón m/s.

En el apartado c), se obtuvieron 2 categorías:

**C1:** los estudiantes no identifican la constancia de la razón.

**C2:** los estudiantes identifican la constancia de la razón.

Finalmente, en el apartado d), se obtuvieron 4 categorías:

**D1:** los estudiantes no identifican la constancia de la razón en varias situaciones.

**D2:** los estudiantes identifican la constancia de la razón sólo al multiplicar las cantidades extensivas por el doble.

**D3:** los estudiantes identifican la constancia de la razón en varias situaciones multiplicando las cantidades extensivas por el mismo factor (doble, triple, etc.).

**D4:** los estudiantes identifican la constancia de la razón en varias situaciones usando la razón velocidad del apartado b).

En la segunda fase, se lleva a cabo un análisis clúster bietápico usando las categorías obtenidas en la fase 1 del análisis que nos permite identificar el comportamiento de los estudiantes a lo largo del problema. Para ello, se usó el software estadístico SPSS versión 25. Para este análisis, no se incluyeron aquellos estudiantes que no identificaron las cantidades extensivas ni la constancia, es decir, aquellos que fueron codificados con las categorías {A1, B1, C1 y D1} en la primera fase del análisis. Por tanto, el número final de participantes de este estudio es de 656.

## **Resultados y conclusiones**

El análisis clúster proporcionó seis perfiles de estudiantes teniendo en cuenta un valor bajo de BIC (Criterio de Información Bayesiano) y desde un punto de vista interpretativo. Los perfiles obtenidos fueron los siguientes:

**Perfil 1 ( $n = 165$ ):** los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas en el apartado a), pudiendo resolver el problema con éxito (41.3% de los estudiantes) o pudiendo tener dificultades con el referente o la normalización (58.7%), pero no las identifican en el apartado b), ni identifican la constancia (c y d).

**Perfil 2 ( $n = 74$ ):** los estudiantes no identifican las cantidades extensivas en los apartados a) y b), e identifican la constancia en un único caso – el doble (apartado c).

**Perfil 3 ( $n = 89$ ):** la mayoría de los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas en el apartado a) pudiendo resolver el problema con éxito (37.1%) o teniendo dificultades con la normalización o el referente (21.4%), aunque algunos estudiantes no identifican las cantidades extensivas en a) (41.5%). Además, estos estudiantes no identifican las cantidades extensivas en b), e identifican la constancia en varios casos (c y d) (alrededor del 70%).

**Perfil 4 ( $n = 71$ ):** los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas en el apartado b), pudiendo resolver el problema con éxito (28.2% de los estudiantes) o pudiendo tener dificultades con el referente o la normalización

(71.8%), pero tienen dificultades en el apartado a), ya que algunos estudiantes no identificaron las cantidades extensivas (29.6%) o tuvieron dificultades con la normalización o el referente (39.4%), y no identifican la constancia ni en c) ni en d).

**Perfil 5 ( $n = 143$ ):** los estudiantes identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa entre ellas en los apartados a) y b), pudiendo resolver el problema con éxito (46.2% de los estudiantes en la situación a) y 37.1% en la situación b)) o pudiendo tener dificultades con el referente o la normalización (42.0% en la situación a) y 62.9% en la situación b)), e identifican la constancia en la situación del doble (c) y un 60% de los estudiantes en otros casos (d).

**Perfil 6 ( $n = 114$ ):** los estudiantes establecen y comparan razones correctamente en a) y b), e identifican la constancia en la situación del doble (c) y un 79% en otros casos (d).

Los estudiantes del perfil 2 identifican que la razón es constante para la situación “doble de metros, doble de segundos”, sin embargo, no son capaces de identificar la constancia en otras situaciones, ni identificar las cantidades extensivas y la relación multiplicativa en los apartados a) y b), por lo que podríamos decir que este grupo de estudiantes no evidencia un uso de los conceptos de razón o tasa.

Los estudiantes del perfil 1 parecen disponer del concepto de razón internalizada ya que identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa en el apartado a) llegando a resolver el problema con éxito o teniendo dificultades con el referente o la normalización. Sin embargo, no identifican las cantidades extensivas a ser comparadas en la situación b) cuando se les pregunta por la nueva cantidad intensiva generada (velocidad). Tampoco son capaces de identificar la constancia. Los estudiantes del perfil 3 comparten características del perfil 1 en cuanto a disponer un gran grupo de ellos del concepto de razón internalizada para la situación a), y no identificar las cantidades extensivas en el apartado b). Sin embargo, este grupo de estudiantes identifica la constancia de la razón velocidad en c) y son capaces de extenderla a otros casos. Una interpretación de este comportamiento es que, aunque estos estudiantes tienen algunas dificultades al comparar las razones en la situación a) por la técnica de normalización utilizada o por no identificar correctamente el referente, podrían disponer del concepto de razón internalizada y la situación c) promovió la identificación de que la nueva cantidad intensiva que se construye (velocidad) es constante.

Los estudiantes del perfil 4 parecen disponer del concepto de razón internalizada ya que identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa en el apartado b) llegando a resolver el problema con éxito o teniendo dificultades con el referente o la normalización, sin embargo, tienen más dificultades en el apartado a) y no identifican la constancia. Podríamos decir que quizás a estos estudiantes la perturbación utilizada en la situación b) para promover la identificación de la nueva cantidad intensiva (velocidad) les ayudó a usar el concepto de razón internalizada, aunque con dificultades con las técnicas de normalización y la identificación del referente en la comparación.

Los estudiantes del perfil 5 parecen disponer del concepto de razón internalizada ya que identifican las cantidades extensivas y la relación multiplicativa en ambas situaciones, aunque presentan dificultades con las técnicas de normalización y la identificación del referente en la comparación. Por otra parte, este grupo de estudiantes parece estar usando el concepto de tasa, ya

que fueron capaces de identificar la constancia en la situación del doble y un 60% de ellos de extenderla a otras situaciones.

Los estudiantes del perfil 6 disponen del concepto de razón internalizada y parece que están usando el concepto de tasa ya que son capaces de identificar la constancia en la situación del doble y un 79% son capaces de extender la razón constante a otros casos.

Estos perfiles nos dan información sobre cómo los estudiantes de educación primaria y secundaria usan los conceptos de razón y tasa cuando resuelven un problema de comparación de razones. Se observa que los estudiantes parecían disponer del concepto de razón, pero tenían algunas dificultades en la comparación de razones, bien por tener errores en la técnica de normalización o por no identificar correctamente el referente en la comparación (Castillo y Fernández, 2021; Monje y Gómez, 2019). Por otro lado, se observa las dificultades que tenían con el concepto tasa.

### **Agradecimientos**

Esta investigación ha recibido el apoyo del proyecto EDU2017-87411-R financiado por el MINECO, España y de la beca predoctoral de este mismo proyecto (PRE2018-083765).

### **Referencias y bibliografía**

- Castillo, S., & Fernández, C. (2021). Ratio comparison problems: Critical components and students' approaches. En M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 129-136). Khon Kaen, Thailand: PME.
- Castillo, S., Fernández, C., & Canavaro, A.P. (2022). The use of the ratio and rate concepts by students in primary and secondary school. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 107-114). Alicante, Spain: PME.
- Monje, J., & Gómez, B. (2019). Rutas cognitivas de futuros maestros ante una situación comparativa de razones desiguales. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(2), 151-172. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2606>
- Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction*. Sussex, England: Psychology Press (Trabajo original publicado en 1977).
- Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA, USA: NCTM.
- Simon, M., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a Mechanism for Conceptual Learning: *Elaborating the Construct of Reflective Abstraction*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329. <https://doi.org/10.2307/30034818>
- Strauss, A., & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. En N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Ed.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 217-285). Sage.
- Thompson, P. (1994). The Development of the Concept of Speed and its Relationship to Concepts of Rate. En G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY, USA: SUNY Press.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390–416. Reston, VA. <https://doi.org/10.2307/749707>

Tzur, R., & Simon, M. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2, 287-304.